INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

历届IMO试题集

1959—2005

刘培杰　主编

多解　推广　加强

哈爾濱工業大學出版社

IMO

十年树木 百年树人 数学滋养人生

公众领域

- J.Perry（佩里） 美国前国防部部长，宾夕法尼亚州立大学数学博士学位。
- Corazon Aquino（科拉松·阿基诺） 菲律宾前总统，她辅修数学。
- David Dinkins 纽约市前市长，哈佛大学数学学士。
- Alberto Fujimori（藤森） 秘鲁前总统，Wisconsin-Milivarkee大学数学硕士。
- Lee Hsien Loong（李显龙） 新加坡总理，剑桥大学学士，主修数学与计算机。
- Leon Trotsky（托洛茨基） 原名布朗斯坦，俄国十月革命主要领导人之一。1897年在敖德萨开始学习纯数学。
- Eamon de Valera 长时间担任爱尔兰共和国的总理，然后担任总统。在爱尔兰独立前他是一位数学教授。

音乐

- Pierre Boulez 当代最杰出的法国作曲家、钢琴家与著名指挥，曾在圣艾蒂安学院主修数学，兼学音乐，后在里昂攻读数学、工程和音乐。
- 周华健 台湾大学数学学士。

其他艺术

- Lewis Carroll 《爱丽思漫游奇境记》、《镜中世界》以及其他作品的作者。英国数学家、逻辑学家。
- Alexander Solzhenitsyn（索尔仁尼琴） 诺贝尔文学奖的获得者，在罗斯托夫大学获得数学和物理学位。

财政金融

- John Maynard Keynes（凯恩斯） 伟大的经济学家，剑桥大学硕士和第12届数学学位甲等及格者。
- J.Pierpont Morgan（摩根） 银行、钢铁和铁路大王。哥根廷学派的一些人曾试图说服他成为专业数学家。

哲学家

- Edmund Husserl（胡塞尔） "现象学之父"，1883年在维也纳获得哲学博士学位。
- Ludwig Wittgenstein（维特根斯坦） 20世纪哲学巨人之一。和Bertrand Russell 一起研究数理逻辑。

运动员和竞技者

- David Robinson 篮球明星。从Annapolis得到数学学士学位。
- Virginia Wade 温布尔顿网球冠军。Sussex的数学物理学学士。

责任编辑 李广鑫 刘培杰数学工作室 整体设计 卞秉利

上架建议 奥数类 数学类

ISBN 7-5603-2345-6

9 787560 323459 >

ISBN 7-5603-2345-6

O·203 定价58.00元

01-44
L652.1

INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

历届IMO试题集

1959—2005

刘培杰　主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书汇集了第1届至第46届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答。本书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重了初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

历届 IMO 试题集/刘培杰主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2006.5

ISBN 7-5603-2345-6

Ⅰ.历…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学-竞赛题
Ⅳ.O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第032111号

策划编辑　刘培杰　责任编辑　李广鑫
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张45.25　字数830千字
版　　次　2006年6月第1版　2006年6月第1次印刷
印　　数　1-5 000册
定　　价　58.00元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点："若一个人不'精通数学'，他就比别人笨吗？

"数学是最容易理解的.除非有严重的精神疾病，不然的话，大家都应该是'精通数学'的.可是，由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因，某些年轻人认定自己数学不行.我认为其中主要的责任在于教授数学的方式.

"我们自然不可能对任何东西都感兴趣，但数学更是一种思维的锻炼，不进行这项锻炼是很可惜的.不过，对诗歌或哲学，我们似乎也可以说同样的话.

"不管怎样，根据学生数学上的能力来选拔'优等生'的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的."(阿尔贝·雅卡尔，于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》.周冉，译.广西师范大学出版社，2001，96)

这本题集不是为老师选拔"优等生"而准备的，而是为那些对IMO感兴趣，对近年来中国数学工作者在IMO研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库.展示原味真题，提供海量解法(最多一题提供20余种不同解法，如第3届IMO第2题)，给出加强形式，尽显推广空间.是我国建国以来有关IMO试题方面规模最大、收集最全的一本题集，从现在看以"观止"称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了2万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意。”（胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999，P463）本书的编写又何尝不是如此呢，将近100位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比做一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者（1979年笔者初中毕业，同学姜三勇（现为哈工大教授）作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》（定价仅0.29元），并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”27年过去仍记忆犹新）.所以特引用了江先生的一些解法.江苏师范学院（单墫、蒋声两位教授都在那里读过书，华东师范大学的肖刚教授也曾在该校外语专业读过）是我国最早介入IMO的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译1～20届题解.令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天嫉英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕（山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一）.本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22].另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说上世纪80年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根20世纪初之于现代数学的研究.常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物.本书中许多好的解法均出自他们[4],[13],[19],[20],[50].目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性.记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李尚志去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李尚志当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足.另外，现在流行的IMO题解，历经多人之手已变成了雕刻后的

最佳形式,用于展示很好,但用于教学或自学却不适合,有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的,我怎么想不到,容易产生挫败感,就像数学史家评价高斯一样,说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人.使人觉得突兀,景仰之后,倍受挫折.高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展,使人们很难跟上他的脚步.所以我们提倡,讲思路,讲想法,表现思考过程,甚至绕点弯子,都是好的,因为它自然,贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展与普及与中国革命的农村包围城市,星星之火可以燎原的方式迥然不同,是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延,而这种方式全赖强势人物推进,从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生,以他们的威望与影响振臂一呼,应者云集,数学奥林匹克在中国终成燎原之势,他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬,我们必须以此为标准,所以引用会时有发生,在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位,各大学的名家们起了重要的理论支持作用.北京大学王杰教授、复旦大学舒五昌教授、首都师范大学梅向明教授、华东师范大学熊斌教授、中国科学院许以超研究员、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等,他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力,已达到炉火纯青的地步,堪称为中国 IMO 研究的标志.如果说多样性是生物赖以生存的法则,那么百花齐放,则是数学竞赛赖以发展的基础.我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法,也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现.为此本书广为引证,也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为图“文无遗珠”的效果,大量参考了多家书刊杂志中发表的解法,也向他们表示谢意.

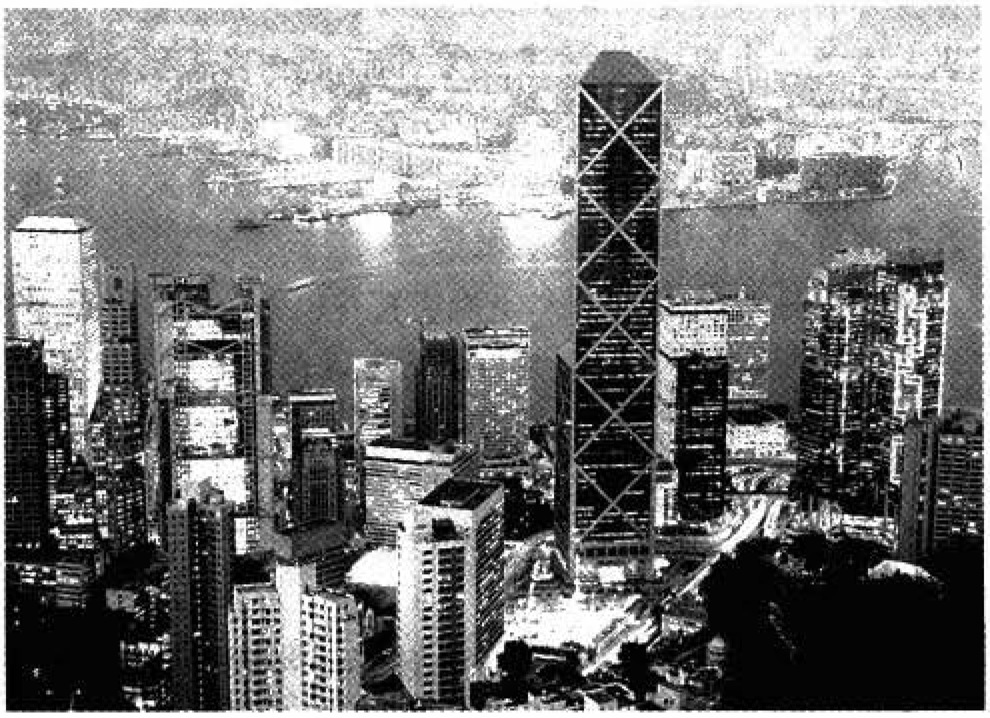
特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝先生以及顾可敬先生.他们四位的长篇推广文章读之,使我不能不三叹而三致意,收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备,后天不足,斗胆尝试,徒见笑于方家.

哲学家休谟在写自传的时候,曾有一句话讲得颇好:“一个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的.”

这句话同样也适合于一本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举.

刘培杰
2006年6月



香港中银大厦


笛卡尔(René Descartes, 1596-1650)

目 录 | Contents

第 1 届国际数学奥林匹克
罗马尼亚，1959 **1**

第 2 届国际数学奥林匹克
罗马尼亚，1960 **14**

第 3 届国际数学奥林匹克
匈牙利，1961 **26**

第 4 届国际数学奥林匹克
捷克斯洛伐克，1962 **52**

第 5 届国际数学奥林匹克
波兰，1963 **79**

第 6 届国际数学奥林匹克
苏联，1964 **93**

第 7 届国际数学奥林匹克
民主德国，1965 **106**

第 8 届国际数学奥林匹克
保加利亚，1966 **124**

第 9 届国际数学奥林匹克
南斯拉夫，1967 **134**

第 10 届国际数学奥林匹克 苏联，1968 147
第 11 届国际数学奥林匹克 罗马尼亚，1969 159
第 12 届国际数学奥林匹克 匈牙利，1970 170
第 13 届国际数学奥林匹克 捷克斯洛伐克，1971 182
第 14 届国际数学奥林匹克 波兰，1972 195
第 15 届国际数学奥林匹克 苏联，1973 202
第 16 届国际数学奥林匹克 民主德国，1974 217
第 17 届国际数学奥林匹克 保加利亚，1975 229
第 18 届国际数学奥林匹克 奥地利，1976 247
第 19 届国际数学奥林匹克 南斯拉夫，1977 265
第 20 届国际数学奥林匹克 罗马尼亚，1978 279
第 21 届国际数学奥林匹克 英国，1979 320
第 22 届国际数学奥林匹克 美国，1981 356



牛顿(Isaac Newton,1642-1727)



莱布尼茨
(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)

第 23 届国际数学奥林匹克
匈牙利，1982 371

第 24 届国际数学奥林匹克
法国，1983 383

第 25 届国际数学奥林匹克
捷克斯洛伐克，1984 391

第 26 届国际数学奥林匹克
芬兰，1985 406

第 27 届国际数学奥林匹克
波兰，1986 418

第 28 届国际数学奥林匹克
古巴，1987 425

第 29 届国际数学奥林匹克
澳大利亚，1988 434

第 30 届国际数学奥林匹克
联邦德国，1989 459

第 31 届国际数学奥林匹克
中国，1990 471

第 32 届国际数学奥林匹克
瑞典，1991 494

第 33 届国际数学奥林匹克
俄罗斯，1992 502

第 34 届国际数学奥林匹克
土耳其，1993 529

第 35 届国际数学奥林匹克
中国香港，1994 545

第 36 届国际数学奥林匹克 加拿大，1995 559

第 37 届国际数学奥林匹克 印度，1996 575

第 38 届国际数学奥林匹克 阿根廷，1997 585

第 39 届国际数学奥林匹克 中国台湾，1998 599

第 40 届国际数学奥林匹克 罗马尼亚，1999 621

第 41 届国际数学奥林匹克 韩国，2000 629

第 42 届国际数学奥林匹克 美国，2001 639

第 43 届国际数学奥林匹克 英国，2002 662

第 44 届国际数学奥林匹克 日本，2003 674

第 45 届国际数学奥林匹克 希腊，2004 680

第 46 届国际数学奥林匹克 墨西哥，2005 694

参考文献 707

后记 711



欧拉(Léonard Euler, 1707-1783)

第 1 届国际数学奥林匹克

罗马尼亚，1959

1 证明：分数$\frac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 皆不可约.

波兰命题

证法 1 对$\frac{21n+4}{14n+3}$作辗转相除法如下，即

$$\begin{array}{c|c:c|c} 1 & 21n+4 & 14n+3 & 2 \\ & 14n+3 & 14n+2 & \\ \hdashline & 7n+1 & 1 & \end{array}$$

由此可知，最后的余数为 1，即

$$(21n+4, 14n+3) = 1$$

所以分数$\frac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 皆不可约.

证法 2 假设$\frac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 可约，则因

$$\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3}$$

故$\frac{7n+1}{14n+3}$可约，从而它的倒数$\frac{14n+3}{7n+1}$可约.

类似地，又化假分数$\frac{14n+3}{7n+1}$为带分数，即

$$\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1}$$

于是$\frac{1}{7n+1}$亦必可约，但对任何自然数 n，真分数$\frac{1}{7n+1}$显然皆不可约，因此导致矛盾. 证毕.

证法 3 设 $21n+4$ 与 $14n+3$ 的最大公约数为 d，则

$$21n+4 = pd \qquad ①$$

$$14n+3 = qd \qquad ②$$

其中，p，q 皆为正整数.

由 ①，② 消去 n 并整理，得

$$(3q-2p)d = 1 \qquad ③$$

分析 显然，对任何自然数 n，关于 n 的一次式 $21n+4$，$14n+3$ 皆为正整数，并且 $21n+4 > 14n+3$，从而$\frac{21n+4}{14n+3}$表示一系列的假分数.

欲证分数$\frac{21n+4}{14n+3}$不可约，即证 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互素，也就是证其最大公约数

$(21n+4, 14n+3) = 1$

而两正数是否互素的判别及最大公约数的求法，又可直接利用辗转相除法实现，因此得知本题的一般证法.

此外，如下述的证法 3，先设其最大公约数为 d，再证 $d = 1$ 亦可.

由于 p,q 皆为正整数,所以 $3q-2p$ 为整数.因此,要③成立,必须正整数 $d=1$.证毕.

2 对于 x 的哪些实数值,下列等式成立:

(1) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$;

(2) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$;

(3) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$.

这里根式仅表算术根.

罗马尼亚命题

解法 1 将等式左边用 y 表示,因 $x\geqslant\frac{1}{2}$,故可作如下变形:

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}})=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2+2\sqrt{2x-1}+1}+$$
$$\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2-2\sqrt{2x-1}+1})=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2})=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}((\sqrt{2x-1}+1)+|\sqrt{2x-1}-1|)$$

为去绝对值符号,下面分两种情况讨论.

i 若 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$,则有

$$1\leqslant 2x\leqslant 2,0\leqslant 2x-1\leqslant 1,0\leqslant\sqrt{2x-1}\leqslant 1$$

此时

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}((\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1}))=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}$$

ii 若 $x>1$,则有

$$2x>2,2x-1>1,\sqrt{2x-1}>1$$

此时

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}((\sqrt{2x-1}+1)+\sqrt{2x-1}-1)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}$$

总之,我们得到:

(1) 当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时,等式

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

分析 由题设知,$x\geqslant\frac{1}{2}$ 是研究问题的前提,否则,二次根号下将出现负值.

在 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 的许可值范围内,可以对函数

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

进行讨论得到答案,或按根式方程求解.

由于函数表达式是含有两层根号的复合二次根式,首先考虑化简函数式是必要的.

成立；

(2) 因为在 $x \geqslant \frac{1}{2}$ 的定义域内，函数 y 的值不小于 $\sqrt{2}$，故对 x 的任何实数值，等式

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$$

都不能成立；

(3) 当 $x>1$ 时，原等式变为

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2$$

解得

$$x=\frac{3}{2}$$

即当 $x=\frac{3}{2}$ 时，等式

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$$

成立.

解法2 因 $\sqrt{2x-1}$ 是实数，故 $x \geqslant \frac{1}{2}$. 设

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=p$$

整理得

$$x+|x-1|=\frac{p^2}{2} \quad ①$$

i 若 $p=\sqrt{2}$，则

$$x+|x-1|=1 \quad ②$$

当 $x>1$ 时，式②不可能成立；当 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ 时，式②恒成立.

ii 若 $p=1$，则

$$x+|x-1|=\frac{1}{2} \quad ③$$

无论 x 为何实数，式③均不成立.

iii 若 $p=2$，则

$$x+|x-1|=2 \quad ④$$

此时 x 必大于1，故式④可写成

$$2x-1=2$$

解得 $x=\frac{3}{2}$.

因此本题解为

(1) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ 时

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

(2) 对任何实数 x，都不能使

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$$

成立;

(3) 当 $x=\frac{3}{2}$ 时,等式

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$$

成立.

解法 3 设 $x-\sqrt{2x-1}$ 的平方根为$\sqrt{s}-\sqrt{t}$,则

$$x-\sqrt{2x-1}=s+t-2\sqrt{st}$$

所以 $$s+t=x,4st=2x-1$$

解之并把 s,t 值代入得

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mid\sqrt{2x-1}-1\mid$$

同样可得 $$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1)$$

令 $$y=\frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2x-1}+1)+\mid\sqrt{2x-1}-1\mid)$$

因$\sqrt{2x-1}$取非负实数值,故 $x\geqslant\frac{1}{2}$.我们分别考虑以下两种情形.

ⅰ $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.这时

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1}))=\sqrt{2}$$

ⅱ $1<x<\infty$.这时

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1))=\sqrt{2}\sqrt{2x-1}$$

综合 ⅰ,ⅱ 的结果,给出本题的解答如下.

(1) 当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时,$y=\sqrt{2}$ 成立;

(2) 没有 x 的值能满足 $y=1$,因为 y 的最小值是$\sqrt{2}$;

(3) 当$\sqrt{2}\sqrt{2x-1}=2$时,即 $x=\frac{3}{2}$ 时,$y=2$ 成立.

3 设 $\cos x$(实数)满足二次方程

$$a\cdot\cos^2x+b\cdot\cos x+c=0$$

其中 a,b,c 是实数,求 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程.在 $a=4,b=2$ 和 $c=-1$ 的情况下,将此二次方程进行比较.

匈牙利命题

解法 1 将题设方程

$$a\cdot\cos^2x+b\cdot\cos x+c=0 \quad ①$$

变形,即

$$a \cdot \cos^2 x + c = -b \cdot \cos x \quad ②$$

②^2 × 4,并整理得

$$a^2(2\cos^2 x)^2 + (4ac - 2b^2)2\cos^2 x + 4c^2 = 0 \quad ③$$

将 $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$ 代入 ③,得

$$a^2(\cos 2x + 1)^2 + (4ac - 2b^2)(\cos 2x + 1) + 4c^2 = 0$$

$$a^2 \cdot \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = 0 \quad ④$$

显然,④ 是要求的 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程.

将 $a = 4, b = 2$ 和 $c = -1$ 代入 ①,得

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \quad ⑤$$

代入 ④,得

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \quad ⑥$$

⑤ 与 ⑥ 比较易知:在该种情况下,它们都是系数完全相同的一元二次方程,只不过一个以 $\cos x$ 为元,另一个则以 $\cos 2x$ 为元.

解法 2 根据韦达(Vieta)定理,题设方程两根有如下关系,即

$$\cos x_1 + \cos x_2 = -\frac{b}{a},\ \cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1 + \cos 2x_2 &= 2(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 - 1) = \\ &2((\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 2\cos x_1 \cdot \cos x_2 - 1) = \\ &2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} - 1\right) = \\ &\frac{-(2a^2 + 4ac - 2b^2)}{a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1 \cdot \cos 2x_2 &= (2\cos^2 x_1 - 1)(2\cos^2 x_2 - 1) = \\ &4(\cos x_1 \cdot \cos x_2)^2 - 2(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2) + 1 = \\ &4\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}\right) + 1 = \\ &\frac{a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2}{a^2}\end{aligned}$$

因此,要求的 $\cos 2x$ 所满足的二次方程为

$$a^2 \cdot \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = 0$$

关于题设方程与所求方程的比较,同解法 1.

4 试作一直角三角形,其斜边 c 给定,且使 c 边上的中线为二直角边的几何中项.

匈牙利命题

解法 1 由分析得到如下的作法(图 1.2).

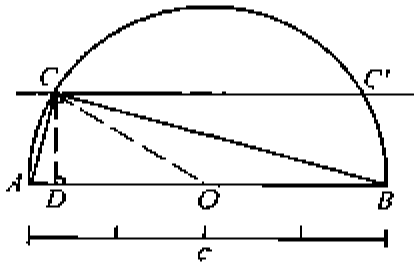


图 1.2

1) 作线段 $AB = c$(已知的);

2) 以 AB 为直径作圆 O;

3) 作直线 $CC' \parallel AB$,使 CC' 与AB 的距离为$\frac{c}{4}$,CC' 与圆O 交于 C,C';

4) 连结 AC,BC(或 AC',BC'),则 $\triangle ABC$(或 $\triangle ABC'$) 即为所求.

事实上,由 1),2) 可知 $\triangle ABC$ 显然是斜边为c 的直角三角形;接下来只须证明"Rt$\triangle ABC$ 斜边上的中线为二直角边的几何中项" 即可.

连结 OC,则 $OC = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$;又过 C 作$CD \perp AB$,D 为垂足,则由 3) 知 $CD = \frac{c}{4}$. 于是,我们有

$$OC^2 = (\frac{c}{2})^2 = \frac{c}{4} \cdot c = CD \cdot AB = AC \cdot BC$$

对作图无误的证明至此结束.

解法 2 用代数法作图. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,斜边 $AB = c$,斜边上的中线 $OC = \frac{c}{2}$ 为已知,设 $AC = t$,$BC = u$,如图 1.3 所示,则有

$$tu = (\frac{c}{2})^2 \quad ①$$

$$t^2 + u^2 = c^2 \quad ②$$

2 × ① + ② 可得 $\quad (t + u)^2 = \frac{3}{2}c^2$

两边开平方取正值,得

$$t + u = \frac{\sqrt{6}}{2}c \quad ③$$

①,③ 联立,t,u 分别是一元二次方程

$$x^2 - (\frac{\sqrt{6}}{2}c)x + (\frac{c}{2})^2 = 0 \quad ④$$

的两个根. 显然,④ 有二正实根. 因此问题归结为一元二次方程 ④ 的根的作图,而这是完全可能的(作法见"注").

分析 求作的是一直角三角形,因斜边 c 已知,故问题在于确定第三顶点 C(即直角顶点).

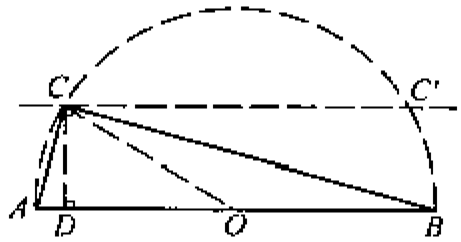


图 1.1

本题解法不只一种,这里着重分析一种作法.

设图已完成,即 Rt$\triangle ABC$ 符合要求,如图1.1 所示,易知点 C 在以 AB ($AB = c$) 为直径的圆 O 的圆周上. 为进一步弄清点 C 的确切位置,作斜边 AB 上的中线 OC($OC = \frac{c}{2}$) 和高 CD,则

$$(\frac{c}{2})^2 = AC \cdot BC$$

$$AC \cdot BC = c \cdot CD$$

所以 $CD = \frac{c}{4}$,即点 C 又在平行于 AB 并与 AB 相距$\frac{c}{4}$ 的直线 CC' 上. 因此,直角三角形的直角顶点就是圆 O 与直线 CC' 的交点.

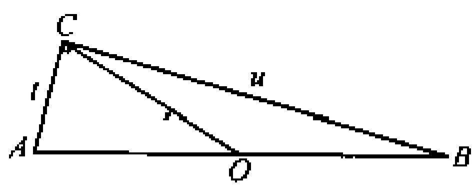


图 1.3

如果由①,③,具体算出

$$t(u)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}c=c\cdot\cos 15^\circ$$

$$u(t)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c=c\cdot\sin 15^\circ$$

也可先利用代数法,直接作出线段$\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}c$,或根据角的特别值作出15°角或75°角,从而最后完成斜边为c的直角三角形的作图.

注 (1) 作图题根据所求图形位置的要求不同可分为两大类.

第一类,如果求作的图形必须作在指定的位置,则称这类作图为定位作图.例如,"过已知直线外一已知点作已知直线的平行线"就是定位作图.

第二类,如果对于所求图形的位置没有硬性的限制,这种作图叫活位作图.例如,"在定圆中作内接正方形","已知边长作正三角形"等都是活位作图.

按一定方法把作图题所求图形作出的过程,叫做解作图题.凡定位作图,能作出多少个适合条件的图形,就说有多少个"解";在活位作图里,若适合条件的图形彼此合同(通俗地说就是全等),则不论能作出多少个都称为一"解",不合同的才算不同的解.无论哪类作图,当所求图形不存在时,便说这个作图题"无解".

由此可知,本题作图属活位作图,不仅有解,而且适合条件的图形彼此合同,故为一解.

(2) 关于一元二次方程的根的作图问题.

设

$$x^2-px+qr=0 \quad ⑤$$

($p,q,r>0$,且$p^2\geqslant 4qr$)的两根为x_1和x_2,则

$$x_1+x_2=p,x_1x_2=qr$$

1) 自平面上任一点O_0引二射线O_0X与O_0Y,如图1.4所示;

2) 在O_0X上截$O_0P=\frac{1}{2}p$,在O_0Y上截取$O_0Q=q$,$O_0R=r$;

3) 过P引O_0X的垂线PO',作QR的中垂线MO',O'为此二直线的交点;

4) 以O'为圆心,$O'Q(O'Q=O'R)$为半径作圆O',设圆O'与O_0X交于X_1与X_2两点,则O_0X_1,O_0X_2即为所求的两根.

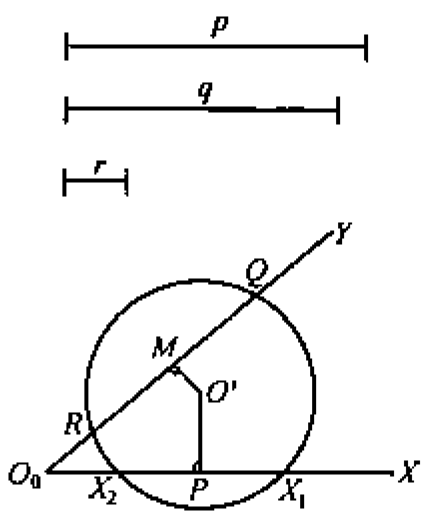


图1.4

这是因为根据作法,我们有

$$O_0X_1+O_0X_2=2O_0P=2\cdot\frac{1}{2}p=p$$

$$O_0X_1\cdot O_0X_2=O_0Q\cdot O_0R=qr$$

将⑤与④比较,易知

$$p=\frac{\sqrt{6}}{2}c,q=r=\frac{c}{2}$$

对于$p=\frac{\sqrt{6}}{2}c$来说,根据勾股定理或比例中项,显然可以作出该线段;

对于 $q=r=\frac{c}{2}$ 来说，只不过 Q,R,M 三点重合罢了，所作出的图 1.4 仍然有效.

(3) 上面所列举的解法，都与作出某线段有关，如斜边上的高，两条直角边等等. 现在，我们再介绍"通过确定某角的大小来解决作图问题"，当然，这就涉及三角知识了.

设所求的 Rt$\triangle ABC$ 已作出，如图 1.5 所示，则有

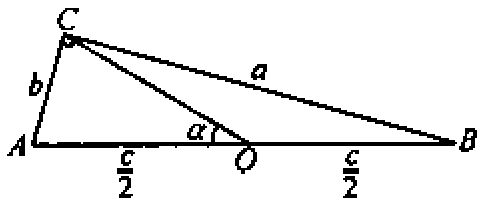


图 1.5

$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}ab=\frac{c^2}{16}$$

又因 $$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin\alpha=\frac{c^2}{8}\sin\alpha$$

所以 $$\frac{c^2}{8}\sin\alpha=\frac{c^2}{16},\sin\alpha=\frac{1}{2},\alpha=30^\circ(\text{或 }150^\circ)$$

由此得到如下作法.

1) 作角 $\alpha=30^\circ$(或 150°)；

2) 以 α 为顶角，$\frac{c}{2}$ 为腰作等腰 $\triangle AOC$(或 $\triangle BOC$)；

3) 延长 AO 至 B(或 BO 至 A)，使 $BO=AO$；

4) 连结 BC(或 AC)，则 $\triangle ABC$ 即为所求.

事实上，由作法易知

$$\angle ACO=75^\circ,\angle BCO=15^\circ$$

因而 $$\angle ACB=\angle ACO+\angle BCO=75^\circ+15^\circ=90^\circ$$

又斜边 $AB=AO+OB=c$，并且

$$ab=2S_{\triangle ABC}=2\cdot 2S_{\triangle OAC}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\sin 30^\circ=\frac{c^2}{4}=(\frac{c}{2})^2$$

于是，证明了作图的正确性.

罗马尼亚命题

5 在一平面内的线段 AB 上，任选一内点 M，然后在直线 AB 的同一侧，分别以 AM 和 MB 为边作正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$. 这两正方形的外接圆依次为圆 P 和圆 Q，它们除相交于点 M 外，还在另一点 N 相交.

(1) 证明：直线 AF 和 BC 都通过点 N.

(2) 证明：不论线段 AB 上的点 M 怎样选取，直线 MN 总通过一固定点 R.

(3) 当点 M 在线段 AB 上变动时，确定线段 PQ 的中点的轨迹.

解法 1 建立平面直角坐标系，如图 1.6 所示. $A(0,0)$，$B(b,0)$ 为已知，设点 M 的坐标为 $(m,0)$，参变数坐标 m 随点 M 在 AB 上变动而在 0 与 b 之间变化.

(1) 因为 $AMCD$ 和 $MBEF$ 都是正方形，所以它们中心的坐标依次为 $P(\frac{m}{2},\frac{m}{2})$ 和 $Q(\frac{b+m}{2},\frac{b-m}{2})$. 于是，圆 P 和圆 Q 的方程分

别为

$$(x-\frac{m}{2})^2+(y-\frac{m}{2})^2=\frac{m^2}{2}$$

即

$$x^2+y^2-mx-my=0 \quad ①$$

$$(x-\frac{b+m}{2})^2+(y-\frac{b-m}{2})^2=\frac{(b-m)^2}{2}$$

即

$$x^2+y^2-(b+m)x-(b-m)y+bm=0 \quad ②$$

① - ② 得

$$bx+(b-2m)y-bm=0 \quad ③$$

易知 ③ 为通过两圆交点的直线 MN 的方程.

由 ③ 解出且 x 用 y 表示,并将结果代入 ①,整理后得到

$$(2b^2-4bm+4m^2)y^2-2bm(b-m)y=0$$

解此方程,得

$$y_1=0,y_2=\frac{bm(b-m)}{b^2-2bm+2m^2}$$

将 y 的值代入 ③,求得 x 的对应值为

$$x_1=m,x_2=\frac{bm^2}{b^2-2bm+2m^2}$$

其中,(x_1,y_1) 为点 M 的坐标,而(x_2,y_2) 则是点 N 的坐标.

又通过 $A(0,0)$,$F(m,b-m)$ 两点的直线方程为

$$(b-m)x-my=0 \quad ④$$

通过 $B(b,0)$,$C(m,n)$ 两点的直线方程为

$$mx+(b-m)y-bm=0 \quad ⑤$$

容易验算,(x_2,y_2) 既满足 ④,又满足 ⑤,所以直线 AF 和 BC 都通过点 N.

(2) 将直线 MN 的方程 ③ 按 m 集项整理,得

$$m(2y+b)=b(x+y) \quad ⑥$$

因为 b 是不等于零(否则 A 与 B 重合)的给定常数,故当

$$2y+b=x+y=0 \quad ⑦$$

时,对 m 的任意实数值 ⑥ 皆成立.

由 ⑦ 得 $x=\frac{b}{2}$,$y=-\frac{b}{2}$,这就是固定点 R 的坐标,如图 1.7 所示.所以,不论线段 AB 上的点 M 怎样选取,直线 MN 总通过一固定点 $R(\frac{b}{2},-\frac{b}{2})$.

(3) 根据 $P(\frac{m}{2},\frac{m}{2})$ 和 $Q(\frac{b+m}{2},\frac{b-m}{2})$,可求出 PQ 中点的坐标

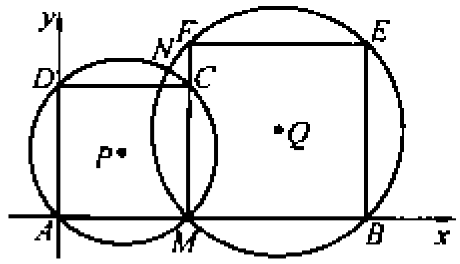


图 1.6

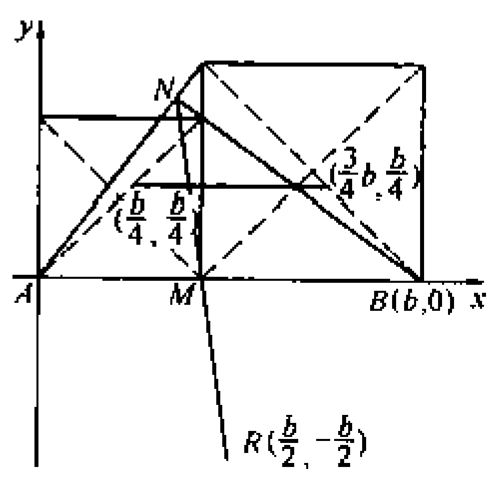


图 1.7

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{b+m}{2}\right)=\frac{b+2m}{4},y=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{b-m}{2}\right)=\frac{b}{4}$$

由此可知，当 m 在 0 至 b 的区间内变化时，PQ 中点的轨迹是在点$\left(\frac{b}{4},\frac{b}{4}\right)$至$\left(\frac{3b}{4},\frac{b}{4}\right)$之间的线段，线段的两个端点是轨迹的极限点；此线段平行于 AB，与 AB 相距$\frac{b}{4}$，长为$\frac{b}{2}$，如图 1.7 所示.

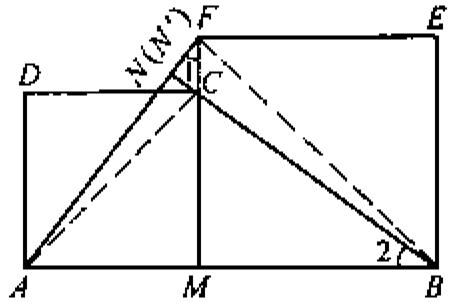


图 1.8

解法 2 这里用纯几何的方法来解决.

(1) 假定直线 AF 和 BC 相交于点 N'，如图 1.8 所示. 在 Rt△AMF 与 Rt△CMB 中，因为

$$AM=CM,MF=MB$$

所以

$$Rt\triangle AMF\cong Rt\triangle CMB$$

所以 $\angle 1=\angle 2$，所以 B,M,N',F 四点共圆 Q'.

连结 BF，则由 $\angle BMF=90°$ 知圆 Q' 的直径为 BF，因而圆 Q' 即正方形 $MBEF$ 的外接圆圆 Q，所以点 N' 在圆 Q 上.

同理可证，点 N' 也在圆 P 上. 故 N' 是除交点 M 外，圆 P 与圆 Q 的另一交点，因而 N' 与 N 重合. 这就证明了直线 AF 和 BC 都通过点 N.

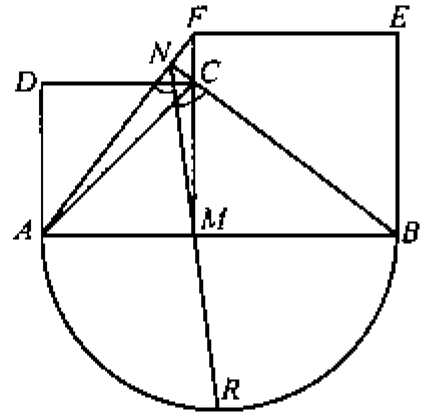


图 1.9

(2) 由(1)已证知 $\angle ANB=90°$，如图 1.8 所示，故点 N 在以已知线段 AB 为直径的定圆上，设此圆为圆 O.

又连结 AC，则 $\angle ANM=\angle ACM=45°$，因而 $\angle BNM=45°$，即 MN 平分 $\angle ANB$. 所以，直线 MN 必通过圆 O 在 AB 另一侧的半圆弧的中点 R，如图 1.9 所示.

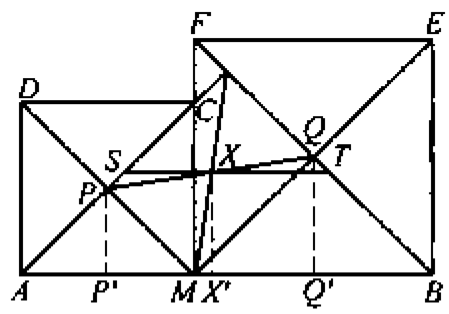


图 1.10

(3) 设 X 是适合于条件的点，在 AB 上分别作出 P,X,Q 的射影，如图 1.10 所示，则在直角梯形 $PP'Q'Q$ 中，有

$$XX'=\frac{1}{2}(PP'+QQ')=\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{2}+\frac{BE}{2}\right)=\frac{1}{4}AB$$

为定值.

过点 X 作 $ST\,/\!/\,AB$，分别与直线 AC,BF 交于 S,T，则线段 ST 即为所求的轨迹(充要性证明从略). 这里，当 X 与端点 S(或 T)重合时，正方形 $AMCD$(或 $MBEF$)退缩为点 A(或 B).

注 (1) 在解法 1 中，证明问题(2)时，先将

$$bx+(b-2m)y-bm=0 \qquad ③$$

变形，按 m 集项整理为

$$m(2y+b)=b(x+y) \qquad ⑥$$

从而很快获得解答.

若不如此处理，由 ③ 就不便回答"x,y 为何实数时，对 m 的任意实数值 ③ 皆成立"这一问题. 可见，将 ③ 按 m 集项变形是一个解题技巧，应灵活运

用.

(2) 关于"同一法".在解法2中,对于问题(1),是将要证的"直线 AF 和 BC 都通过点 N"变为"AF 与 BC 的交点 N' 与 N 重合"进行推证的,这就是同一法.此法有时颇有用处,当欲证某图形具有某种特性而不易直接证明时,使用此法往往可以克服这个困难.

我们知道,任何命题都有和它等效的命题.因此,要证某个命题成立,可先斟酌一下,或直接从原题入手,或间接从它的等效命题入手.由于这两方面的不同,证明的方法便分为直接与间接两种.

有的命题,往往不易甚至不能从原题直接证明,这时不妨改为证明它的等效命题成立,结果也能间接地达到目的.这样的证明方法,叫做间接证法.

间接证法又分为反证法和同一法两种.在同一法则(对于两个互逆命题,当知其一成立时,立即知道另一也成立,这个道理叫做同一法则)下证明原定理的逆命题成立的一种方法,叫做同一法.具体的做法是作出一个具有所说的特性的图形,然后证明所作的与题说的相同.

(3) 在解法2中,采用了同一法对有关问题进行了证明,但具体的做法细节是各种各样的,例如解法3的证明又是一种.这就是说,本题的证明,使用间接证法中的同一法比较方便.

如图1.11所示,连结 MPD,MN,BC,CN,BQF.在圆 P 内,有

$$\angle MNC = \angle MDC = 45°$$

在圆 Q 内,有

$$\angle MNB = \angle MFB = 45°$$

所以 $\angle MNC = \angle MNB$,因此 NC 与 NB 为同一条直线.也就是说,直线 BC 通过点 N.

同理,直线 AF 也通过点 N.问题(1)至此证毕.

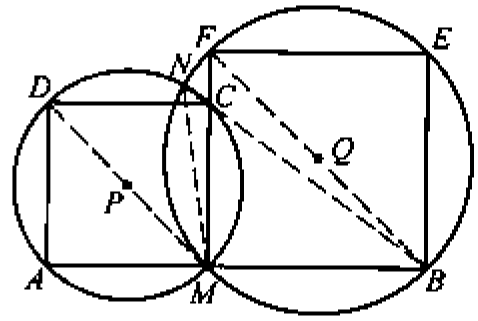


图1.11

下面,再利用同一法来证明问题(2).

在直线 AB 的另一侧(即两个正方形的异侧),以 AB 为斜边作等腰直角 $\triangle ABR$,如图1.12所示,且连结 APC,则有

$$\angle RAC = \angle RAB + \angle BAC = 45° + 45° = 90°$$

因此,RA 切圆 P 于 A.同理,RB 切圆 Q 于 B.

连结 RM,并延长 RM 与圆 P 交于 N_P,与圆 Q 交于 N_Q.这样就有

$$RA^2 = RM \cdot RN_P, RB^2 = RM \cdot RN_Q$$

但因 $RA = RB$,故

$$RM \cdot RN_P = RM \cdot RN_Q$$

即

$$RN_P = RN_Q$$

这就是说,N_P 与 N_Q 是同一点,即直线 RM 经过圆 P 与圆 Q 的另一交点 N.换言之,动直线 MN 总通过一定点 R.

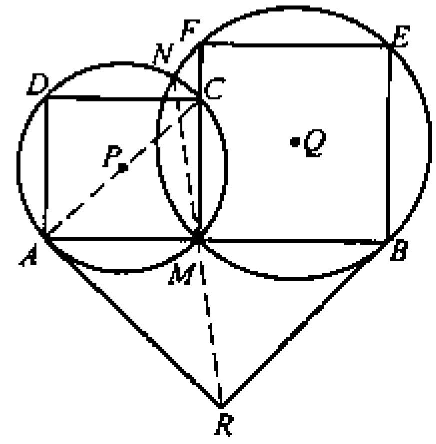


图1.12

解法3 (1) 作线段 AN,NF,BC 和 CN,如图1.13所示.

$\angle ANM$ 是劣弧 $\overset{\frown}{AM}$ 所对的圆周角,故为45°.

$\angle MNF$ 是优弧 $\overset{\frown}{MBF}$ 所对的圆周角,故为135°.所以

$$\angle ANF = \angle ANM + \angle MNF = 45° + 135° = 180°$$

故点 N 在 AF 上.

AC 是以 P 为圆心的圆的直径,故 $\angle ANC=90°$.又

$$\angle ANB=\angle ANM+\angle MNB=45°+45°=90°$$

故点 C 在 BN 上,即 AF 和 BC 的延长线相交于点 N.

(2) 以 AB 为直径在 AB 的另一侧作半圆.

因为 $\angle ANM=\angle MNB=45°$,故 MN 平分 $\angle ANB$,它的延长线平分半圆周于点 S.

不论 M 是 A,B 间的哪一点,S 总是半圆周 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,换言之,点 S 与点 M 的位置无关.

(3) 设 R 是 PQ 的中点,作 PP',QQ',RR' 垂直于 AB.因 RR' 是梯形 $P'Q'QP$ 的中位线,故

$$RR'=\frac{1}{2}(PP'+QQ')=\frac{1}{2}\left(\frac{AM+MB}{2}\right)=\frac{AB}{4}$$

可知,R 至 AB 的距离是定值.

当 M 和 A 重合时,P' 和 A 重合,$AQ'=\frac{AB}{2}$,$AR'=\frac{AB}{4}$.又当 M 和 B 重合时,Q' 和 B 重合,$P'B=\frac{AB}{2}$,$R'B=\frac{AB}{4}$.可知,当 M 在 A,B 间变动时,R 在长度等于 $\frac{AB}{2}$ 的线段上变动.

所以,所求的轨迹是长度等于 $\frac{AB}{2}$ 而平行于 AB 的线段,这线段和 AB 的距离为 $\frac{AB}{4}$ 且和两正方形在同一侧.

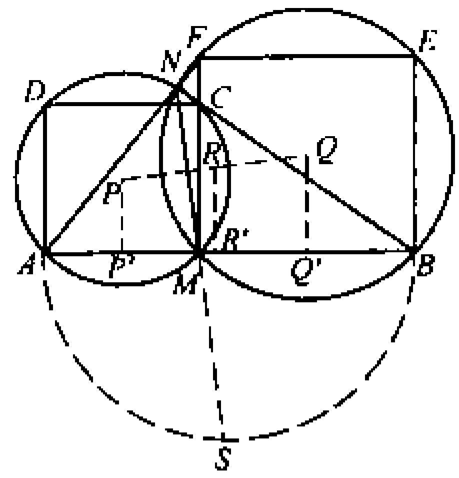


图 1.13

6 平面 P 与 Q 相交于直线 g,又在平面 P 与 Q 内分别给出不在直线 g 上的两点 A 和 C.求作一个以 AB 和 CD 为两底的等腰梯形 $ABCD$,使之能作一内切圆,并要求点 B 在平面 P 内,点 D 在平面 Q 内.

捷克斯洛伐克命题

分析 这是一个空间作图题.我们知道,立几问题一般都转化为平几问题,逐步加以解决.要完成作图,先要考虑作出梯形 $ABCD$ 所在的平面 AC,然后在平面 AC 内(图 1.14),再考虑能容内切圆的等腰梯形的作图.

解 由分析得到如下作法,如图 1.14 所示.

1) 分别在平面 P 及平面 Q 内,过点 A 作 $AB\parallel g$,过点 C 作 $CD\parallel g$;

2) 过两平行直线 AB 和 CD 作平面 AC;

3) 在平面 AC 内,过点 A 作直线 $AE\perp CD$ 于点 E;

4) 以 A 为圆心,CE 为半径,在平面 AC 内作弧,交直线 CD 于点 D,使 D 位于 CE 的延长线上;

5) 在射线 AB 上,截 $AB=CE-DE$;

6) 在平面 AC 内,连结 AD 与 BC,则平面四边形 $ABCD$ 符合所求.

我们来证明这一事实(图 1.14).由作法易知,点 B 和点 D 分

别在平面 P 和平面 Q 内，且 $AB \parallel CD$，故平面四边形 $ABCD$ 为梯形.

在平面 AC 上，过点 B 作 $BF \perp CD$ 于点 F，则 $AB = EF$，$AE = BF$. 于是，有

$$BC = \sqrt{BF^2 + CF^2} = \sqrt{AE^2 + (CE - EF)^2} = \sqrt{AE^2 + (CE - AB)^2} = \sqrt{AE^2 + DE^2}$$

又由作法 5) 知 $$CE - AB = DE$$

所以 $$\sqrt{AE^2 + DE^2} = AD$$

因此，梯形 $ABCD$ 是等腰梯形.

又因为

$$AD + BC = 2AD = 2CE = CE + (EF + CF) = CE + (AB + DE) = AB + (CE + DE) = AB + CD$$

所以等腰梯形 $ABCD$ 必有一内切圆. 事实上，以等腰梯形 $ABCD$ 的对称轴夹于两底间的线段为直径作圆，就是它的内切圆.

上面，对作图无误进行了论证. 这里再对作图进行讨论，由作法 4) 知，以点 A 为圆心，CE 为半径，在平面 AC 内作弧时有且仅有如下三种情况发生.

ⅰ $CE > AE$，弧线与直线 CD 有两个交点 D 和 D'，此时，不仅有解，且有两解，即两个全等的等腰梯形 $ABCD$ 和 $AB'CD'$，如图 1.15 所示.

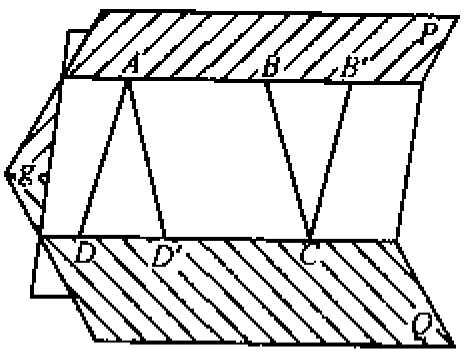


图 1.15

ⅱ $CE = AE$，弧线与直线 CD 相切. 此时，只有一解，即 AD 与 AE 重合，梯形变正方形.

ⅲ $CE < AE$，弧线与直线 CD 相离. 此时无解.

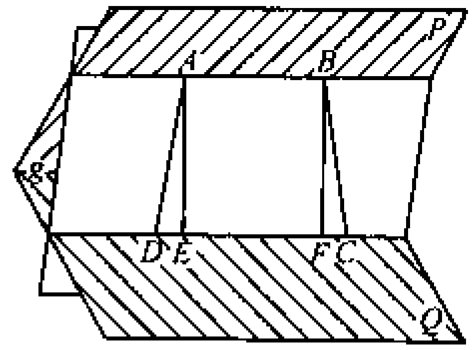


图 1.14

如何作出平面 AC? 因为 $AB \parallel CD$，且它们分别是平面 AC 与平面 P，平面 Q 的交线，所以有 $AB \parallel g \parallel CD$. 因此，在平面 P 内，过点 A 作直线 AB 平行于直线 g；在平面 Q 内，过点 C 作直线 CD 平行于直线 g；最后，过二平行线 AB 与 CD 即作出平面 AC.

在平面 AC 内，假定符合条件的等腰梯形 $ABCD$ 已作出，且不妨设 $AB < CD$，则有

$$AB + CD = AD + BC = 2AD \quad ①$$

为了确定点 D，过点 A 作 $AE \perp CD$，E 为垂足，如图 1.14 所示，因 A，C 为已知点，故 AE，CE 为定线段；又过 B 作 $BF \perp CD$，F 为垂足，则 $DE = CF$，$AB = EF$. 于是，有

$$AB + CD = EF + (DE + EF + CF) = 2(EF + CF) = 2CE \quad ②$$

比较 ①，②，知 $AD = CE$. 因此点 D 可定，整个梯形可作.

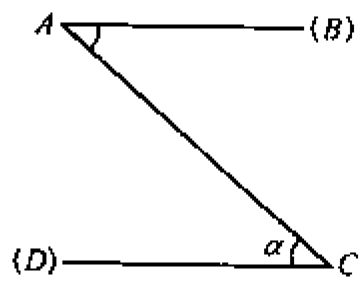


图 1.16

注 (1) 本题属定位作图，凡能作出多少个适合条件的图形，不论全等与否，就说有多少个"解"，这点与活位作图不同.

(2) 根据题目所给条件，A，C 都是定点，如图 1.16 所示，射线 $A(B)$，$C(D)$ 都有确定方向，因而角 α 也是确定的，所以作图能否完成，也是取决于角 α 的大小. 事实上，根据角 α 小于、等于、大于 45° 这三种情况进行讨论，其结果与上述一致.

第 2 届国际数学奥林匹克

罗马尼亚，1960

保加利亚命题

1 求出所有能被 11 整除的三位数，使所得的商等于该三位数各位数字的平方和.

解法 1 设该三位数为 $100a+10b+c$，其中 a,b,c 是各位数字.

现在，以 11 除此数，得

$$\frac{100a+10b+c}{11}=9a+b+\frac{a-b+c}{11}$$

由于 $0<a\leqslant 9,0\leqslant b,c\leqslant 9$，所以要使上式右边为整数只有如下两种情形.

i $a-b+c=0$.

依题设得

$$9a+b=a^2+b^2+c^2$$

以 $b=a+c$ 代入并写成关于 a 的二次方程，即

$$2a^2+2(c-5)a+2c^2-c=0 \quad ①$$

解得 $a=\dfrac{-2(c-5)\pm\sqrt{4(c-5)^2-4(4c^2-2c)}}{4}=$

$$\frac{5-c\pm\sqrt{-3c^2-8c+25}}{2}$$

若 $c=1$，则 a 是无理数；若 $c\geqslant 2$，则 a 不是实数；皆不合. 故 $c=0$，从而得 $a=5,b=5$.

所以所求的三位数是 550.

ii $a-b+c=11$.

依题设得

$$9a+b+1=a^2+b^2+c^2$$

以 $b=a+c-11$ 代入并写成关于 a 的二次方程，即

$$2a^2+2(c-16)a+2c^2-23c+131=0 \quad ②$$

解得 $a=\dfrac{16-c\pm\sqrt{-3c^2+14c-6}}{2}$

只有当 $c=3$ 时，a 是整数. 这时 $a=8,b=0$.

所以所求的三位数是 803.

解法 2 若一个数的奇位数字之和与偶位数字之和相等，或它的奇位数字之和与偶位数字之和的差是 11 的倍数，则这个数可被 11 整除.

现在所求的三位数 $100a+10b+c$ 可被 11 整除，可知或者 $a+c=b$，或者 $a+c-b=11$（因 $a+c\leqslant 18$）.

依题设

$$100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2) \qquad ③$$

以 $b=a+c$ 代入得

$$10a+c=2(a^2+ac+c^2)$$

故 c 是偶数.令 $c=2d$ 代入并写成 a 的二次方程，即

$$a^2+(2d-5)a+4d^2-d=0$$

这个二次方程的判别式是

$$\Delta=(2d-5)^2-4(4d^2-d)=-12d^2-16d+25$$

因 Δ 和 d 均不是负数，d 只可能等于 0. 从而得 $c=0,a=5,b=5$.

又以 $b=a+c-11$ 代入 ③，依解法 1 可求得 $c=3,a=8,b=0$.

故所求的三位数是 550 及 803，经验算证实无误.

❷ 问 x 取什么值时下面的不等式能成立：

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$$

匈牙利命题

解 原不等式当 $x=0$ 时没有意义，当 $x<-\frac{1}{2}$ 时根号内的数取负值，不合. 故可设 $x\neq 0$，且 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

以 $(1+\sqrt{1+2x})^2$ 乘不等式左边的分子、分母得

$$(1+\sqrt{1+2x})^2<2x+9 \qquad ①$$

令 $\sqrt{1+2x}=y$ 代入得

$$(1+y)^2<y^2+8$$

所以 $$y<\frac{7}{2}$$

代入 ① 得 $$1+2x<\frac{49}{4}$$

所以 $$x<\frac{45}{8}$$

故本题的解为 $$-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{45}{8},x\neq 0$$

③ 已知一 Rt△ABC 的斜边 $BC=a$ 被分成 n 等分，其中 n 是奇数. 用 α 表示从点 A 看包含 BC 中点的那一等分的视角，h 为斜边上的高. 求证

$$\tan\alpha=\frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

罗马尼亚命题

证法 1 如图 2.1 所示，设 $AD=h$ 为 BC 上的高，$AO=\frac{a}{2}$ 为 BC 上的中线，EF 为 BC 的 n 等分中含有点 O 的那一等分，则

$$EO=OF=\frac{a}{2n}$$

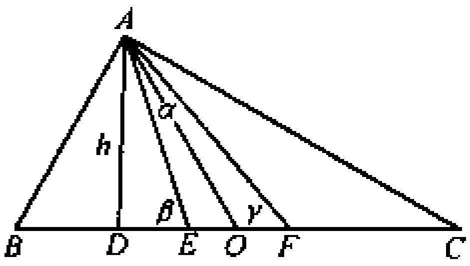


图 2.1

应用勾股定理得

$$DO=\sqrt{AO^2-AD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4h^2}$$

设 $\angle AEB=\beta$，$\angle AFB=\gamma$，则

$$\tan\beta=\frac{AD}{DE}=\frac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}-a}$$

$$\tan\gamma=\frac{AD}{DF}=\frac{2nh}{n\sqrt{a^2-4h^2}+a}$$

于是利用公式

$$\tan\alpha=\tan(\beta-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\cdot\tan\gamma}$$

得
$$\tan\alpha=\frac{4anh}{(n^2-1)a^2}=\frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

证法 2 以 p,q 分别表示 AE 和 AF 的长度. 应用余弦定理得

$$p^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4n^2}-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2n}\cdot\cos\angle AOE$$

$$q^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4n^2}-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2n}\cdot\cos\angle AOF$$

因为 $\cos\angle AOF=\cos(180^\circ-\angle AOE)=-\cos\angle AOE$，以上两式相加得

$$p^2+q^2=\frac{a^2(n^2+1)}{2n^2}$$

△AEF 的面积等于 $\frac{1}{2}EF\cdot h=ah/2n$，又等于 $\frac{1}{2}pq\cdot\sin\alpha$. 于是得

$$\sin\alpha=\frac{ah}{pqn}$$

又由余弦定理得

$$EF^2=(\frac{a}{n})^2=p^2+q^2-2pq\cdot\cos\alpha$$

所以 $$\cos\alpha=\frac{1}{2pq}(p^2+q^2-\frac{a^2}{n^2})=$$
$$\frac{1}{2pq}\left(\frac{a^2(n^2+1)}{2n^2}-\frac{a^2}{n^2}\right)=\frac{a^2(n^2-1)}{4pqn^2}$$

所以 $$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{ah}{pqn}\cdot\frac{4pqn^2}{(n^2-1)a^2}=\frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

证法3 如图2.2所示,设将斜边 n 等分的各分点依次设为 $D_1,D_2,\cdots,D_{n-1}$,由于 n 是奇数,显然含有斜边中点的等分线段为 $D_{\frac{n-1}{2}}D_{\frac{n+1}{2}}$,所以

$$\alpha=\angle D_{\frac{n-1}{2}}AD_{\frac{n+1}{2}}=\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}-\angle BAD_{\frac{n-1}{2}}$$

过 $D_{\frac{n-1}{2}},D_{\frac{n+1}{2}}$ 分别作

$$D_{\frac{n-1}{2}}E_{\frac{n-1}{2}}\perp AB,D_{\frac{n+1}{2}}E_{\frac{n+1}{2}}\perp AB$$

垂足为 $E_{\frac{n-1}{2}},E_{\frac{n+1}{2}}$.设 $AB=c,AC=b$,则

$$D_{\frac{n-1}{2}}E_{\frac{n-1}{2}}=\frac{\frac{n-1}{2}}{n}b=\frac{n-1}{2n}b$$

$$AE_{\frac{n-1}{2}}=(1-\frac{\frac{n-1}{2}}{n})c=\frac{n+1}{2n}c$$

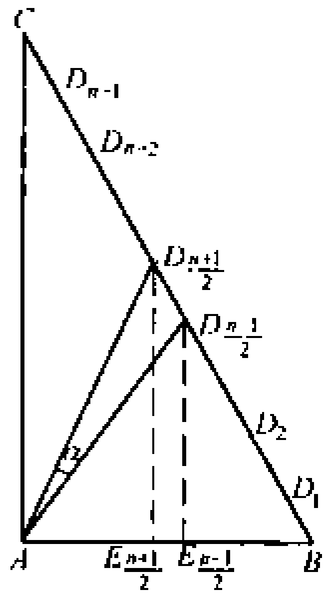


图2.2

所以 $$\tan\angle BAD_{\frac{n-1}{2}}=\frac{D_{\frac{n-1}{2}}E_{\frac{n-1}{2}}}{AE_{\frac{n-1}{2}}}=\frac{(n-1)b}{(n+1)c}$$

同样,可得

$$\tan\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}=\frac{(n+1)b}{(n-1)c}$$

所以 $\tan\alpha=\tan(\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}-\angle BAD_{\frac{n-1}{2}})=$

$$\frac{\tan\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}-\tan\angle BAD_{\frac{n-1}{2}}}{1+\tan\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}\cdot\tan\angle BAD_{\frac{n-1}{2}}}=$$

$$\frac{\frac{(n+1)b}{(n-1)c}-\frac{(n-1)b}{(n+1)c}}{1+\frac{(n+1)b}{(n-1)c}\cdot\frac{(n-1)b}{(n+1)c}}=\frac{4nbc}{(n^2-1)(b^2+c^2)}$$

在 Rt△ABC 中,有

$$b^2+c^2=a^2,bc=ah$$

代入得 $$\tan\alpha=\frac{4nah}{(n^2-1)a^2}$$

即 $$\tan\alpha=\frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

4 已知$\triangle ABC$中BC,AC二边上的高h_a,h_b及BC上中线AM的长度m_a.求作此三角形.

匈牙利命题

分析 假定$\triangle ABC$已作出,如图2.3所示,其中$AD=h_a$,$BE=h_b$,$AM=m_a$.显然,Rt$\triangle ADM$可先作出,问题是要确定点C(或B)的位置.

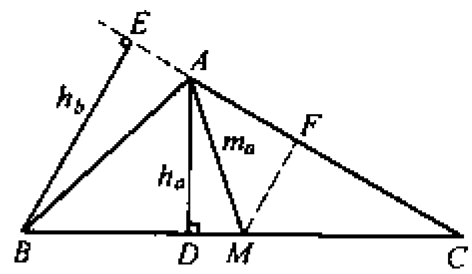


图2.3

作$MF\perp AC$,垂足为F,这时

$$\triangle CMF \backsim \triangle CBE$$

$$\frac{MF}{BE}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{2}$$

所以

$$MF=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}h_b$$

由此可作出点F,从而问题不难解决.

作法(图2.4)

1) 作Rt$\triangle ADM$,使$AD=h_a$,$AM=m_a$,$\angle ADM=90°$;

2) 以AM为直径作圆.再以M为圆心,$\frac{1}{2}h_b$为半径作圆.设两圆相交于点F;

3) 连结AF,并延长与DM所在直线相交于点C;

4) 在DM所在直线上截取$MB=MC$(点B与点C在点M的两侧),连结AB,则$\triangle ABC$即为所求作的三角形.

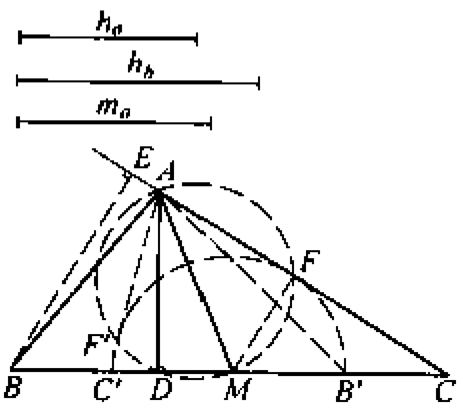


图2.4

证明 由作法1)可知$\triangle ABC$中BC边上的高$AD=h_a$.由作法4)可知点M是BC的中点,故BC边上的中线为AM,且$AM=m_a$.由作法2)知,$MF\perp AC$,$MF=\frac{1}{2}h_a$,作$BE\perp AC$,垂足为E,则由$\triangle CEB\backsim\triangle CFM$可得$\frac{BE}{MF}=\frac{BC}{MC}=2$,所以$BE=2MF=h_b$,即$AC$边上的高$BE=h_b$.

讨论 当$m_a>h_a$,$h_b<2m_a$时,作法2)中的两圆有两个交点F与F',这时有两解,如图2.4中的$\triangle ABC$与$\triangle AB'C'$.

当$m_a>h_a$,$h_b=2m_a$时,作法2)中两圆的交点F重合于点A,作$AC\perp AM$可得点C,这时只有一解,如图2.5所示;

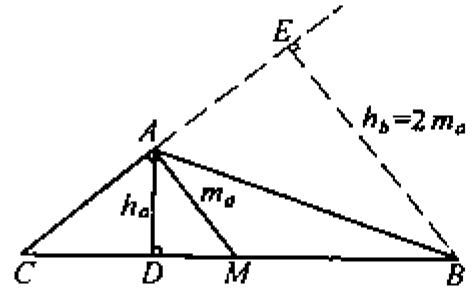


图2.5

当$m_a>h_a$,$h_b>2m_a$时无解;

当$m_a=h_a$时,AD与AM重合.这时若$h_b<2m_a$,有一解,$\triangle ABC$是等腰三角形,如图2.6所示.若$h_b\geq 2m_a$,无解;

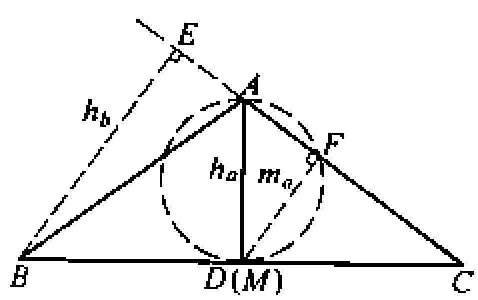


图2.6

当$m_a<h_a$时,无解.

捷克斯洛伐克命题

5 已知立方体 $ABCDA'B'C'D'$($ABCD$ 面和 $A'B'C'D'$ 面相对).

(1) 求线段 PQ 中点的轨迹,其中 P 是线段 AC 上的任意点,Q 是线段 $B'D'$ 上的任意点.

(2) 求 PQ 上点 R 的轨迹,其中 R 满足 $RQ = 2PR$.

解法 1 画出空间直角坐标系,如图 2.7 所示,并设该立方体各顶点的坐标为

$$A(1,0,0),B(1,1,0),C(0,1,0),D(0,0,0)$$
$$A'(1,0,1),B'(1,1,1),C'(0,1,1),D'(0,0,1)$$

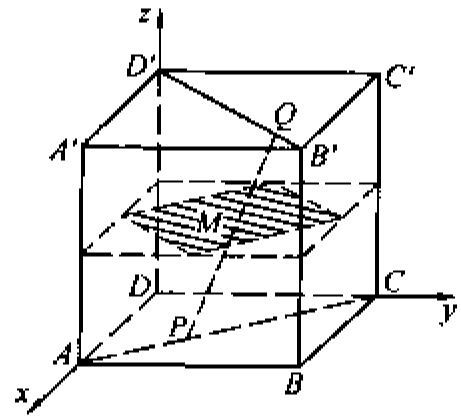


图 2.7

根据空间解析几何定理,若 $T(x,y,z)$ 是通过 $T_1(x_1,y_1,z_1)$,$T_2(x_2,y_2,z_2)$ 二点的直线上的任意点,则

$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$$
$$y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$$
$$z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2$$

其中,λ 是 $T_1T : T_1T_2$ 的比值.

设 P,Q 的坐标分别为 $(a,b,c),(a',b',c')$.依题设 P,Q 分别是 $AC,B'D'$ 上的点,故

$$a = (1-s)1 + s\cdot 0 = 1-s, a' = (1-t)1 + t\cdot 0 = 1-t$$
$$b = (1-s)0 + s\cdot 1 = s, b' = (1-t)1 + t\cdot 0 = 1-t$$
$$c = (1-s)0 + s\cdot 0 = 0, c' = (1-t)1 + t\cdot 1 = 1$$

这里比值 $0\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1$(因 P 在 A,C 之间,Q 在 B',D' 之间).

(1) 若 M 是 PQ 的中点,则 $\lambda = \frac{1}{2}$.故

$$x = (1-\lambda)a + \lambda a' = \frac{1}{2}(1-s) + \frac{1}{2}(1-t) = 1 - \frac{1}{2}(s+t)$$
$$y = (1-\lambda)b + \lambda b' = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}(1-t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(s-t)$$
$$z = (1-\lambda)c + \lambda c' = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

因 z 坐标是常数 $\frac{1}{2}$,故 M 是平面 $z = \frac{1}{2}$ 上的点.又因

$$x + y = 1 - \frac{1}{2}(s+t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(s-t) = \frac{3}{2} - t$$
$$x - y = 1 - \frac{1}{2}(s+t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(s-t) = \frac{1}{2} - s$$

故 $$\frac{1}{2}\leqslant x + y\leqslant\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\leqslant x - y\leqslant\frac{1}{2}$$

所以，所求的轨迹是由平面 $z=\frac{1}{2}$ 上的四条直线 $x+y=\frac{1}{2}$，$x+y=\frac{3}{2}$，$x-y=-\frac{1}{2}$ 及 $x-y=\frac{1}{2}$ 所围成的正方形区域，如图 2.8(a) 所示.

(2) 若 $R(x,y,z)$ 满足 $RQ=2PR$，则 $\lambda=PR:PQ=1:3$. 故

$$x=(1-\lambda)a+\lambda a'=\frac{2}{3}(1-s)+\frac{1}{3}(1-t)=1-\frac{2s+t}{3}$$

$$y=(1-\lambda)b+\lambda b'=\frac{2}{3}s+\frac{1}{3}(1-t)=\frac{1}{3}+\frac{2s-t}{3}$$

$$z=(1-\lambda)c+\lambda c'=\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

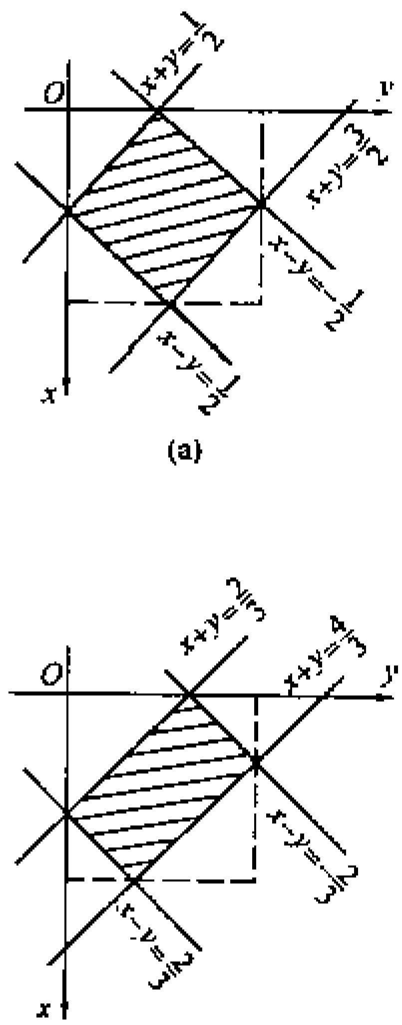
可知 R 是平面 $z=\frac{1}{3}$ 上的点，又因

$$x+y=1-\frac{2s+t}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2s-t}{3}=\frac{4}{3}-\frac{2t}{3}$$

$$x-y=1-\frac{2s+t}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2s-t}{3}=\frac{2}{3}-\frac{4s}{3}$$

故 $$\frac{2}{3}\leqslant x+y\leqslant\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\leqslant x-y\leqslant\frac{2}{3}$$

所以，所求的轨迹是由平面 $z=\frac{1}{3}$ 上的四条直线 $x+y=\frac{2}{3}$，$x+y=\frac{4}{3}$，$x-y=-\frac{2}{3}$ 及 $x-y=\frac{2}{3}$ 所围成的矩形区域，如图 2.8(b) 所示.



(a)

(b)

图 2.8

解法2 如图 2.9 所示，连结 AB'，AD'，CB'，CD'，取上述各线段之中点分别记为 E,H,F,G. 连结 EF,FG,GH,HE. 所得矩形 $EFGH$，即为所求的 XY 中点的轨迹.

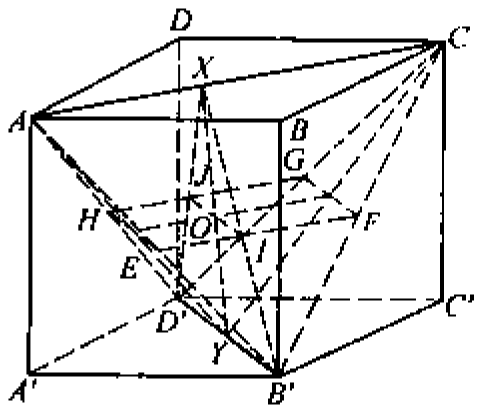


图 2.9

先证凡合条件的点均在矩形 $EFGH$ 上. 即任意 $X\in AC$，$Y\in B'D'$. XY 中点为 O，则点 O 在矩形 $EFGH$ 上.

连结 XB' 交 EF 于 I，连结 XD' 交 GH 于 J. 由作法，EF 是 $\triangle AB'C$ 的中位线，所以 I 为 XB' 中点；GH 是 $\triangle AD'C$ 的中位线，所以 J 为 XD' 中点. 连结 JI 交 XY 于 O，因 IJ 是 $\triangle XB'D'$ 的中位线，所以 O 为 XY 中点，$O\in IJ\subset$ 矩形 $EFGH$.

再证凡矩形 $EFGH$ 上的点都符合条件，即对任意 $O\in$ 矩形 $EFGH$，则 O 必为某 XY 线段的中点. 其中 X 在 AC 上，Y 在 $B'D'$ 上.

设 O 是矩形 $EFGH$ 中任一点，过 O 作 $IJ\,/\!/\,EH$，交 EF 于 I，交 GH 于 J.

连结 $B'I$ 延长交 AC 于 X，连结 $D'J$ 延长交 AC 于 X'. 由于 $EI=HJ$，所以 $AX=AX'$，即 X 与 X' 重合.

连结 XO 且延长交 $B'D'$ 于 Y. 因为 IJ 是 $\triangle XB'D'$ 的中位线,所以点 O 是 XY 的中点.

(2) 如图 2.10 所示,连结 AB', AD', CB', CD',在它们上分别取一点 E, F, G, H,使得 $B'E=2EA$, $B'F=2FC$, $D'G=2GC$, $D'H=2HA$. 连结 EF, FG, GH, HE 所得矩形 $EFGH$,即为所求点 Z 的轨迹.

证法与(1) 中完全类似,从略.

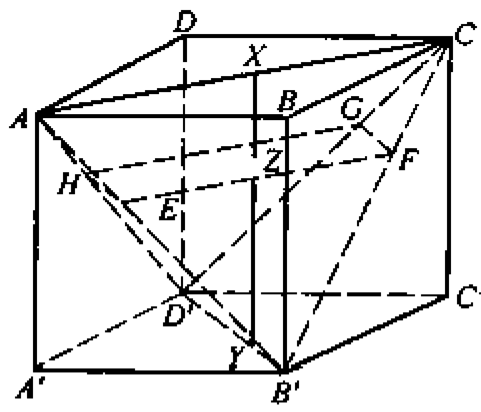


图 2.10

解法3 (1) 当 X 为 AC 的端点 A 或 C, Y 为 $B'D'$ 的端点 B' 或 D' 时,对应的线段 XY 分别是 AD', AB', CB', CD',设它们的中点分别为 E, F, G, H(图 2.11),它们是所求轨迹上的几个特殊点.

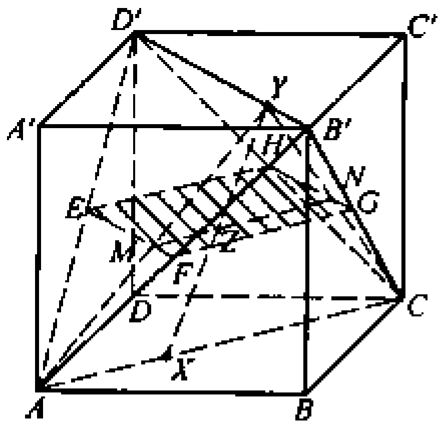


图 2.11

连结 EF, FG, GH, HE. 在 $\triangle AB'D'$ 中, $EF \parallel D'B'$, $EF=\frac{1}{2}D'B'$;在 $\triangle CB'D'$ 中, $HG \parallel D'B'$, $HG=\frac{1}{2}D'B'$. 故

$$EF \parallel HG \parallel D'B',EF=HG=\frac{1}{2}D'B'$$

同理可得

$$FG \parallel EH \parallel AC,FG=EH=\frac{1}{2}AC$$

又因 AC, $B'D'$ 所成的角为直角,所以四边形 $EFGH$ 是一个正方形,它的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$(a 表示正方体的棱长).

当 X 是 AC 上的任一点, Y 是 $B'D'$ 上的任一点时,线段 XY 的中点 Z 的轨迹就是上述正方形 $EFGH$ 的内部(包括边界). 下面我们来证明这个结论.

先证明任一这样的线段 XY 的中点 Z 在正方形 $EFGH$ 的内部(包括边界).

设 Y 是 $B'D'$ 上的任一点. 在平面 $AB'D'$ 上,连结 YA,与 EF 相交于点 M;在平面 $CB'D'$ 上,连结 YC,与 HG 相交于点 N. 在 $\triangle AB'D'$ 中,因为 $EF \parallel D'B'$, E 是 AD' 的中点,所以 M 是 YA 的中点;同理, N 是 YC 的中点. 因此, MN 是 $\triangle YAC$ 的中位线, Y 与 AC 上任一点 X 所连线段 XY 的中点 Z 必定在线段 MN 上. 并且 $MN \parallel AC$, $MN \parallel FG \parallel EH$,故线段 MN 上各点都在正方形 $EFGH$ 内部,从而点 Z 必定在正方形 $EFGH$ 的内部(当 X, Y 中有一点是 AC 或 $B'D'$ 的端点时,点 Z 在正方形 $EFGH$ 的边界上).

再证明正方形 $EFGH$ 内部(包括边界) 的任一点 Z,必定是某一线段 XY 的中点(X 在 AC 上, Y 在 $B'D'$ 上).

设 Z 是正方形 $EFGH$ 内的任一点,过点 Z 作 $MN \parallel FG$,与 EF, GH 分别相交于 M, N. 在平面 $AB'D'$ 上,连结 AM,与 $B'D'$ 相

交于点 Y，显然点 M 是 YA 的中点；连结 YC，必定通过点 N. 于是 MN 在平面 YAC 上，从而点 Z 在平面 YAC 上；连结 YZ 并延长必与 AC 相交，设交点为 X. 由 $MN // FG$ 可知 $MN // AC$，并且 M 是 YA 的中点，所以点 Z 必定是线段 XY 的中点.

由此可见，所求点 Z 的轨迹为正方形 $EFGH$ 的内部(包括边界)，这个正方形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

(2) 与(1)相仿，可得满足 $ZY = 2ZX$ 的动点 Z 的轨迹为矩形 $E'F'G'H'$ 的内部(包括边界)，如图2.12所示，其中 E', F', G', H' 分别在 AD', AB', CB', CD' 上，且

$$\frac{E'D'}{E'A} = \frac{F'B'}{F'A} = \frac{G'B'}{G'C} = \frac{H'D'}{H'C} = 2$$

这个矩形的边长分别为 $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ 与 $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

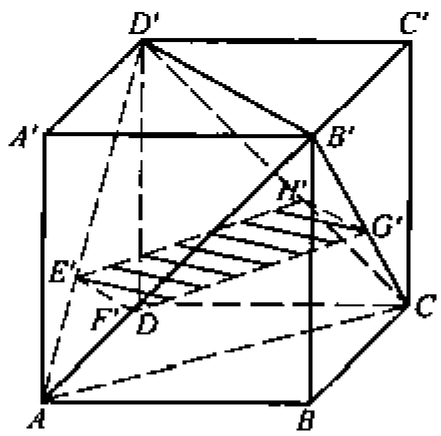


图 2.12

6 已知一个正圆锥及其内切球. 这个球内切于一个直圆柱. 圆锥和圆柱的底面在同一平面上. 用 V_1, V_2 分别表示圆锥和圆柱的体积.

(1) 求证：$V_1 \neq V_2$.

(2) 求出能使 $V_1 = kV_2$ 的最小 k 值，并作出在这种情形下圆锥的顶角.

保加利亚命题

解法1 设 $VM = h$ 为圆锥的高，r 为其底面的半径，s 为内切球的半径，O 为球心，如图2.13所示.

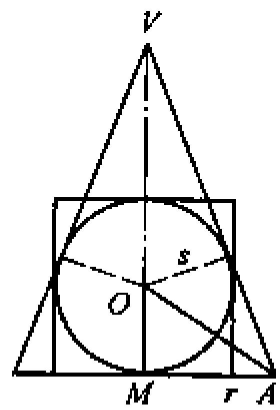


图 2.13

因 AM 和 AV 是自同一点 A 至球的切线，故 $\angle MAO = \angle OAV$，这个角记作 θ，于是得

$$s = r \cdot \tan\theta, h = r \cdot \tan 2\theta$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \tan 2\theta$$

$$V_2 = 2\pi s^3 = 2\pi r^3 \cdot \tan^3\theta$$

所以

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\tan 2\theta}{\tan^3\theta} = k \quad ①$$

(1) 因 $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{(1 - \tan^2\theta)}$，故①可化为 $\tan^2\theta$ 的二次方程如下，即

$$\tan^4\theta - \tan^2\theta + \frac{1}{3k} = 0 \quad ②$$

这个二次方程的判别式等于 $1 - \frac{4}{3k}$，此式只有当 $k \geq \frac{4}{3}$ 时才不会

取负值，故 $k \neq 1$，即 $V_1 \neq V_2$.

(2) 因②的判别式 $1-\frac{4}{3k}$ 的最小非负值为0，故所求的最小 k 值为 $\frac{4}{3}$. 因此若将 $k=\frac{4}{3}$ 代入②，得

$$\tan^2\theta = \frac{1}{2}$$

从而有

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

于是

$$\tan 2\theta = 6k\cdot\tan^3\theta = 8\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \frac{h}{r}$$

作一边长为 r 的正方形，这个正方形对角线长度的二倍等于 h，如图2.14所示.

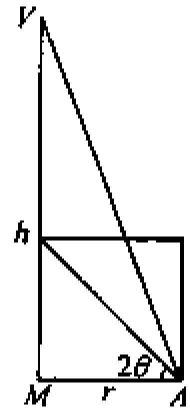


图2.14

以 r 和 h 为两股作 Rt△AMV，则 $\angle AVM$ 的二倍即是所求作的顶角.

解法2 设圆锥的底面半径为 r_1，高为 h，内切球半径为 r_2，如图2.15所示. $AD=BD=r_1$，$OD=OE=OF=r_2$，$CD=h$.

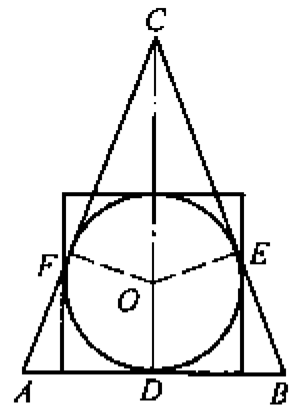


图2.15

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h \qquad ③$$

$$V_2 = 2\pi r_2^3 \qquad ④$$

因为 Rt△CDB ∽ Rt△CEO，所以

$$\frac{BD}{OE} = \frac{CB}{CO}$$

即

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{r_1^2+h^2}}{h-r_2}$$

$$r_1(h-r_2) = r_2\sqrt{r_1^2+h^2}$$

$$r_1^2(h-r_2)^2 = r_2^2(r_1^2+h^2)$$

$$r_1^2(h^2-2hr_2+r_2^2) = r_1^2r_2^2+r_2^2h^2$$

$$r_1^2h^2-2hr_1^2r_2 = r_2^2h^2$$

因为 $h\neq 0$，所以

$$r_1^2(h-2r_2) = r_2^2 h$$

因为 $h>2r_2$，即 $h-2r_2>0$，所以

$$r_1^2 = \frac{r_2^2 h}{h-2r_2}$$

代入式③得

$$V_1 = \frac{\pi r_2^2 h^2}{3(h-2r_2)} \qquad ⑤$$

(1) 用反证法. 假定可能有 $V_1=V_2$，即

$$\frac{V_1}{V_2}=1$$

将④,⑤代入上式,得

$$\frac{h^2}{6r_2(h-2r_2)}=1$$

即

$$h^2-6r_2h+12r_2^2=0 \quad ⑥$$

但是,对于任意正实数 h,r_2,恒有

$$h^2-6r_2h+12r_2^2=(h-3r_2)^2+3r_2^2>0$$

所以式⑥不可能成立,即不可能有 $V_1=V_2$.

(2) 设 $V_1=kV_2$,即

$$\frac{V_1}{V_2}=k$$

将④,⑤代入上式得

$$\frac{h^2}{6r_2(h-2r_2)}=k$$

即
$$h^2-6kr_2h+12kr_2^2=0$$

$$(\frac{h}{r_2})^2-6k(\frac{h}{r_2})+12k=0 \quad ⑦$$

把⑦看成关于$\frac{h}{r_2}$的方程,它有实数根的充要条件是

$$\Delta=4(9k^2-12k)\geqslant 0$$

即
$$k(3k-4)\geqslant 0$$

由于 $k=\frac{V_1}{V_2}>0$,故得

$$3k-4\geqslant 0, k\geqslant \frac{4}{3}$$

这就是说,能使 $V_1=kV_2$ 成立的最小值 $k=\frac{4}{3}$.

在这种情况下,即当 $k=\frac{4}{3}$ 时,式⑦为

$$(\frac{h}{r_2})^2-8(\frac{h}{r_2})+16=0$$

解得$\frac{h}{r_2}=4$,即 $h=4r_2$.

由此我们可按如下步骤作出这个圆锥轴截面的顶角,如图 2.16 所示.

i 任取一线段 r_2,作 $CD=4r_2$,并在 CD 上截取 $OD=r_2$;

ii 以 O 为圆心,r_2 为半径作圆;

iii 过点 C 作圆 O 的切线 CE, CF,则 $\angle ECF$ 就是当 $k=\frac{4}{3}$ 时圆锥轴截面的顶角.

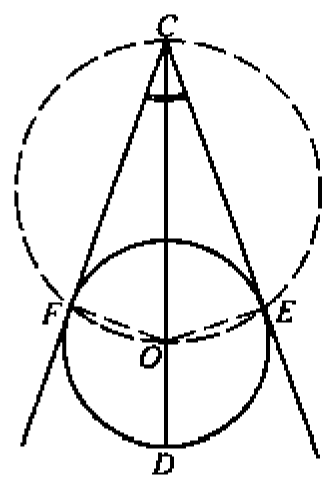


图 2.16

民主德国命题

7 已知等腰梯形的上下底为 a, b,高为 h.

(1) 在梯形的对称轴上作点 P,使得从 P 看任一腰的视角为直角.

(2) 求 P 与任一底的距离.

(3) 在怎样的条件下,可以作出点 P,试讨论各种可能情形.

解 如图2.17所示,设 MN 是梯形的对称轴, $CD = a$, $AB = b$, $MN = h$.从点 P 看 BC 的视角为直角,并以 d 表示 MP.因为

$$\angle CPM = 90^\circ - \angle BPN = \angle PBN$$

故
$$\mathrm{Rt}\triangle CPM \backsim \mathrm{Rt}\triangle PBN$$

所以
$$MP : NB = MC : NP$$

即
$$d : \frac{b}{2} = \frac{a}{2} : (h - d)$$

以上比例式可化为 d 的二次方程,即

$$d^2 - hd + \frac{ab}{4} = 0 \quad ①$$

解得
$$d = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - ab}$$

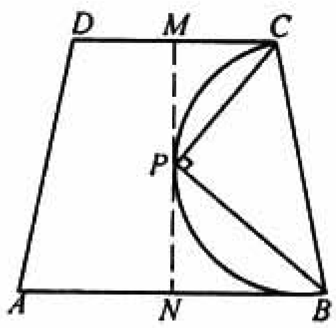


图 2.17

(1) 以 BC 为直径作半圆 S, S 和 MN 的交点 P 和 P' 就是所求的点.

(2) 点 P(或点 P')和梯形两底的距离即是①的两个根.因这两个根之和等于 h,故若一根为 PM(或 $P'M$),则另一根为 PN(或 $P'N$).

(3) 若 $h^2 - ab = 0$,则半圆 S 和 MN 相切,点 P 是惟一的;

若 $h^2 - ab > 0$,则半圆 S 和 MN 相交于 P 及 P' 两点;

若 $h^2 - ab < 0$,则半圆 S 和 MN 不相交,点 P 不存在.



阿拉德风光

第 3 届国际数学奥林匹克

匈牙利,1961

匈牙利命题

1 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a & ① \\ x^2+y^2+z^2=b^2 & ② \\ xy=z^2 & ③ \end{cases}$$

其中 a,b 是已知数.问当 a,b 满足什么条件时,x,y,z 是相异的正数?

解法 1 ② + 2 × ③,得

$$(x+y)^2-z^2=b^2$$

即

$$(x+y+z)(x+y-z)=b^2 \quad ④$$

若 $a\neq 0$,则自 ①,④ 得

$$x+y-z=\frac{b^2}{a} \quad ⑤$$

自 ①,⑤ 得

$$x+y=\frac{a^2+b^2}{2a} \quad ⑥$$

$$z=\frac{a^2-b^2}{2a} \quad ⑦$$

把 z 的值代入 ③ 得

$$xy=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2} \quad ⑧$$

自 ⑥,⑧ 得

$$(x-y)^2=(\frac{a^2+b^2}{2a})^2-\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2}=\frac{-3a^4+10a^2b^2-3b^4}{4a^2}$$

即

$$x-y=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)} \quad ⑨$$

由于 z 值已由 ⑦ 给出,而 x,y 值可由 ⑥,⑨ 联立解得,故原方程的解为

$$x=\frac{1}{4a}(a^2+b^2\pm\sqrt{c})$$

$$y = \frac{1}{4a}(a^2 + b^2 \mp \sqrt{c})$$

$$z = \frac{1}{2a}(a^2 - b^2)$$

其中 $$c = (3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)$$

若 x, y 是相异的正数，则其算术中项大于几何中项 z，且 z 值介于 x, y 之间，故也和 x, y 相异，此时

$$\frac{1}{2}(x + y) > \sqrt{xy} = z$$

然后利用 ⑥，⑧ 得

$$(a^2 + b^2)/4a > (a^2 - b^2)/2a$$

即 $$3b^2 > a^2$$

又自 ①，⑦ 知 $a > 0, a^2 > b^2$. 综合这些不等式可得

$$|b| < a < \sqrt{3}|b|$$

这就是 a, b 所要满足的条件.

解法 2

$$\begin{cases} x + y + z = a & ⑩ \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 & ⑪ \\ xy = z^2 & ⑫ \end{cases}$$

由 ⑫ 得

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + z^2 \quad ⑬$$

由 ⑩ 得

$$x + y = a - z \quad ⑭$$

将 ⑭，⑪ 代入 ⑬，得

$$(a - z)^2 = b^2 + z^2$$

即

$$2az = a^2 - b^2 \quad ⑮$$

当 $a = 0, b \neq 0$ 时，方程 ⑮ 无解，故原方程组无解；

当 $a = 0, b = 0$ 时，由方程 ⑪ 得 $x = y = z = 0$，显然它满足 ⑩，⑫，因此原方程组有惟一解 $x = y = z = 0$；

当 $a \neq 0$ 时，得

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad ⑯$$

由 ⑩ 得

$$y = a - x - z = (a - z) - x \quad ⑰$$

将 ⑯，⑰ 代入 ⑫，得

$$x\left(\left(a - \frac{a^2 - b^2}{2a}\right) - x\right) = \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

或
$$x\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-x\right)=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2$$
两边同乘以 $4a^2$ 并整理得
$$4a^2x^2-2a(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0 \qquad ⑱$$
其判别式
$$\Delta=4a^2((a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)^2)=$$
$$4a^2(10a^2b^2-3a^4-3b^4)$$
当 $\Delta\geqslant 0$,即 $10a^2b^2-3a^4-3b^4\geqslant 0$ 时,方程 ⑱ 的解为
$$x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a} \qquad ⑲$$
代入 ⑰ 得
$$y_{1,2}=\frac{a^2+b^2\mp\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a} \qquad ⑳$$
当 $\Delta<0$,即 $10a^2b^2-3a^4-3b^4<0$ 时,方程 ⑱ 没有实数解,故原方程组无解.

综上所述,当 $a=0,b=0$ 时,方程组有惟一解 $x=y=z=0$;当 $a\neq 0$,且 $10a^2b^2-3a^4-3b^4\geqslant 0$ 时,方程组有两个实数解
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}\\ y_1=\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}\\ z_1=\dfrac{a^2-b^2}{2a}\end{cases}$$
$$\begin{cases}x_2=\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}\\ y_2=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}\\ z_2=\dfrac{a^2-b^2}{2a}\end{cases}$$
(当 $10a^2b^2-3a^4-3b^4=0$ 时,两个解相同,$x=y$)

当 $10a^2b^2-3a^4-3b^4<0$ 时(上面讨论中的 $a=0,b\neq 0$ 这种情况已包括在内),方程组没有实数解.

再讨论 x,y,z 为互不相等的正数的条件.显然,必须 $a>0$,并且
$$10a^2b^2-3a^4-3b^4>0$$
即
$$-(3a^2-b^2)(a^2-3b^2)>0$$
得
$$\frac{1}{\sqrt{3}}|b|<a<\sqrt{3}|b| \qquad ㉑$$

又因 $x>0,y>0$,由 ⑲,⑳ 可知,必须

$$a^2+b^2>\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}$$

化简得

$$4(a^2-b^2)^2>0 \qquad ㉒$$

又因 $z>0$,由 ⑯ 可知,必须 $a^2>b^2$,即

$$a>|b| \qquad ㉓$$

这时,由 ㉓ 便可保证 ㉒ 成立.

由 ㉑,㉓ 得,方程组有互不相等的正数解的条件是

$$|b|<a<\sqrt{3}|b|$$

解法 3 ⑩^2 - ⑪ 得

$$2xy+2yz+2zx=a^2-b^2$$

⑫ 代人上式得

$$2z^2+2yz+2zx=a^2-b^2$$

$$2z(x+y+z)=a^2-b^2$$

即

$$2az=a^2-b^2$$

以下同解法 2.

波兰命题

❷ 已知 a,b,c 是三角形三边的长度,T 是该三角形的面积,求证

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$$

并指出在什么条件下等号成立?

解法 1 设 a 不小于 b 或 c,则此边上的高在三角形内,以 h 表示.此高把 a 分成两段,其长度分别以 m,n 表示,如图 3.1 所示.则

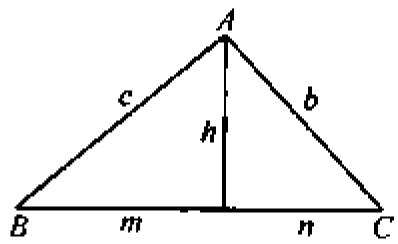


图 3.1

$$b^2=h^2+n^2,c^2=h^2+m^2,T=\frac{1}{2}(m+n)h$$

于是求证的不等式可化为

$$(m+n)^2+(h^2+n^2)+(h^2+m^2)\geqslant 2\sqrt{3}(m+n)h$$

即

$$h^2-\sqrt{3}(m+n)h+(n^2+m^2+mn)\geqslant 0 \qquad ①$$

这样,我们只需证明 ① 成立.

用 $Q(h)$ 表示 ① 的左边,则 $Q(h)$ 是 h 的二次三项式,其判别式为

$$3(m+n)^2-4(n^2+m^2+mn)=-(m-n)^2\leqslant 0$$

因 $Q(h)$ 的判别式小于等于 0,可知 $Q(h)$ 不可能取负值.从而可知原不等式是正确的,而且易知,当且仅当 $m=n,h=\sqrt{3}m$ 时,等

号成立.此时 BC 上的高等于$\frac{\sqrt{3}}{2}BC$且平分BC,故$\triangle ABC$是正三角形.

解法 2 令 $a+b+c=2s$,则

$$4s^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

又

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$$
$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

以上两式左右两边分别相加得

$$4s^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2)$$

从而得

$$4s^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$$

另一方面,根据平面几何定理,在所有周界相等的三角形中,正三角形的面积最大,若正三角形边长为 $2s/3$,则其面积为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{2s}{3})^2=\frac{\sqrt{3}s^2}{9}$$

因此

$$T\leqslant\frac{\sqrt{3}s^2}{9}\leqslant\frac{3\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{36}\Rightarrow$$
$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{12T}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}T$$

当且仅当 $a=b=c$,即$\triangle ABC$是正三角形时,上式等号成立.

解法3 我们依顶角$\angle A\geqslant 120^\circ$或$\angle A<120^\circ$分为两种情形进行讨论.

ⅰ 设$\angle A\geqslant 120^\circ$.在 BC 的下方作正$\triangle BCD$及其外接圆,如图 3.2所示.外接圆的直径 $DF=2a/\sqrt{3}$.因点 A 在弓形BFC之内,故 $AH\leqslant FE=\sqrt{3}a/6$.所以

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}}\geqslant\frac{\sqrt{3}a/2}{\sqrt{3}a/6}=3$$

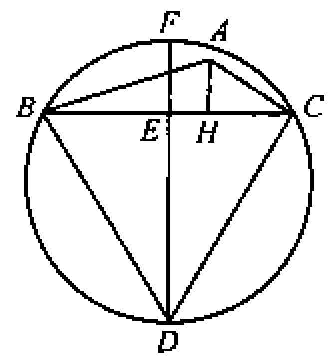


图 3.2

但 $S_{\triangle BCD}=\sqrt{3}a^2/4$, $S_{\triangle ABC}=T$,所以

$$\sqrt{3}a^2/4\geqslant 4T$$

上式左边加正数$\frac{\sqrt{3}}{4}(b^2+c^2)$得

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)>3T$$

以 4 乘上式两边即得所求证的不等式.

ⅱ 设$\angle A<120^\circ$.在三边上各向外作正三角形和它们的外接圆.如图 3.3 所示.这三个外接圆的交点 N 是惟一的.若 N 是$\triangle RAB$及$\triangle QAC$的外接圆的交点,则

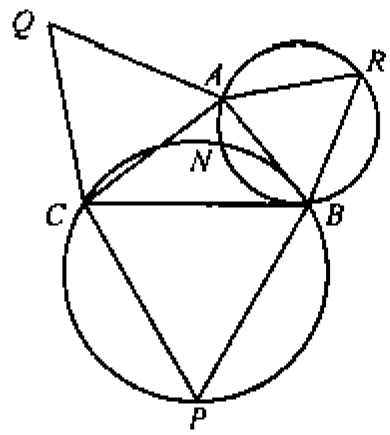


图 3.3

$$\angle ANC = \angle ANB = 120^\circ \Rightarrow \angle BNC = 120^\circ$$

所以 N 在 $\triangle PBC$ 的外接圆上,根据 i 的结果可知

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \geqslant 3S_{\triangle NBC}, \frac{\sqrt{3}b^2}{4} \geqslant 3S_{\triangle NCA}, \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \geqslant 3S_{\triangle NAB}$$

把它们相加,即得所求证的不等式. 当 $NA = NB = NC$ 时等号成立.

解法 4 由海伦(Heron)公式,三角形面积

$$T = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$

又因对于任意正实数 x, y, z,有不等式

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$$

即

$$xyz \leqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

(等号当且仅当 $x = y = z$ 时成立). 故有

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{(a+b+c)^3}{27}$$

(等号当且仅当 $a+b-c = a+c-b = b+c-a$,即 $a = b = c$ 时成立)

所以

$$4T = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \leqslant \sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \frac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}$$

即得

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

等号当且仅当 $a = b = c$ 时成立.

解法 5 由余弦定理,得

$$a^2+b^2+c^2 = (a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2) = 2ab\cdot\cos C + 2bc\cdot\cos A + 2ca\cdot\cos B$$

于是

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4T} = \frac{2ab\cdot\cos C}{4T} + \frac{2bc\cdot\cos A}{4T} + \frac{2ca\cdot\cos B}{4T} =$$

$$\frac{2ab\cdot\cos C}{2ab\cdot\sin C}+\frac{2bc\cdot\cos A}{2bc\cdot\sin A}+\frac{2ca\cdot\cos B}{2ca\cdot\sin B}=$$
$$\cot C+\cot A+\cot B$$

设
$$y=\cot C+\cot A+\cot B=$$
$$-\cot(A+B)+\cot A+\cot B=$$
$$-\frac{\cot A\cdot\cot B-1}{\cot A+\cot B}+\cot A+\cot B$$

去分母并化简,得
$$\cot^2 A+(\cot B-y)\cot A+(\cot^2 B-y\cdot\cot B+1)=0$$

由于 $\cot A$ 为实数,所以方程成立的必要条件是判别式
$$\Delta=(\cot B-y)^2-4(\cot^2 B-y\cdot\cot B+1)=$$
$$-3\cot^2 B+2y\cdot\cot B+(y^2-4)\geqslant 0$$

这是一个关于 $\cot B$ 的二次三项式,它的二次项系数 $-3<0$,如果要求它的值不小于 0,则 $\cot B$ 之值必介于这二次三项式的两根之间,亦即这二次三项式有二实根.于是又有
$$(2y)^2-4(-3)(y^2-4)=16y^2-48\geqslant 0$$

注意到 $y=\cot A+\cot B+\cot C>0$,取正值得
$$y\geqslant\sqrt{3}$$

其中等号当 $\cot B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和 $\cot A=\frac{\cot B-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,即
$$A=B=C=\frac{\pi}{3}$$
时成立.

所以$\frac{a^2+b^2+c^2}{4T}\geqslant\sqrt{3}$,即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$.其中等号成立的充要条件是
$$A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

解法 6 由三角形面积的海伦公式并注意到
$$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
即可得证.

解法 7 由余弦定理及三角形面积公式知
$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T\geqslant 2(a^2+b^2-2ab)=$$
$$2(a-b)^2\geqslant 0$$

所以
$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法 8 由于

$$a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2-ab\cdot\cos C)\geqslant$$
$$2ab(2-\cos C)=4T\cdot\frac{2-\cos C}{\sin C}$$

并注意到 $\cos(\frac{\pi}{3}-c)\leqslant 1$，即

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法 9 由余弦定理并利用三角形面积公式，得

$$a^2+b^2+c^2=4T(\cot A+\cot B+\cot C)$$

但
$$\cot A+\cot B+\cot C\geqslant\sqrt{3}$$
所以
$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法 10 由算术－几何平均不等式，得

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}$$

利用公式
$$a^2b^2c^2=\frac{8T^3}{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}$$
及
$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}$$
即得
$$a^2+b^2+c^2\geqslant 3(8T^3\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}})^{\frac{2}{3}}=4\sqrt{3}T$$

解法 11 因为

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca=2T(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C})$$

但
$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geqslant 3(\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)^{-\frac{1}{3}}$$
且
$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}$$
所以
$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法 12 设 $\triangle ABC$ 与边 a,b,c 相对应的三条高及三条中线长分别为 h_a,h_b,h_c 及 m_a,m_b,m_c．易知

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2\leqslant\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \qquad ②$$

由算术－几何平均不等式，并由②得

$$T^6\leqslant\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{64}(a^2+b^2+c^2)^6$$

从而
$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法 13 不妨假定 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $h_a\leqslant h_b\leqslant h_c$（$h_a,h_b,h_c$ 分别为边 a,b,c 上的高），由切比雪夫（Tschebyscheff）不等式或排序

原理,得

$$36T^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)$$

利用式 ②,即得

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法 14 不妨假定 $a \geqslant b \geqslant c$,则有

$$b^2+c^2-a^2 \leqslant c^2+a^2-b^2 \leqslant a^2+b^2-c^2$$

由切比雪夫不等式或排序原理得

$$3(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4) \leqslant (a^2+b^2+c^2)^2$$

但 $$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4 = 16T^2$$

从而 $$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法 15 令 $b+c-a=x, c+a-b=y, a+b-c=z$,则 $x>0, y>0, z>0$,且 $a=\frac{1}{2}(y+z), b=\frac{1}{2}(z+x)$,$c=\frac{1}{2}(x+y), a+b+c=x+y+z$,又

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}=\frac{1}{4}\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

故待证不等式等价于

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz \geqslant 2\sqrt{3xyz(x+y+z)} \qquad ③$$

下面证明比 ③ 更强的不等式,即

$$xy+yz+xz \geqslant \sqrt{3xyz(x+y+z)} \qquad ④$$

上式两边平方得

$$(xy+yz+xz)^2 \geqslant 3xyz(x+y+z)$$

由于 $$(xy+yz+xz)^2-3xyz(x+y+z)=\frac{1}{2}(x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2) > 0$$

故不等式 ④ 成立,再由 $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+xz$. 故由式 ④ 知式 ③ 成立,从而待证不等式成立.

解法 16 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径及周长之半分别为 r 与 s,则有公式 $s=r\cdot\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$. 由算术 - 几何平均不等式,得

$$\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \qquad ⑤$$

所以 $s \geqslant 3\sqrt{3}r$. 又因为

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{4}{3}s^2$$

所以 $$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{4}{3}s\cdot 3\sqrt{3}r=4\sqrt{3}sr=4\sqrt{3}T$$

解法 17 由式⑤知

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \qquad ⑥$$

因为

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{64}{3}R^2\cdot\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$

其中, R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径. 利用⑥, 所以

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{64}{3}R^2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot 3\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=8\sqrt{3}R^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=4\sqrt{3}T$$

解法 18 由算术 - 几何平均不等式, 知

$$(s-a)(s-b) \leqslant \left(\frac{1}{2}(s-a+s-b)\right)^2=\frac{1}{4}c^2$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$(s-b)(s-c) \leqslant \frac{1}{4}a^2$$

$$(s-c)(s-a) \leqslant \frac{1}{4}b^2$$

三式相加, 得

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4((s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a))$$

又 $$(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a) \geqslant 3((s-a)(s-b)(s-c))^{\frac{2}{3}}$$

从而 $$(a^2+b^2+c^2)^3 \geqslant 12^3((s-a)(s-b)(s-c))^2$$

易知 $$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)=\frac{4}{3}s^2$$

两式相乘得 $$(a^2+b^2+c^2)^4 \geqslant \frac{4}{3}\cdot 12^3\cdot T^4$$

由此即有 $$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法 19 如图 3.4 所示, 设 AB 为 $\triangle ABC$ 的最大边, AB 边上的高为 $CD=\frac{2T}{c}$. 设 $AD=x$, $DB=c-x$, 于是

$$b^2 = \left(\frac{2T}{c}\right)^2 + x^2, a^2 = \left(\frac{2T}{c}\right)^2 + (c - x)^2$$

故 $$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{3}{2}c^2 + 2\left(\frac{2T}{c}\right)^2$$

但 $$\frac{3}{2}c^2 + 2\left(\frac{2T}{c}\right)^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{3}{2}c^2 \cdot 2\left(\frac{2T}{c}\right)^2} = 4\sqrt{3}T$$

所以

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

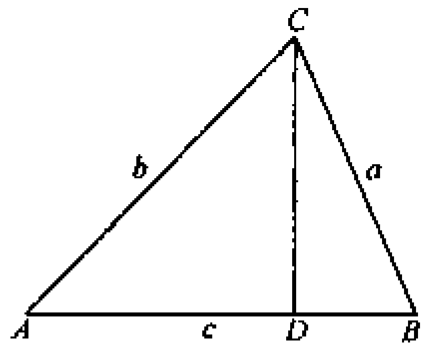


图 3.4

解法20 设 AB 为 $\triangle ABC$ 的最大边，AB 边上的高 $CD = h$，并设 $AD = l, DB = m$，则 $l + m = c$，又

$$T = \frac{1}{2}(l + m)h, b^2 = l^2 + h^2, a^2 = m^2 + h^2$$

所以 $$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}T =$$
$$(l + m)^2 + m^2 + h^2 + l^2 + h^2 - 2\sqrt{3}(l + m)h =$$
$$2(h^2 - \sqrt{3}(l + m)h + l^2 + lm + m^2)$$

令 $$y = h^2 - \sqrt{3}(l + m)h + l^2 + lm + m^2$$

这是一个关于 h 的二次函数，其判别式

$$3(l + m)^2 - 4(l^2 + lm + m^2) = -(l - m)^2 \leqslant 0$$

故 $$y = h^2 - \sqrt{3}(l + m)h + l^2 + lm + m^2 \geqslant 0$$

从而有 $$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法21 不妨设 $AB \geqslant AC \geqslant BC$，如图3.5所示，以 BC 为底作正 $\triangle A'BC$，使 A 和 A' 在 BC 的同侧. 在 $\triangle ACA'$ 中，由余弦定理得

$$AA'^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}T)$$

因为 $AA'^2 \geqslant 0$，所以

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

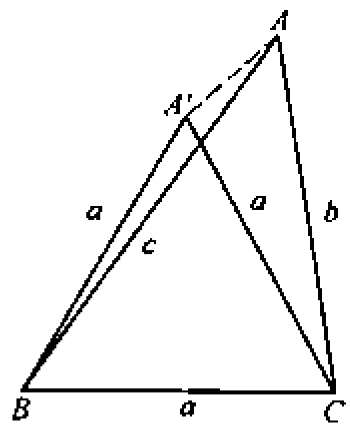


图 3.5

解法22 如图3.6所示，设 BC 为 $\triangle ABC$ 的较小边，以 BC 为边作正三角形，使 A 和 A' 在 BC 的同侧，分别过 A, A' 作 BC 的垂线交 BC 于 D, E. 设 $AD = h$，则

$$AA'^2 = DE^2 + \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = BD^2 - a \cdot BD + a^2 + h^2 - 2\sqrt{3}T$$

所以 $2AA'^2 + 4\sqrt{3}T = a^2 + c^2 + h^2 + DC^2 = a^2 + b^2 + c^2$

因为 $AA'^2 \geqslant 0$. 所以

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

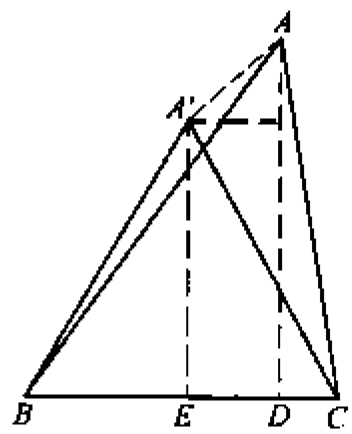


图 3.6

解法23 如图3.7所示,分别以$\triangle ABC$的边BC,CA,AB为一边向内侧作正三角形,它们的中心依次为A',B',C',若K,L为BC的三等分点,则$\triangle A'KL$为正三角形,在$\triangle BA'L$中,由余弦定理,得

$$BA'^2 = BL^2 + LA'^2 - 2BL \cdot LA' \cdot \cos\angle BLA' = \frac{1}{3}a^2$$

同理
$$BC'^2 = \frac{1}{3}c^2$$

在$\triangle A'BC'$中,有

$$C'A'^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}c^2 - 2\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}\cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}ac(\cos B + \sqrt{3}\sin B)$$

由$T = \frac{1}{2}ca\cdot\sin B$及$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,有

$$C'A'^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{6}(a^2+c^2-b^2) - \frac{2}{\sqrt{3}}T = \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T)$$

因为$C'A'^2 \geqslant 0$,所以$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$.由于同理可证

$$A'B'^2 = B'C'^2 = \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T)$$

故$\triangle A'B'C'$为正三角形,$\triangle A'B'C'$通常称为拿破仑(Napoleon)三角形,显然当$\triangle ABC$为正三角形时,它退化为一点.

所以
$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

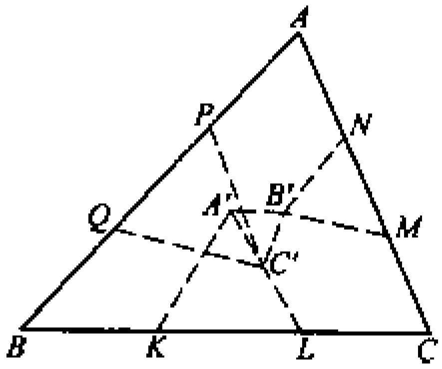


图3.7

解法24 如图3.8所示,在平面直角坐标系中,设$\triangle ABC$三顶点的坐标为$A(p,q),B(0,0),C(a,0)$,其中$q>0$.因为

$$b^2 = (p-q)^2 + q^2, c^2 = p^2 + q^2, T = \frac{1}{2}aq$$

所以
$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T = 2a^2+2p^2+2q^2-2ap-2\sqrt{3}aq = 2\left(\left(p-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\right) \geqslant 0$$

于是
$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}T$$

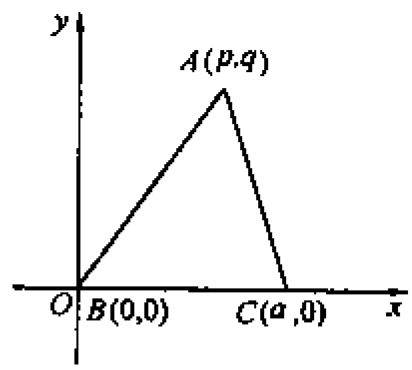


图3.8

解法25 如图3.9所示,在复平面上,置$\triangle ABC$的边BC在正实轴上,B重合于坐标原点,设A,C所对应的复数为

$$z_1 = \xi + i\eta(\eta > 0), z_2 = a + i0 = a$$

因为
$$T = \frac{1}{2}a\mid z_1\mid\sin\angle CBA = \frac{1}{2}a\eta$$

而
$$a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+\xi^2+\eta^2-a\xi)$$

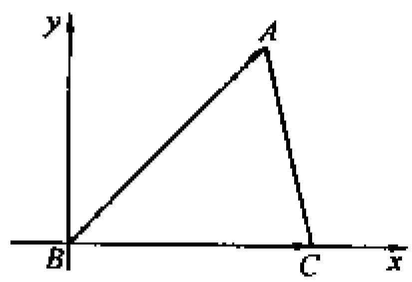


图3.9

所以 $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T=2(a^2+\xi^2+\eta^2-a\xi-\sqrt{3}a\eta)=$

$$2\left(\left(\xi-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\right)\geqslant 0$$

从而有 $$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$$

解法26 如图3.10所示，分别以$\triangle ABC$三边为一边向外侧作正$\triangle BCD$，$\triangle CAE$，$\triangle ABF$，设它们的中心分别为O_1，O_2，O_3，若$\triangle ABF$的外接圆和$\triangle BCD$的外接圆交于O，则$\angle AOB=\angle BOC=120°$，从而$\angle AOC=120°$，于是$\triangle CAE$的外接圆也过点$O$.连结$BO_1$，$CO_1$，则$\angle BO_1C=120°$，$\triangle BO_1C$和$\triangle BOC$有公共的底边$BC$，且$\angle BO_1C=\angle BOC$，根据三角形的一边及该边所对的顶角一定时，以此三角形的另两边为腰的等腰三角形具有最大面积(证明过程这里略去)，故$\triangle BO_1C$的面积大于等于$\triangle BOC$的面积. 若$\triangle BOC$，$\triangle COA$，$\triangle AOB$的面积分别记为T_1，T_2，T_3，又$\triangle BO_1C$的面积等于$\frac{1}{3}\triangle BCD$的面积等于$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. 于是

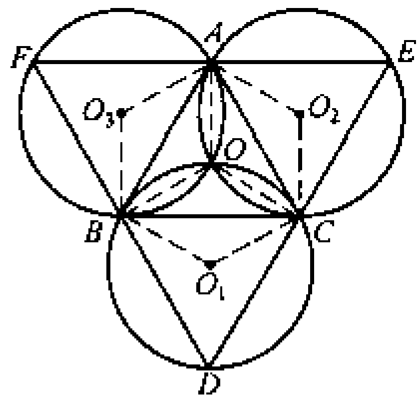


图3.10

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\geqslant T_1$$

同理 $$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2\geqslant T_2,\ \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\geqslant T_3$$

三式相加，得

$$\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)\geqslant T_1+T_2+T_3=T$$

因此 $$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T$$

推广 设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三边长分别为a，b，c与a'，b'，c'，面积为T与T'，则有

$$a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)\geqslant 16TT' \quad ⑦$$

其中，等号当且仅当$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似时成立.

不等式⑦是美国几何学家匹多(Pedoe)于1942年重新发现并证明的一个不等式，这个不等式事实上在1897年就被尼尔伯格(J.Neuberg)发现.但直到1979年才被介绍到我国.这个第一个涉及两个三角形的不等式，以它外形的优美对称，证法的多种多样而吸引着我国的许多读者，近年来，有不少专家学者及数学爱好者讨论过这个不等式的加强、推广和应用.特别要指出的是，1981年，杨路和张景中教授对于高维空间的两个单纯形建立了类似于⑦的不等式.下面我们介绍不等式⑦的各种证明.

证法1 如图3.11所示，在$\triangle ABC$的三边BC，CA，AB上分别

此证法属于匹多

向内侧作 $\triangle A''BC$，$\triangle AB''C$，$\triangle ABC''$，使它们都与另外任意指定的 $\triangle A'B'C'$ 相似，并设 $\triangle A''BC$，$\triangle AB''C$ 与 $\triangle ABC''$ 的外心分别为 U，V 与 W．为了不使图形过于复杂，在图 3.11 中，我们只在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上画 $\triangle ABC'' \backsim \triangle A'B'C'$，并标出 $\triangle ABC''$ 的外心 W．这时

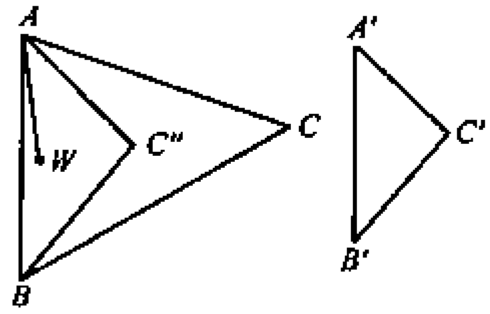


图 3.11

$$\angle BAW = \frac{1}{2}(\pi - 2\angle C') = \frac{\pi}{2} - \angle C'$$

同理
$$\angle CAV = \frac{\pi}{2} - B'$$

于是
$$\angle VAW = |\angle A - (\frac{\pi}{2} - \angle B') - (\frac{\pi}{2} - \angle C')| = |\angle A - (\pi - \angle B' - \angle C')| = |\angle A - \angle A'|$$

又由于
$$AW = \frac{c/2}{\cos \angle BAW} = \frac{c/2}{\cos(\frac{\pi}{2} - C')} = \frac{c}{2\sin C'}$$
$$AV = \frac{b}{2\sin B'}$$

所以，由余弦定理，有
$$VW^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{\sin^2 B'} + \frac{c^2}{\sin^2 C'} - \frac{2bc}{\sin B' \cdot \sin C'}\cos(A - A')\right)$$

根据正弦定理，有
$$\sin B' = \frac{b'}{2R'}, \sin C' = \frac{c'}{2R'}$$

其中，R' 表示 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径，代入上式，有
$$VW^2 = R'^2\left(\frac{b^2}{b'^2} + \frac{c^2}{c'^2} - 2\frac{bc}{b'c'}(\cos A \cdot \cos A' + \sin A \cdot \sin A')\right) = \frac{R'^2}{2b'^2c'^2}\Big(2b^2c'^2 + 2b'^2c^2 - (2bc \cdot \cos A) \cdot (2b'c' \cdot \cos A') - 16\left(\frac{1}{2}bc \cdot \sin A\right)\left(\frac{1}{2}b'c' \cdot \sin A'\right)\Big)$$

利用余弦定理以及 $\triangle = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$，$\triangle' = \frac{1}{2}b'c' \cdot \sin A$，可以得到
$$VW^2 = \frac{R'^2}{2b'^2c'^2}(2b^2c'^2 + 2b'^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)(b'^2 + c'^2 - a'^2) - 16\triangle\triangle')$$

化简此式右边，可得
$$\left(\frac{VW}{a'}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R'}{a'b'c'}\right)^2(H - 16\triangle\triangle')$$

其中
$$H = a'^2(b^2 + c^2 - a^2) + b'^2(c^2 + a^2 - b^2) + c'^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

注意到上式右边是 a, b, c 及 a', b', c' 的对称式，故可以得出
$$\frac{VW}{a'} = \frac{WU}{b'} = \frac{UV}{c'}$$

这表明 $\triangle UVW$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似. 显然有 $H-16\triangle\triangle'\geqslant 0$,其中等号当且仅当 U,V,W 三点重合时成立,亦即 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ 时成立,这就证得了不等式 ⑦.

此证法属于匹多

证法2　在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上,向点 A 所在的一侧作 $\triangle A''BC$,如图3.12所示,使得 $\triangle A''BC \backsim \triangle A'B'C'$. 在 $\triangle ACA''$ 中,根据余弦定理

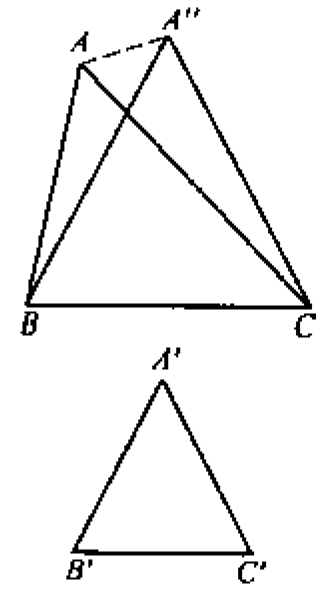


图 3.12

$$A''A^2 = AC^2 + A''C^2 - 2AC\cdot A''C\cdot\cos\angle ACA''$$

但因　$AC=b,A''C=a\left(\frac{b'}{a'}\right),\angle ACA''=|C'-C|$

所以　$$a'^2\cdot A''A^2=\frac{1}{2}(H-16\triangle\triangle')$$

其中

$$H=a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)$$

显然 $a'^2\cdot A''A^2\geqslant 0$,因此式 ⑦ 成立.

证法3　令 $a^2=x,b^2=y,c^2=z,a'^2=x',b'^2=y',c'^2=z'$,则

此证法属于 Carlitz

$$H=x'(y+z-x)+y'(z+x-y)+z'(x+y-z)=x(y'+z'-x')+y(z'+x'-y')+z(x'+y'-z')$$

其中,H 表示的意义同证法1,2. 又

$$16\triangle^2=2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2$$

$$16\triangle'^2=2x'y'+2y'z'+2z'x'-x'^2-y'^2-z'^2$$

容易验证　$H^2-(16\triangle\triangle')^2=-4(UV+VW+WU)$

其中　$U=yz'-y'z,V=zx'-z'x,W=xy'-x'y$

因为　$$xU+yV+zW=0$$

我们可得

$$-4xz(VW+WU+UV)=(2xU+(x+y-z)V)^2+16\triangle^2\cdot V^2$$

由此可得

$$xz(H^2-(16\triangle\triangle')^2)=(2xU+(x+y-z)V)^2+16\triangle^2\triangle'^2$$

因为 $xz>0,\triangle^2>0$,由上式可得 $H^2\geqslant(16\triangle\triangle')^2$,所以 $H\geqslant 16\triangle\triangle'$.

证法4　由余弦定理,得

此证法属于张在明

$$H=a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)=2(a^2b'^2+a'^2b^2-2aba'b'\cdot\cos C\cdot\cos C')$$

又因为　$$16\triangle\triangle'=4aba'b'\cdot\sin C\cdot\sin C'$$

所以

$$H-16\triangle\triangle'=2((ab'-a'b)^2+2aba'b'(1-\cos(C-C')))$$

由此可见 $H \geqslant 16\triangle\triangle'$.

证法5 由柯西不等式,知

此证法属于陈计、何明秋

$$(16\triangle\triangle' + 2(a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2))^2 =$$
$$(4\triangle \cdot 4\triangle' + \sqrt{2}a^2 \cdot \sqrt{2}a'^2 + \sqrt{2}b^2 \cdot \sqrt{2}b'^2 +$$
$$\sqrt{2}c^2 \cdot \sqrt{2}c'^2)^2 \leqslant (16\triangle^2 + 2a^4 + 2b^4 +$$
$$2c^4)(16\triangle'^2 + 2a'^4 + 2b'^4 + 2c'^4)$$

但
$$16\triangle^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$$
$$16\triangle'^2 = 2a'^2b'^2 + 2b'^2c'^2 + 2c'^2a'^2 - a'^4 - b'^4 - c'^4$$

所以
$$(16\triangle\triangle' + 2(a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2))^2 \leqslant$$
$$(a^2 + b^2 + c^2)^2(a'^2 + b'^2 + c'^2)^2$$

从而
$$(a^2 + b^2 + c^2)^2(a'^2 + b'^2 + c'^2)^2 -$$
$$2(a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2) \geqslant 16\triangle\triangle'$$

此即⑦.

证法6 如图3.13所示,把 $\triangle ABC$ 的顶点 C 放在复平面坐标系的原点,其余两个顶点用复数 α,β 来记.于是有 $a = |\alpha|, b = |\beta|, c = |\alpha - \beta|$,同样,把 $\triangle A'B'C'$ 的顶点 C' 也放在原点上,其余两个顶点用复数 α',β' 来记,故有 $a' = |\alpha'|, b' = |\beta'|, c' = |\alpha' - \beta'|$.这样一来

此证法属于常庚哲

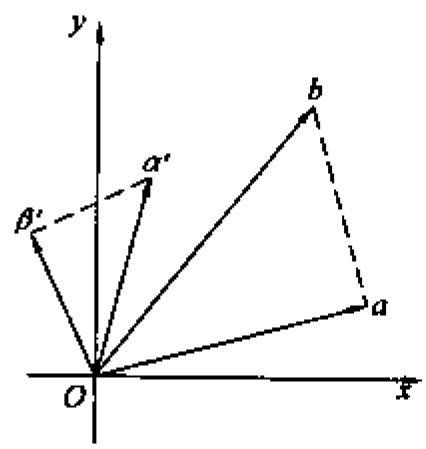


图3.13

$$a'^2(b^2 + c^2 - a^2) = \alpha'\overline{\alpha'}(\beta\overline{\beta} + (\alpha - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) - \alpha\overline{\alpha}) =$$
$$\alpha'\overline{\alpha'}(2\beta\overline{\beta} - (\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta))$$
$$b'^2(c^2 + a^2 - b^2) = \beta'\overline{\beta'}((\alpha - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) + \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta}) =$$
$$\beta'\overline{\beta'}(2\alpha\overline{\alpha} - (\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta))$$
$$c'^2(a^2 + b^2 - c^2) = (\alpha' - \beta')(\overline{\alpha'} - \overline{\beta'})(\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} -$$
$$(\alpha - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\beta})) =$$
$$(\alpha'\overline{\alpha'} - \beta'\overline{\beta'} - (\alpha'\overline{\beta'} + \overline{\alpha'}\beta^2))(\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta)$$

将以上三式两边分别相加,得到

$$H = a'^2(b^2 + c^2 - a^2) + b'^2(c^2 + a^2 - b^2) + c'^2(a^2 + b^2 - c^2) =$$
$$2(|\alpha'|^2|\beta|^2 + |\alpha|^2|\beta'|^2) - (\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta)(\alpha'\overline{\beta'} + \overline{\alpha'}\beta') \qquad ⑧$$

在图3.13所示的情形下,我们有

$$\triangle = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}}{2\mathrm{i}}$$

其中,$\mathrm{Im}(z)$ 代表复数 z 的虚部,同理

$$\triangle' = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\alpha'}\beta' - \alpha'\overline{\beta'}}{2\mathrm{i}}$$

所以

$$16\triangle\triangle' = -(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})(\overline{\alpha'}\beta' - \alpha'\overline{\beta'}) \qquad ⑨$$

由 ⑧,⑨ 经过简单计算,得

$$H - 16\triangle\triangle' = 2|\alpha\beta' - \alpha'\beta|^2 \quad ⑩$$

由此显然可见 $H - 16\triangle\triangle' \geqslant 0$,即式 ⑦ 成立.

3 解方程

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

其中,n 是任意已知的自然数.

保加利亚命题

解法 1 把原方程移项得

$$\cos^n x = 1 + \sin^n x$$

(1) 设 n 是偶数.因

$$1 + \sin^n x \geqslant 1, \cos^n x \leqslant 1$$

故只有当 $$1 + \sin^n x = \cos^n x = 1$$

时原方程才能成立,解之得

$$x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

(2) 设 n 是奇数.由于

$$1 \geqslant \cos^n x = 1 + \sin^n x \geqslant 0$$

可知 $\sin^n x \leqslant 0, \cos^n x \geqslant 0$.故 x 是在第四象限的角,即

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

从而可知 $x = 2k\pi$ 及 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$ 是原方程的解.而 x 在 $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 及 $2k\pi$ 之间的值不能满足原方程:若 $n = 1$,自易验证;若 $n \geqslant 3$,则

$$|\cos x| > \cos^2 x > |\cos x|^n, |\sin x| > \sin^2 x > |\sin x|^n$$

故 $$|\cos x| + |\sin x| > \cos^2 x + \sin^2 x = 1 > |\cos x|^n + |\sin x|^n$$

故此时 $$\cos^n x - \sin^n x \neq 1$$

解法 2 (1) 当 n 是偶数时,$\sin^n x \geqslant 0, \cos^n x \leqslant 1$,所以

$$\cos^n x - \sin^n x \leqslant 1$$

要使 $\cos^n x - \sin^n x = 1$ 成立,必须且只须 $\cos^n x = 1$ 且 $\sin^n x = 0$,即 $\cos x = \pm 1$ 且 $\sin x = 0$.由此得方程的解为

$$x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

(2) 当 n 是奇数时,将原方程写为

$$\cos^n x = 1 + \sin^n x$$

由于 $\sin x \geqslant -1$,所以 $\sin^n x \geqslant -1$,必有 $\cos^n x \geqslant 0, \cos x \geqslant 0$;又因 $\cos x \leqslant 1$,所以 $\cos^n x \leqslant 1$,必有 $\sin^n x \leqslant 0, \sin x \leqslant 0$.

若 $\sin x = 0$,代入方程得 $\cos^n x = 1$,有 $\cos x = 1$,由此得方程

的一组解为

$$x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

若 $\sin^n x = -1$，代入方程得 $\cos^n x = 0$，有 $\cos x = 0$，由此得方程的又一解为

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$$

最后，若 $-1 < \sin x < 0$，这时 $0 < \cos^n x < 1$，有 $0 < \cos x < 1$. 于是原方程可以写为

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n = 1$$

当 $n \geqslant 3$ 时

$$|\cos x|^n < \cos^2 x, |\sin x|^n < \sin^2 x$$

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

所以当 $n \geqslant 3$ 时，原方程没有适合 $-1 < \sin x < 0$ 的解.

当 $n = 1$ 时，原方程就是

$$\cos x - \sin x = 1$$

即 $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} + x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

所以 $x = 2k\pi$ 或 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$. 对于这两组解，分别有 $\cos x = 1, \sin x = 0$ 或 $\cos x = 0, \sin x = -1$，但不适合 $-1 < \sin x < 0$.

综上所述，得原方程的解为

$$x = \begin{cases} k\pi, \text{当 } n \text{ 为偶数时}, k \in \mathbf{Z} \\ 2k\pi \text{ 或 } 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \text{当 } n \text{ 为奇数时}, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

解法3 (1) n 为偶数时，同解法1.

(2) n 为奇数时，由于

$$\cos^n x = 1 - \sin^n x \geqslant 0, \sin^n x = \cos^n x - 1 \leqslant 0$$

则

$$\cos x \geqslant 0, \sin x \leqslant 0$$

由此，x 只能在第四象限.

现设 $x = -x'$，则 x' 在第一象限，而原方程变形为

$$\cos^n x' + \sin^n x' = 1 \quad ①$$

当 $x' = 2k\pi$ 或 $x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时，方程①显然成立；若 $x' \neq 2k\pi$ 且 $x' \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，则对于任意自然数 $n_1 > n_2$，有

$$(\cos^{n_1} x' + \sin^{n_1} x') - (\cos^{n_2} x' + \sin^{n_2} x') =$$

$$\cos^{n_2} x'(\cos^{n_1 - n_2} x' - 1) + \sin^{n_2} x'(\sin^{n_1 - n_2} x' - 1) < 0$$

这就是说，在上述条件下，对于任意确定的角 x'，函数

$\cos^n x' + \sin^n x'$ 关于变数 n 是递减的.

已知 $n = 2$ 时

$$\cos^2 x' + \sin^2 x' = 1$$

则当 $n \neq 2$ 时

$$\cos^n x' + \sin^n x' \neq 1$$

即除 $x' = 2k\pi, x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 外,在第一象限内,方程①无其他的解.

从而可以判定,对于原方程而言,在第四象限内,除 $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 外,亦无其他的解.其中 k 均为整数.

综合上述讨论,所得结论将与前两种解法一致.

4 设有 $\triangle P_1P_2P_3$ 及该三角形内的任意一点 P.直线 P_1P, P_2P, P_3P 交三角形的对边于 Q_1, Q_2, Q_3.求证:在比值 $\frac{P_1P}{PQ_1}$, $\frac{P_2P}{PQ_2}$, $\frac{P_3P}{PQ_3}$ 中,至少有一个不大于 2,也至少有一个不小于 2.

民主德国命题

证法 1 用记号 $S_{\triangle XYZ}$ 表示 $\triangle XYZ$ 的面积,并设

$$A = S_{\triangle PP_2P_3}, B = S_{\triangle PP_3P_1}, C = S_{\triangle PP_1P_2}$$

则
$$A + B + C = S_{\triangle P_1P_2P_3}$$

P_2P_3 是 $\triangle PP_2P_3$ 及 $\triangle P_1P_2P_3$ 的公共边.这两个三角形的高的比等于 $PQ_1 : P_1Q_1$.所以它们面积的比也等于 $PQ_1 : P_1Q_1$,如图 3.14 所示,即

$$PQ_1 : P_1Q_1 = A : (A + B + C)$$

同理
$$PQ_2 : P_2Q_2 = B : (A + B + C)$$
$$PQ_3 : P_3Q_3 = C : (A + B + C)$$

所以
$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1} + \frac{PQ_2}{P_2Q_2} + \frac{PQ_3}{P_3Q_3} = 1$$

可知三个比值中至少有一个不大于 $\frac{1}{3}$,也至少有一个不小于 $\frac{1}{3}$.但对于 $i = 1,2,3$,有

$$\frac{PQ_i}{P_iQ_i} \leqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P_iQ_i}{PQ_i} \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{P_iP}{PQ_i} + 1 \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{P_iP}{PQ_i} \geqslant 2$$

同样可得
$$\frac{PQ_i}{P_iQ_i} \geqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P_iP}{PQ_i} \leqslant 2$$

故命题得证.

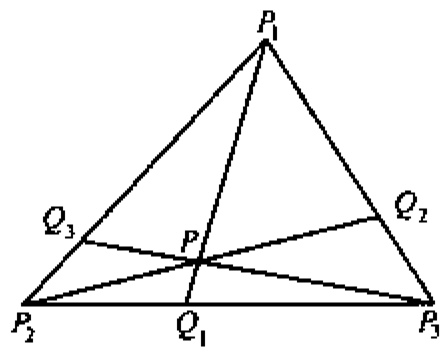


图 3.14

证法2 设 G 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心，过 G 作 $X_2X_3 /\!/ P_2P_3$，$Y_3Y_1 /\!/ P_3P_1$，$Z_1Z_2 /\!/ P_1P_2$，如图3.15所示.

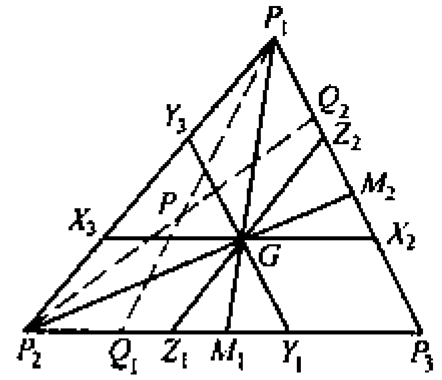


图3.15

若 P 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 内的任意一点，这点必定在 $\triangle P_1X_2X_3$，$\triangle P_2Y_3Y_1$ 或 $\triangle P_3Z_1Z_2$ 之内或边上.不妨设点 P 是在 $\triangle P_1X_2X_3$ 之内或边上.因 $P_1G/GM_1 = 2$，可知 $P_1P/PQ_1 \leqslant 2$.

另一方面，点 P 必是在梯形 $P_2P_3X_2X_3$，$P_3P_1Y_3Y_1$ 或 $P_1P_2Z_1Z_2$ 之外或边上.不妨设点 P 是在梯形 $P_3P_1Y_3Y_1$ 之外或边上.因 $P_2G/GM_2 = 2$，可知 $P_2P/PQ_2 \geqslant 2$.

证法3 如图3.16所示，设点 S 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心，P_1M_1，P_2M_2，P_3M_3 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的三条中线，则有

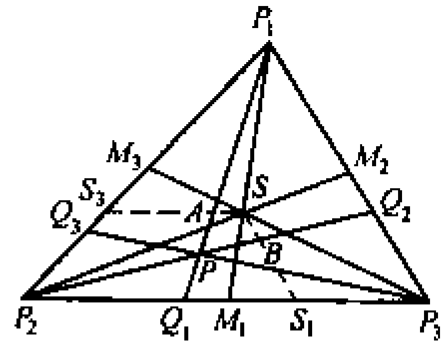


图3.16

$$\frac{P_1S}{SM_1} = \frac{P_2S}{SM_2} = \frac{P_3S}{SM_3} = 2$$

若点 P 与点 S 重合，即 Q_1，Q_2，Q_3 三点分别与点 M_1，M_2，M_3 重合，故有

$$\frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{P_2P}{PQ_2} = \frac{P_3P}{PQ_3} = 2$$

命题成立；

若点 P 与点 S 不重合，则点 P 必属于下列六个三角形之一，即 $\triangle SP_1M_3$，$\triangle SP_2M_3$，$\triangle SP_2M_1$，$\triangle SP_3M_1$，$\triangle SP_3M_2$，$\triangle SP_1M_2$ 中的某一个(可以在边上，但不与顶点重合).

不失一般性，我们设点 P 在 $\triangle SP_2M_1$ 内.过 S 作 $SS_3 /\!/ P_3P_2$，与 P_1P_2 相交于点 S_3，它与 P_1Q_1 亦必相交，设交点为 A.因为 $\triangle SP_2M_1$ 在四边形 $SS_3P_2M_1$ 内，所以点 A 在 P_1，P 两点之间，从而有

$$\frac{P_1P}{PQ_1} > \frac{P_1A}{AQ_1} = \frac{P_1S}{SM_1} = 2$$

再过 S 作 $SS_1 /\!/ P_1P_3$，与 P_2P_3 相交于点 S_1，它与 P_2Q_2 亦必相交，设交点为 B.因为 $\triangle SP_2M_1$ 在 $\triangle SP_2S_1$ 内，所以点 B 在 P，Q_2 两点之间，从而有

$$\frac{P_2P}{PQ_2} < \frac{P_2B}{BQ_2} = \frac{P_2S}{SM_2} = 2$$

这就得到
$$\frac{P_1P}{PQ_1} > 2, \frac{P_2P}{PQ_2} < 2$$

命题成立.

如果点 P 在其他某一个 $\triangle SP_iM_j(i,j = 1,2,3, i \neq j)$ 内，同样可证.

总之，对于 $\triangle P_1P_2P_3$ 内的任一点 P，命题成立.

注 这个问题也很容易由二维推广到三维,设 P 为四面体 $ABCD$ 内任意一点,分别连结 AP, BP, CP, DP,顺次与所对的面 BCD、CDA, DAB, ABC 交于点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4,求证

$$PQ_1 : AP, PQ_2 : BP, PQ_3 : CP, PQ_4 : DP$$

这四个比中,至少有一个不大于 3,也至少有一个不小于 $\frac{1}{3}$.

> **5** 求作一个 $\triangle ABC$,已知其二边 $AC = b$, $AB = c$, $\angle AMB = \omega < 90°$($M$ 是 BC 的中点).求证:当且仅当
> $$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant c < b$$
> 时,作图是可能的.并说明在什么情况下等号成立?

捷克斯洛伐克命题

解法 1

作法 作长度等于 b 的线段 AC,在 AC 的中点 N 作垂线,以 C 为顶点,CN 为一边作 $\angle NCX = \frac{1}{2}(\pi - \omega)$,使另一边交 AC 的中垂线于 X.又作 CX 的中垂线使其交 NX 于 O.以 O 为圆心,OC 为半径作圆,则 $\angle NXC = \frac{\omega}{2}$.

若 $\frac{c}{2} > OX - ON$,以 N 为圆心,$\frac{c}{2}$ 为半径作弧交圆 O 于两点 M 和 M',延长 CM(CM')至 B(B')使 $MB = MC$($M'B' = M'C$),则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C$ 是所求作的三角形,如图 3.17 所示.

若 $\frac{c}{2} = OX - ON$,则以 N 为圆心,$\frac{c}{2}$ 为半径作弧切圆 O 于 M,延长 CM 至 B 使 $MB = MC$.则 $\triangle ABC$ 是所求作的三角形,如图 3.18 所示.

若 $\frac{c}{2} < OX - ON$,则作图是不可能的.

证明 过 AC 的中点 N 作垂线使其交 $\overparen{AC}$ 于 M.因 M 是 $\overparen{AC}$ 的中点,故 $\angle MCN = \angle CXN = \omega/2$.于是得

$$\tan \angle MCN = \tan \frac{\omega}{2} = \frac{MN}{NC} = \frac{c/2}{b/2} = \frac{c}{b}$$

所以 $\qquad MN = OX - ON \leqslant \frac{c}{2} \Leftrightarrow b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant c$

又若 $b \leqslant c$,则 $\omega \geqslant 90°$ 与题设不合.

故本题作图可能的充要条件为

$$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant c < b$$

并且当点 M 是 $\overparen{AC}$ 的中点时,等号成立.

分析 设 AC 是圆 O 的弦而且优弧 $\overparen{AXC}$ 所对的圆周角为 $\pi - \omega$,对于劣弧 $\overparen{AC}$ 间的任一点 M,$\angle AMC$ 的外角等于 ω.若 M 是 BC 的中点,N 是 AC 的中点,则 $MN = \frac{c}{2}$,故 $\triangle ABC$ 适合所给的条件.

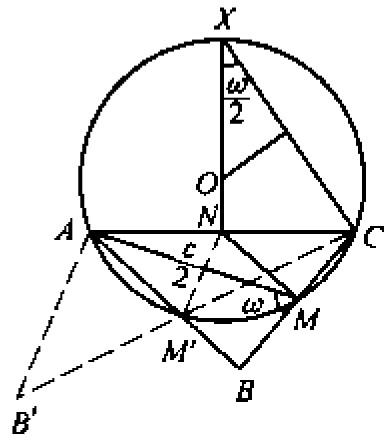


图 3.17

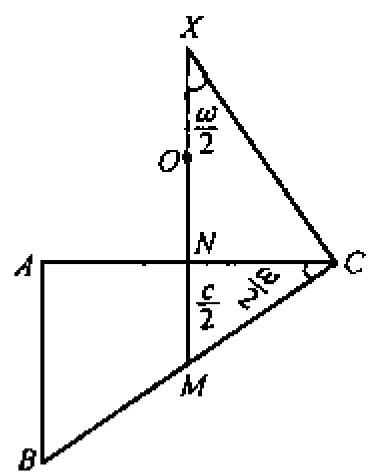


图 3.18

解法 2

作法(图 3.20)

1) 作 $AC = b$,在线段 AC 上作圆周角等于 $180° - \omega$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$;

2) 取 AC 的中点 N. 以 N 为圆心,$\frac{c}{2}$ 为半径作弧,与弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$ 相交于点 M;

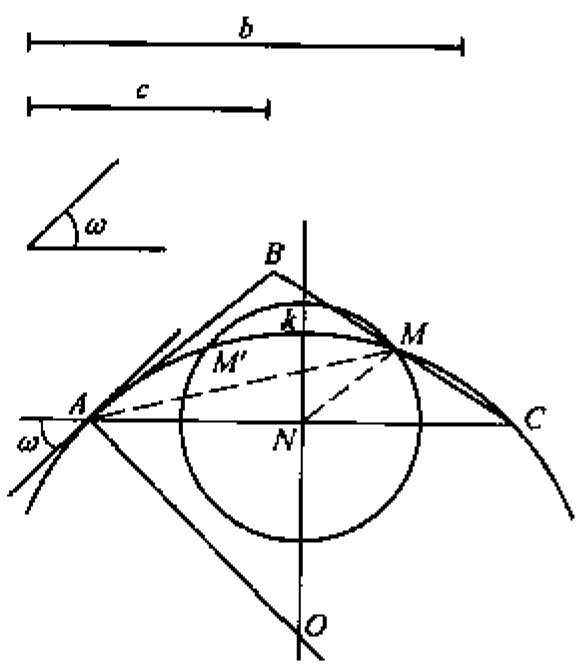


图 3.20

3) 连结 CM,并在 CM 的延长线上截取 $MB = CM$;

4) 连结 AB,则 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.

证明 由作法 1),$AC = b$,$\angle AMC = 180° - \omega$,所以

$$\angle AMB = 180° - \angle AMC = \omega$$

并且 $MB = CM$(由作法3)可知). 又由作法2)知 N 是 AC 的中点,所以

$$AB = 2NM = 2 \cdot \frac{c}{2} = c$$

讨论 我们来证明,当且仅当 $b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leqslant c < b$ 时,本题有解.

若本题有解,即 $\triangle ABC$ 能作出,BC 的中点 M 必定在弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$ 上,并且 $NM = \frac{c}{2}$. 设弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$ 的圆心为 O,半径为 R,对称轴为 OH(H 在 $\overset{\frown}{AkC}$ 上),如图 3.21 所示. 要使点 M 存在,必须

$$OM \leqslant ON + NM \quad ①$$

分析 假定 $\triangle ABC$ 已作出,满足题给条件,如图 3.19 所示.

因为

$$\angle AMB = \omega < 90°$$

所以

$$\angle AMC = 180° - \omega > 90°$$

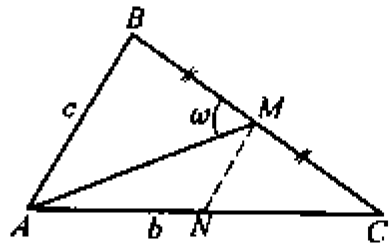


图 3.19

取 AC 的中点 N,连结 NM,因为 M 是 BC 的中点,所以 $NM \parallel AB$,$NM = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$.

于是在 $\triangle AMC$ 中,$AC = b$,AC 上的中线 $NN = \frac{c}{2}$,且 $\angle AMC = 180° - \omega$,所以 $\triangle AMC$ 可先作出.

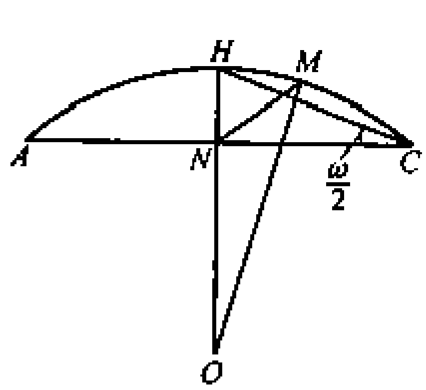


图 3.21

而 $$OM = R, NM = \frac{c}{2}$$

$$ON = OH - NH = R - NH = R - NC \cdot \tan \angle ACH = R - \frac{b}{2} \cdot \tan \frac{\omega}{2}$$

代入①得 $$R \leqslant R - \frac{b}{2} \cdot \tan \frac{\omega}{2} + \frac{c}{2}$$

$$\frac{b}{2} \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant \frac{c}{2}$$

所以

$$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant c \quad ②$$

又因在 $\triangle ACM$ 与 $\triangle ABM$ 中(图 3.20)

$$AM = AM, CM = BM$$

$$\angle AMB = \omega < 90^\circ, \angle AMC = 180^\circ - \omega > 90^\circ$$

可得 $\angle AMB < \angle AMC$,所以 $AB < AC$,即

$$c < b \quad ③$$

由②,③,即得本题有解的必要条件是

$$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant c < b$$

再证条件也是充分的,即当 $b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant c < b$ 时,符合要求的 $\triangle ABC$ 能作出.

事实上,由 $c < b$ 可得

$$NA = \frac{b}{2} > \frac{c}{2}$$

即点 A 在以 N 为圆心,$\frac{c}{2}$ 为半径的圆 N 外.

又由 $b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant c$ 可知

$$NH = \frac{b}{2} \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqslant \frac{c}{2}$$

即点 H 不在圆 N 外.

当 $b \cdot \tan \frac{\omega}{2} < c$ 时,$NH < \frac{c}{2}$,即点 H 在圆 N 内.这时 $\overset{\frown}{AkC}$ 上有一点 A 在圆 N 外,又有一点 H 在圆 N 内,所以 $\overset{\frown}{AkC}$ 与圆 N 必定相交,即点 M 可以作出,进而 $\triangle ABC$ 可作出.并且 $\overset{\frown}{AkC}$ 与圆 N 有两个交点,所以这时本题有两解(在图 3.20 中,这两个交点为 M,M',由点 M' 可按作法 3),4) 作出另一个符合要求的三角形).

当 $b \cdot \tan \frac{\omega}{2} = c$ 时,$NH = \frac{c}{2}$,$\overset{\frown}{AkC}$ 与圆 N 只有一个交点 H,即点 M 与点 H 重合,这时 $AB \parallel NM \perp AC$,故 $\angle BAC = 90^\circ$.即所作的 $\triangle ABC$ 是一个直角三角形,如图 3.22 所示.

综上所述,当且仅当 $b \cdot \tan\frac{\omega}{2} < c < b$ 时,本题有两解.

当且仅当 $b \cdot \tan\frac{\omega}{2} = c < b$ 时,本题有且仅有一解,$\triangle ABC$ 是直角三角形($\angle A = 90°$).

本题的讨论,也可以从两圆相交的充要条件入手,现扼要说明如下.

注意到,前面已知 $c < b$,而 L 为 AC 的中点,又

$$OA = \frac{b}{2} \cdot \csc \angle AOL = \frac{b}{2} \cdot \csc \delta > \frac{c}{2}$$

所以 L 为圆 AMC 的内点.因此,它们相交的充要条件是

$$OA - LM \leqslant OL = \frac{b}{2} \cdot \cot \delta$$

即
$$\frac{b}{2} \cdot \csc \delta - \frac{c}{2} \leqslant \frac{b}{2} \cdot \cot \delta$$

等号当它们相内切时成立.由此立即得到

$$b(\csc \delta - \cot \delta) \leqslant c$$

即
$$\frac{b}{2} \cdot \tan\frac{\delta}{2} \leqslant c < b$$

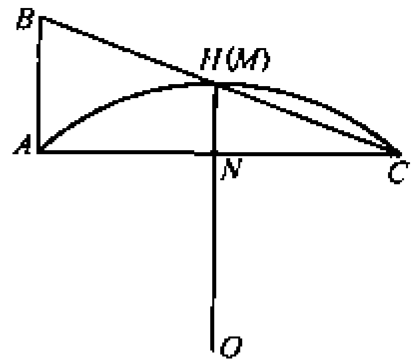


图 3.22

6 已知平面 E 和在其同侧的不共线的三点 A,B,C,且过这三点的平面不平行于 E. A',B',C' 是 E 上任意三个点,线段 AA',BB',CC' 的中点为 L,M,N. G 是 $\triangle LMN$ 的重心(这里不包括 L,M,N 不构成三角形的那些 A',B',C').试求 A',B',C' 在平面上无关地变动时,点 G 的轨迹.

罗马尼亚命题

解法 1 如图 3.23 所示,取平面 E 为坐标平面 $z=0$,以过点 A 且垂直于 E 的直线为 z 轴并以 AB 在 E 上的射影为 x 轴.在这样的空间直角坐标系中,设 A,B,C 三点的坐标分别为

$$A(0,0,a_3),B(b_1,0,b_3),C(c_1,c_2,c_3)$$

因这三点是在平面 E 的同侧,故 a_3,b_3,c_3 同号且都不等于 0.

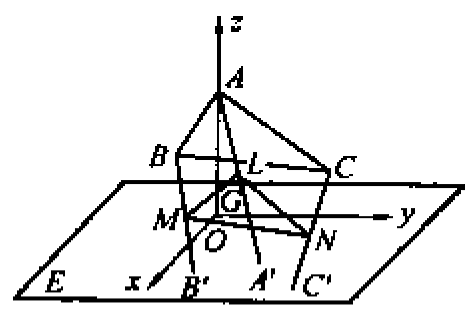


图 3.23

设 E 上三动点的坐标为

$$A'(\alpha_1,\alpha_2,0),B'(\beta_1,\beta_2,0),C'(\gamma_1,\gamma_2,0)$$

则 L,M,N 的坐标分为别

$$L\left(\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_2}{2},\frac{a_3}{2}\right),M\left(\frac{b_1+\beta_1}{2},\frac{\beta_2}{2},\frac{b_3}{2}\right),N\left(\frac{c_1+\gamma_1}{2},\frac{c_2+\gamma_2}{2},\frac{c_3}{2}\right)$$

若 $\triangle LMN$ 的重心 G 的坐标为(x,y,z),则

$$x = \frac{1}{6}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+b_1+c_1)$$

$$y = \frac{1}{6}(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2+c_2)$$

$$z=\frac{1}{6}(a_3+b_3+c_3)$$

因 $a_3+b_3+c_3$ 的值是给定的,故 G 的 z 坐标取定值.这说明点 G 的轨迹是和平面 E 平行的平面,这平面位于 A,B,C 三定点的同侧,且与 E 的距离等于 A,B,C 三点与 E 的距离之和的六分之一,亦即等于 $\triangle ABC$ 的重心与 E 的距离的一半.

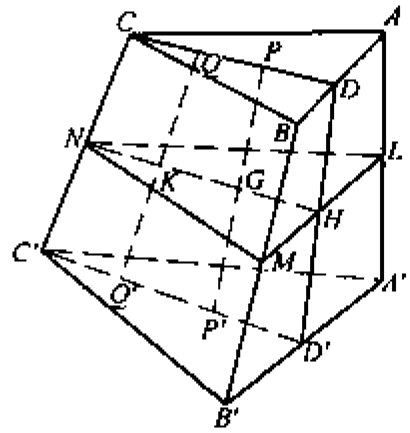


图 3.24

解法2 作 $\triangle ABC$ 的中线 CD,P,Q 顺次为 CD 的三等分点;对应地作 $\triangle A'B'C'$ 的中线 $C'D'$,P',Q' 顺次为 $C'D'$ 的三等分点.为明确,我们约定:P,P' 分别为 $\triangle ABC'$,$\triangle A'B'C'$ 的重心,如图3.24所示.

这样,在空间四边形 $AA'B'B$ 中,D,L,D',M 顺次为其四边中点,因而 $DLD'M$ 为平行四边形,故可设对角线 DD' 与 LM 相互平分于点 H.

同理,在空间四边形 $DD'Q'Q$ 中,取 QQ' 之中点 K,又 H,P,P' 顺次为 $DD',DQ,D'Q'$ 之中点,故 HK 与 PP' 相互平分于 G'.

类似可设:在空间四边形中,$G'N$ 与 QQ' 相互平分于点 K'.

但 QQ' 的中点是惟一的,故 K' 与 K 重合,由此 N,K,G' 三点共线.又已知 H,G',K 三点共线,而过 K,G' 的直线是惟一的,故 N,K,G',H 四点共线.注意到 $NK=KG'=G'H$,则 G' 为 $\triangle LMN$ 的重心,故 G 与 G' 重合,即 G 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的重心连线 PP' 的中点.

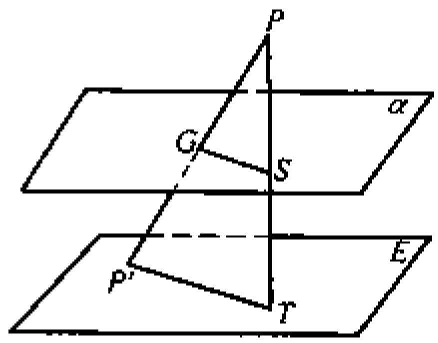


图 3.25

过 $\triangle ABC$ 的重心 P,作直线 $PT\perp$ 平面 E 于点 T,设 S 为 PT 的中点,过 S 作平行于平面 E 的平面 α.显然,点 G 必在平面 α 上,如图3.25所示.

下面我们再证明:平面 α 上的任一点都满足题设条件,参看图3.24.

设 G 为平面 α 上任一点,连结 PG,并延长与平面 E 交于 P'.平面 PTG 与平面 α、平面 E 的交线顺次为 SG 与 TP',因此 $SG\parallel TP'$.而 S 为 PT 之中点,故 G 为 PP' 之中点.

再在平面 E 上任取两点 A',B'.连结 AA',BB',并分别取 L,M,D' 依次为 $AA',BB',A'B'$ 的中点,则 DD',LM 相互平分于 H.

连结 $D'P'$,并延长至 C',使 $D'C'=3D'P'$.连结 CC',取 CC' 的中点 N.那么,G 必是 $\triangle LMN$ 的重心.

事实上,取 $C'P'$ 的中点 Q',取 QQ' 的中点 K,连结 NG 与 KH,则在空间四边形 $CC'P'P$ 中,NG 与 QQ' 相互平分,故 NG 过 QQ' 的中点 K,即 N,K,G 三点共线,且 $NK=KG$.同理,在空间四边形 $QQ'D'D$ 中,KH 与 PP' 相互平分,故 KH 过 PP' 之中点 G,即 K,G,H 三点共线,且 $KG=GH$.由此可知,N,K,G,H 四点共线,且

$NK = KG = GH$.故 G 为 $\triangle LMN$ 的重心.

综上所述,平面 α 确为点 G 的轨迹.

解法3 由于 A',B',C' 是平面 E 上的动点.对应的 AA',BB',CC' 的中点 L,M,N 也依一定规律而运动.为此,我们先研究 L,M 和 N 的轨迹.

事实上,类似于上面解法1中所说,通过点 P 作 PT 垂直平面 E 于点 T,从而找到平面 α,不难判定:

过 A 作直线 $AT_a \perp$ 平面 E 于点 T_a,过 AT_a 的中点 L_1 作平面 X // 平面 E,则平面 X 即为点 L 的轨迹;

过 B 作直线 $BT_b \perp$ 平面 E 于点 T_b,过 AT_b 的中点 M_1 作平面 Y // 平面 E,则平面 Y 即为点 M 的轨迹;

过 C 作直线 $CT_c \perp$ 平面 E 于点 T_c,过 CT_c 的中点 N_1 作平面 Z // 平面 E,则平面 Z 即为点 N 的轨迹.

类似地,还可以进一步判断.线段 LM 的中点 H 的轨迹是:平面 X 与平面 Y 的中平行面 W,如图3.26所示.

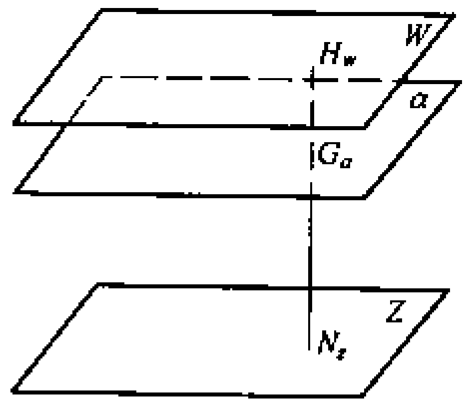


图 3.26

注意到,不论点 H,N 分别在平面 W 和 Z 上的位置如何,点 G 恒满足条件

$$\frac{HG}{GN}=\frac{1}{2}$$

因此,G 必在到平面 W 的距离与到平面 Z 的距离之比 $\frac{H_WG_a}{G_aN_z}=\frac{1}{2}$ 的平面 α 上.显然,平面 α // 平面 W // 平面 Z.

下面我们证明:平面 α 上任意一点 G 满足题设条件.

如图3.27所示,在平面 Z 上任取一点 N,连结 NG 与平面 W 交于点 H,则 $\frac{HG}{GN}=\frac{1}{2}$.

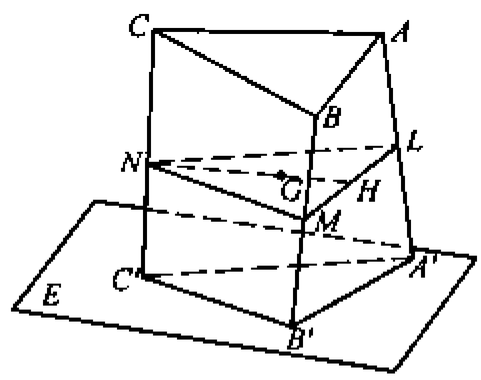


图 3.27

过 H 任意引直线与平面 X 及平面 Y 分别交于 L 及 M.由于平面 W 是平面 X 和平面 Y 的中平行面,则必有

$$LH = HM$$

由此,NH 为 $\triangle LMN$ 的中线,G 为 $\triangle LMN$ 的重心.

又分别连结 AL,BM,CN 并延长之与平面 E 顺次交于点 A',B',C',据解法1的证明,易知 L,M,N 分别为 AA',BB',CC' 的中点.因此,G 合于题设条件,亦即平面 α 为所求轨迹.

第 4 届国际数学奥林匹克

捷克斯洛伐克，1962

波兰命题

1 求具有下列性质的最小自然数 n：

(1) 它用十进制表示时，末位数字为 6.

(2) 如果把数字 6 移到第一位之前，所得的数是 n 的 4 倍.

解法 1 设 n 是 $m+1$ 位数并设删去末位数字 6 后余下的数为 x，则依题意得

$$4(10x+6)=6\cdot 10^m+x$$

即

$$39x=6\cdot 10^m-24$$

所以

$$x=\frac{2(10^m-4)}{13}$$

可知 10^m-4 是 13 的倍数.

设 $10^m-4=\underbrace{99\cdots 9}_{m-1个}6$，试以 13 除此数，每次的余数在数尾补上 6，看看可否被 13 整除.

```
       7 6 9 2
13 ) 9 9 9 9 ··· 6
     9 1
     ----
       8 9 ············ 第一次的余数8补上9得89，不能被13整除
       7 8
     ----
       1 1 9 ·········· 第二次的余数11补上9，得119，不能被13整除
       1 1 7
     ----
           2 6 ········ 第三次的余数2补上6得26，可被13整除
           2 6
```

故

$$10^m-4=99\,996,(10^m-4)\div 13=7\,692\Rightarrow$$

$$x=2\times 7\,692=15\,384\Rightarrow n=153\,846$$

解法 2 自解法 1 知 10^m-4 是 13 的倍数，应用同余式表示得

$$10^m\equiv 4(\bmod 13)$$

以 10 乘上式两边得

$$10^{m+1}\equiv 40(\bmod 13)\equiv 1(\bmod 13)$$

由初等数论定理知若 t 是使 $10^t \equiv 1 \pmod{13}$ 成立的最小正整数，则 t 是 $\varphi(13)=12$ 的约数，试除后知 $t=6$，从而知 $m=5$，所以

$$n = 10\times\frac{2(10^5-4)}{13}+6 = 153\ 846$$

解法3 设 $n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_26}$ 满足条件(1)(2)，则

$$m = 4n = \overline{6a_ka_{k-1}\cdots a_2}$$

因为 n 的最末一位数字是6，所以 $m=4n$ 的末位数字是4，即 $a_2=4$。将 $a_2=4$ 代入 n 并乘以4，可求得 $a_3=8$，再将 $a_2=4$，$a_3=8$ 代入 n 并乘以4，可求得 $a_4=3$，如此继续下去直至 $m=4n$ 第一次出现某一位上的数字为6为止，求得 $a_5=5$，$a_6=1$，得 $n=153\ 846$ 即为满足条件(1)(2)的最小自然数.

2 求出所有满足不等式

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

的实数 x.

匈牙利命题

解法1 用 $f(x)$ 表示 $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$，因 $f(x)$ 是实数，故 $-1\leqslant x\leqslant 3$，在区间 $[-1,3]$ 内，$f(x)$ 值自 $f(-1)=2$ 连续递减至 $f(3)=-2$，故在这区间内必存在惟一的实数 r 使 $f(r)=\frac{1}{2}$，只要求出 r，则所有在这区间内小于 r 的实数皆能满足原不等式.

现在我们考虑根式方程

$$\sqrt{3-r}-\sqrt{r+1}=\frac{1}{2}$$

两边平方后移项得

$$\sqrt{(3-r)(r+1)}=\frac{15}{8}$$

两边再平方、化简，得到如下关于 r 的二次方程

$$r^2-2r+\frac{33}{64}=0$$

解之得

$$r=1\pm\sqrt{31}/8$$

因 $f(1)=0$，故 $r<1$，可知 $1+\sqrt{31}/8$ 是由平方运算所导进的伪根，故

$$r=1-\sqrt{31}/8$$

所以

$$-1\leqslant x<1-\sqrt{31}/8$$

解法 2　设 x 是这不等式的任一实数解. 首先,将原不等式变形为

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}$$

因为不等式的两边均为正,我们将它两边平方,并进一步化简得到

$$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$$

再次平方、整理,最后得到的不等式为

$$64x^2 - 128x + 33 > 0$$

即
$$(8x - 8 + \sqrt{31})(8x - 8 - \sqrt{31}) > 0$$

因此,得到两个可能的解集,即

$$x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \quad ①$$

或

$$x > 1 + \frac{1}{8}\sqrt{31} \quad ②$$

现在我们进行验根.

由不等式 ①,得

$$3 - x > 2 + \frac{1}{8}\sqrt{31} > 0$$

和

$$x + 1 < 2 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \quad ③$$

要使 $\sqrt{x+1}$ 是实数,必须满足条件 $x + 1 \geqslant 0$,从而得 $x \geqslant -1$. 因此,变数 x 必须满足不等式

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \quad ④$$

容易通过取平方来验证下面等式的正确性,即

$$\sqrt{2 + \frac{1}{8}\sqrt{31}} - \sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}} = \frac{1}{2} \quad ⑤$$

于是,由不等式 ③,得

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2 + \frac{1}{8}\sqrt{31}} - \sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}}$$

从而根据 ⑤ 可知原不等式成立,即

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

由不等式 ② 得

$$\sqrt{3-x} < \sqrt{2 - \frac{1}{8}\sqrt{31}}$$

和
$$\sqrt{x+1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{8}\sqrt{31}}$$

此时，如果原不等式成立，则应有

$$\sqrt{3-x} > \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}$$

从而有
$$\sqrt{2-\frac{1}{8}\sqrt{31}} > \frac{1}{2} + \sqrt{2+\frac{1}{8}\sqrt{31}}$$

这显然与方程 ⑤ 矛盾，故 ③ 不是原不等式的解.

因此，已知不等式的所有解由不等式 ④ 表示.

3 设有立方体 $ABCDA'B'C'D'$（$ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 是相对的平面，其中 $AA' \mathbin{/\!/} BB' \mathbin{/\!/} CC' \mathbin{/\!/} DD'$），点 P 以匀速在 ▱$ABCD$ 的周界上沿 $ABCDA$ 的次序运动. 点 Q 以同样的匀速在 ▱$B'C'CB$ 的周界上沿 $B'C'CBB'$ 的次序运动. P，Q 分别从 A，B' 同时出发，求 PQ 线段中点 R 的轨迹.

捷克斯洛伐克命题

解法 1 如图 4.1 所示，取 D' 为三维直角坐标系的原点，$D'A'$，$D'C'$，$D'D$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正向射线上的线段，我们不妨设立方体的边长为 1，$P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$ 二动点运动的速度亦为 1，则 PQ 中点 R 的坐标为

$$R\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

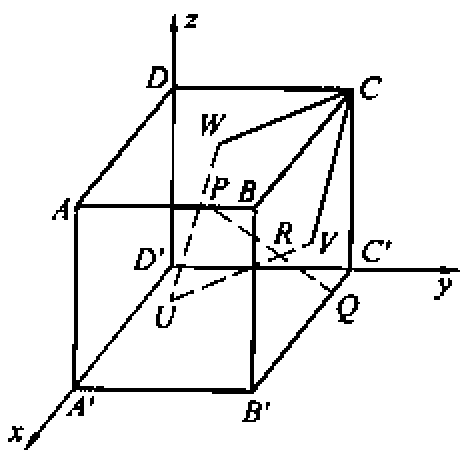


图 4.1

在时间间隔 $i \leqslant t \leqslant i+1$（$i=0,1,2,3$）内，点 P，Q，R 的坐标如下表所示（依照 1960 年竞赛题 5 的方法求得）.

	$0 \leqslant t \leqslant 1$	$1 \leqslant t \leqslant 2$	$2 \leqslant t \leqslant 3$	$3 \leqslant t \leqslant 4$
P	$(1,t,1)$	$(2-t,1,1)$	$(0,3-t,1)$	$(t-3,0,1)$
Q	$(1-t,1,0)$	$(0,1,t-1)$	$(t-2,1,1)$	$(1,1,4-t)$
R	$\left(\frac{2-t}{2},\frac{t+1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{2-t}{2},1,\frac{t}{2}\right)$	$\left(\frac{t-2}{2},\frac{4-t}{2},1\right)$	$\left(\frac{t-2}{2},\frac{1}{2},\frac{5-t}{2}\right)$

自上表知当 $t:0\to1$ 时，点 R 自 AB' 的中点 U 移动至 BC' 的中点 V，它的途径是立方体内的线段 UV；当 $t:1\to2$ 时，点 R 自 V 移动至顶点 C；当 $t:2\to3$ 时，它自点 C 移动至 AC 的中点 W；当 $t:3\to4$ 时，它自 W 移动回到运动的起点 U，这三段的途径是立方体内的线段 VC，CW，WU.

显而易见，$VU \mathbin{/\!/} CW$，$VC \mathbin{/\!/} WU$，因点 R 亦是以匀速进行，它在单位时间内所经的途径等长，故 $UVCW$ 是边长为 $B'C$ 之半（$\sqrt{2}/2$）的菱形.

因点 R 的 x，y，z 的坐标和等于 2，故所求的轨迹是平面 $x+y+z=2$ 上边长等于 $\sqrt{2}/2$ 的菱形.

解法 2 如图 4.2 所示，A_0，B_0，C_0，D_0 分别是棱 AA'，BB'，CC'，DD' 的中点，平面 $A_0B_0C_0D_0$ 记为 α. 设 Z_1，Z_2 分别是 A_0B_0 和 B_0C_0 的中点.

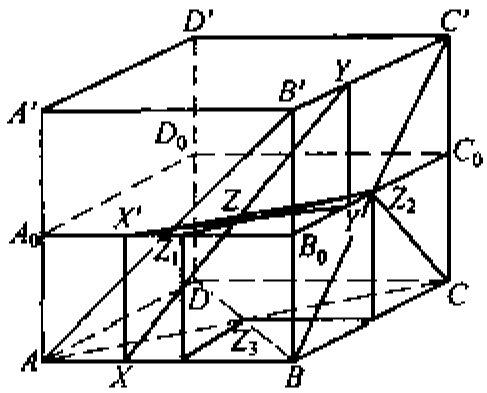


图 4.2

ⅰ 如果点 X 沿 AB 移动，则点 Y 以相同速度沿 $B'C'$ 移动，XY 的中点 Z 在平面 α 上(根据平行截割定理). 若 X 在平面 α 上射影为 X'，Y 在平面 α 上射影为 Y'，则点 Z 也是 $X'Y'$ 的中点. 在此情况下，中点 Z 的轨迹显然是 Z_1Z_2.

ⅱ 如果点 X 在 BC 上移动，点 Y 在 $C'C$ 上移动，则所有直线 XY 都与对角线 BC' 平行，点 Z 的轨迹显然是 Z_2C；

ⅲ 如果点 X 在 CD 上移动，点 Y 在 CB 上移动，则所有直线 XY 都与对角线 BD 平行，点 Z 的轨迹是 CZ_3，其中 Z_3 是正方形 $ABCD$ 的中心，即对角线 BD 的中点.

ⅳ 如果点 X 沿 DA 移动，则点 Y 沿 BB' 移动，则与 ⅰ 相似；点 Z 的轨迹是 Z_3Z_1，这只要适当地变换正方体棱的符号就能证明这一点.

易见，$Z_1Z_2 = Z_2C = CZ_3 = Z_3Z_1$(都等于立方体各面对角线的一半)，且 $Z_1Z_2 \parallel CZ_3$.

XY 的中点 Z 的轨迹是由 Z_1Z_2，Z_2C，CZ_3，Z_3Z_1 为边围成的一个四边形 —— 菱形.

解法 3 如图 4.3 所示，设 E，F，G 顺次为正方形 $A'B'BA$，$B'C'CB$，$ABCD$ 的中心，则菱形 $EFCG$ 的周界即为动线段 XY 的中点 Z 的轨迹. 现在证明如下.

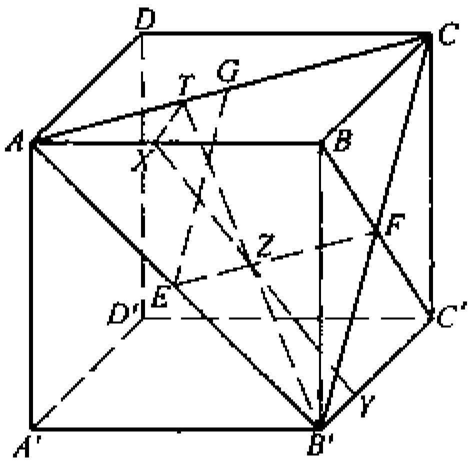


图 4.3

必要性 如果点 Z 是动线段 XY 的中点，则可以区别为以下两种情况.

ⅰ X，Y 分别在某一个定角的两边上，不失其一般性，设 X 从 B 到 C，而 Y 同时由 C' 到 C，由于 X，Y 的速度相等，故其中点 Z 是一簇平行于 BC' 的线段的中点，显然它必在 CF 上.

ⅱ X，Y 分别在两条异面直线上，不失其一般性，设 X 从 A 到 B，而 Y 同时由 B' 到 C'，由于 X，Y 的速度相等，则 $AX = B'Y$.

若 Z 为 XY 的中点，连接 $B'Z$ 并延长与上底面 AC 相交于点 T，连结 XT，则平面 XY 与平面 AC 的交线是 XT. 因 $B'C' \parallel$ 平面 AC，则 $B'C' \parallel XT$. 于是 $\triangle ZB'Y \cong \triangle ZTX$，而 $XT = B'Y = AX$. 又 $XT \parallel BC$，则 $\triangle AXT$ 为等腰直角三角形，$\angle TAX = \frac{\pi}{4}$，即 T 在 AC 上.

此时就 $\triangle B'CT$ 看，根据三角形中位线的性质，不难证明：$FZ \parallel CT$，$EZ \parallel CA$，$FE \parallel CA$. 基于平行的惟一性，显然 Z 在 EF

上.

综合 ⅰ,ⅱ 可知,动线段 XY 之中点必在菱形 $EFCG$ 的周界上.

充分性　若点 Z 在菱形 $EFCG$ 的周界上,同样可以分为下述两种情况.

ⅰ 即 Z 在 CF 或 CG 上,过 Z 作 $XY \parallel BC'$(或 BD),而与 BC 及 CC'(或 CD 及 BC)分别相交于 X 及 Y.根据相似形的有关性质,不难证明:Z 为 XY 的中点,且 $BX = C'Y$(或 $CX = CY$).因此,合于所设条件.

ⅱ 即 Z 在 EF 或 EG 上,不失其一般性,设 Z 在 EF 上,连结 $B'Z$ 延长之,与平面 AC 交于 T,显然 T 在 AC 上,过 T 作 $TX \parallel CB$,交 AB 于 X,则 $TX \parallel C'B'$(平行的传递性).

在平面 $TXB'C'$ 上,连结 XZ,延长后交 $B'C'$ 于点 Y.此时,在 $\triangle B'CA$ 中,由于 F 是 $B'C$ 的中点,而 $EF \parallel AC$,则 Z 为 $B'T$ 的中点.由此可知 $\triangle ZTX \cong \triangle ZB'Y$,从而得 $TX \underline{\parallel} B'Y$,且 Z 为 XY 之中点.又 $TX \parallel BC$,则 $\angle XTA = \angle TAX = \frac{\pi}{4}$.因此有 $TX = AX$,即 $AX = BY$,亦合于所设条件.

综合上述可知,如果 Z 是菱形 $EFCG$ 的周界上任一点,则点 Z 必然是符合条件的动线段 XY 的中点.从而命题得证.

4 解方程

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1 \quad ①$$

罗马尼亚命题

解法 1　因

$$\cos^2 3x = \frac{1}{2}(1 + \cos 6x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

代入 ① 得

$$2\cos^2 2x + \cos 6x + \cos 2x = 0 \quad ②$$

又因

$$\cos 6x + \cos 2x = 2\cos 4x \cdot \cos 2x$$

故 ② 可改写成

$$\cos 2x(\cos 2x + \cos 4x) = 0$$

ⅰ 若 $\cos 2x = 0$,则 $x = \frac{1}{4}(2k + 1)\pi$,$k$ 是整数.

ⅱ 若 $\cos 2x + \cos 4x = 0$,则

$$\cos 4x = -\cos 2x = \cos(\pi - 2x)$$

$$4x = 2k\pi \pm (\pi - 2x)$$

所以 $x = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$ 或 $\frac{1}{6}(2k + 1)\pi$,k 是整数.

解法 2 复数 $z = a + bi$ 可用如下的三角形式表示,即

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\cdot\sin\theta)$$

其中,$r = \sqrt{a^2 + b^2}$,$\tan\theta = b/a$.

由棣美弗(de Moivre)公式知若 $r = 1$,则

$$z^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\cdot\sin n\theta, z^{-n} = \cos n\theta - \mathrm{i}\cdot\sin n\theta$$

所以

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}), \sin n\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z^n - z^{-n}) \quad ③$$

以 θ 代替原方程的未知角 x 得

$$\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta = 1 \quad ④$$

应用 ③ 化 ④ 为如下关于 z 的方程,即

$$(z + z^{-1})^2 + (z^2 + z^{-2})^2 + (z^3 + z^{-3})^2 = 4$$

即 $$(z^2 + 2 + z^{-2}) + (z^4 + 2 + z^{-4}) + (z^6 + 2 + z^{-6}) = 4$$

亦即

$$z^{-6} + z^{-4} + z^{-2} + 1 + z^2 + z^4 + z^6 = -1 \quad ⑤$$

⑤ 的左边是几何级数,其公比为 z^2,$z^2 \neq 1$,因在这种情形下,θ 是 π 的倍数,④ 不能成立,于是 ⑤ 左边求和得

$$\frac{z^{-6} - z^8}{1 - z^2} = -1$$

去分母并以 z^{-1} 乘两边得

$$z^7 - z^{-7} = -(z - z^{-1})$$

应用 ③ 得 $$\sin 7\theta = -\sin\theta = \sin(-\theta)$$

所以 $$7\theta = n\pi + (-1)^n(-\theta)$$

ⅰ 若 $n = 2k$,则 $8\theta = 2k\pi$,所以 $\theta = k\pi/4$,k 是不能被 4 整除的整数.

ⅱ 若 $n = 2k + 1$,则 $6\theta = (2k + 1)\pi$,所以 $\theta = \frac{1}{6}(2k + 1)\pi$,$k$ 是整数.

注 解法 2 的解 $\theta = k\pi/4$(k 是不能被 4 整除的整数),相当于解法 1 的解 $x = \frac{1}{4}(2k + 1)\pi$ 及 $x = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$,$k$ 是任意整数.

解法 3 应用下列公式

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x, 2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$$

通过代换和化简,由已知方程

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

得到

$$\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0 \quad ⑥$$

将⑥的左边前两项化积,得

$$2\cos 3x \cdot \cos x + 2\cos^2 3x = 0$$

即 $$2\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0$$

用和差化积的方法对 $\cos x + \cos 3x$ 变形,又得到

$$4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 0 \quad ⑦$$

方程⑦的解为

$$x_1 = \pm 90° + k \cdot 360°$$

$$2x_2 = \pm 90° + k \cdot 360°$$

$$3x_3 = \pm 90° + k \cdot 360°$$

即

$$x_1 = \pm 90° + k \cdot 360°$$

$$x_2 = \pm 45° + k \cdot 180°$$

$$x_3 = \pm 30° + k \cdot 120°$$

其中,k 为整数.

经过验算,所有这些解都满足原方程(至于原方程无他解,则是显然的).

解法4 $$\cos^2 x + \cos^2 2x - \sin^2 3x = 0$$

$$\cos^2 2x + (\cos x + \sin 3x)(\cos x - \sin 3x) = 0$$

$$\cos^2 2x + (\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin 3x)(\sin(\frac{\pi}{2} + x) - \sin 3x) = 0$$

$$\cos^2 2x + 2\sin(\frac{\pi}{4} + 2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - x) \cdot$$

$$2\sin(\frac{\pi}{4} + 2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$$

$$\cos^2 2x + \sin(\frac{\pi}{2} + 4x) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$$

$$\cos 2x(\cos 2x + \cos 4x) = 0$$

从而得到与⑦一致的方程

$$2\cos 2x \cdot \cos x \cdot \cos 3x = 0$$

5 给出圆周 K 上三个不同的点 A,B,C.试在该圆周上另求一点 D 使四边形 $ABCD$ 可以有一个内切圆.

保加利亚命题

解法1 如图4.5所示,设 $\angle ABC < 90°$.以 AC 为一边,C 为顶点,作角使 $\angle ACX = \angle ABC$.自 A 作 AC 的垂线,交 CX 于 F.以 CF 的中点 M 为圆心,MC 为半径作弧,交 $\angle ABC$ 的平分线于 E.连结 AE,并以 AE 为一边,A 为顶点作 $\angle EAY = \angle BAE$,则 AY 和圆

分析 设 $ABCD$ 是所求作的四边形,则它的内切圆的圆心必定在 $\angle ABC$、$\angle BCD$ 及 $\angle BAD$ 的平分线

K 的交点即是点 D.

若 $\angle ABC > 90°$.则 $\overparen{AEC}$ 和点 B 在 AC 的异侧,作法类似.略.

若 $\angle ABC = 90°$.则 AC 是圆 K 的直径.在圆周上取关于 AC 的 B 的对称点,即是点 D.

我们只证当 $\angle ABC < 90°$ 的情形.

四边形 $AECF$ 内接于以 M 为圆心的圆,故

$$\angle AEC = 180° - \angle AFC = 180° - (90° - \angle ACF) = 90° + \angle ACF = 90° + \angle ABC$$

弧 $\overparen{AC}$ 和 $\angle ABC$ 的平分线的交点 E 和 AB,BC,AY 等距离.若 AY 交圆周 K 于 D,因

$$\angle BCE = 90° - \angle BAE = 90° - \frac{1}{2}\angle BAD$$

故 EC 平分 $\angle BCD$,即 E 是四边形 $ABCD$ 内切圆的圆心.故 D 是所求的 K 上的适合所给条件的点.

注 我们不难证明点 D 必定存在,虽然本题没有这样要求.

凸四边形 $ABCP$ 可以有一个内切圆的充要条件是

$$AB + PC = BC + AD \qquad ①$$

今若在圆周 K 上给定 A,B,C 三点,而点 P 则沿弧 $\overparen{AC}$ 自点 A 移动至点 C.当 $P = A$ 时,① 的左边较大,而当 $P = C$ 时,则 ① 的左边较小.故当 P 连续移动时,① 的左边连续地由大变小,故在 $\overparen{AC}$ 之间必有一点 $P = D$ 使得等式 ① 成立.

解法 2 四边形 $ABCD$ 存在内切圆的充分必要条件是

$$AD + BC = AB + CD \qquad ②$$

下面分三种可能情况来讨论.

ⅰ 如图 4.6 所示,如果 $AB = BC$,则由 ② 可知 $AD = CD$,即点 D 在 AC 的垂直平分线上,即在过点 B 的一条直径上.所以只要过点 B 作圆 k 的直径,直径的另一个端点就是所求作的点 D.

ⅱ 如图 4.7 所示,如果 $AB < BC$,式 ② 可写为

$$BC - AB = CD - AD$$

假定符合要求的点 D 已作出,在 DC 上截取 $DE = AD$,则有

$$CE = CD - DE = CD - AD = BC - AB$$

即点 E 在以 C 为圆心,$BC - AB$ 为半径的圆周 k_1 上.

另一方面,A,B,C,D 在同一圆周 k 上,必须且只须

$$\angle ADC + \angle ABC = 180°$$

BE,CE 及 AE 上,如图 4.4 所示.因 $\angle BCD$ 和 $\angle BAD$ 互为补角,$\angle BCE + \angle BAE = 90°$.

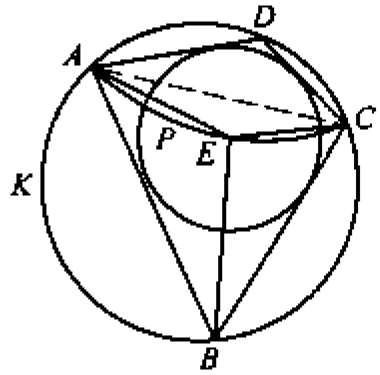


图 4.4

所以

$$\angle AEC = \angle BCE + \angle CBE + \angle BAE + \angle ABE = 90° + \angle ABC$$

作弧 $\overparen{APC}$ 使弓形 APC 所含的角为 $90° + \angle ABC$.这弧和 $\angle ABC$ 的平分线的交点,即是内切圆的圆心 E.从而点 D 可以作出.

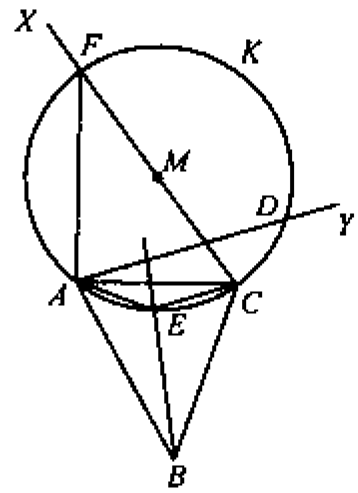


图 4.5

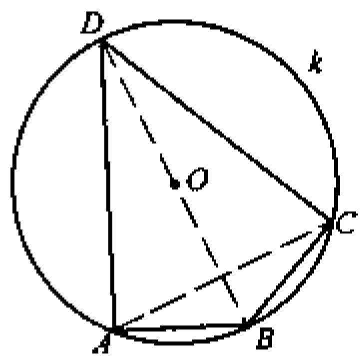


图 4.6

所以 $\angle AEC = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle ADC) =$

$$90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADC = 90^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) =$$

$$180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$$

即点 E 在线段 AC 上圆周角等于 $180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$ 的弓形弧 b_1 上(弓形弧 b_1 与点 B 分布在 AC 的两侧).

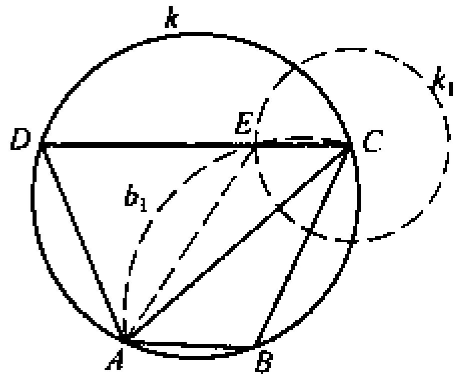


图 4.7

据此可得作法:以 C 为圆心,$BC - AB$ 为半径作圆 k_1;在线段 AC 上作圆周角等于 $180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$ 的弓形弧 b_1;设圆 k_1 与弓形弧 b_1 相交于点 E,连结 CE 并延长与圆周 k 的交点即为所求作的点 D.

ⅲ 如果 $AB > BC$,可仿照 ⅱ 作出.

解法 3 若点 D 已求出,由于四边形 $ABCD$ 有内切圆,则

$$AB + CD = AD + BC \qquad ③$$

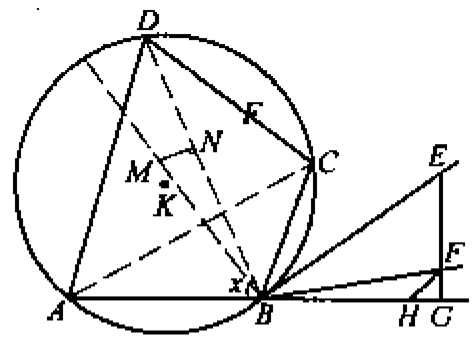


图 4.8

为方便计,连结 AC,取圆 K 之半径为 R,$\angle ABC = \beta$,$\angle ACB = \alpha$,$\angle BAC = \gamma$,以上均为定值,并且不妨约定 $\alpha \geqslant \gamma$.又连结 BD,如图 4.8 所示,设 $\angle ABD = x$,则 $\angle DBC = \beta - x$.

于是,由 ③ 得

$$2R(\sin\alpha + \sin(\beta - x)) = 2R(\sin\gamma + \sin x)$$

$$\sin x - \sin(\beta - x) = \sin\alpha - \sin\gamma$$

$$2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{2x-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{2x-\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \qquad ④$$

注意到 $ABCD$ 内接于圆 K,$\beta + (\alpha + \gamma) = \pi$,故有

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\gamma}{2}, \cos\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

因而由 ④ 得

$$\sin(x - \frac{\beta}{2}) = \cot\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2} \qquad ⑤$$

其中,$\cot\frac{\alpha+\gamma}{2}$,$\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$ 均为已知角的三角函数值,所以 $\sin(x - \frac{\beta}{2})$ 可以作出.

作法

1) 作 $\angle ABC$ 的外角 $\angle CBG$ 的平分线 BE,又在 $\angle EBG$ 的内部作 $\angle EBF = \angle CAB = \gamma$;

2) 过 BE 上任一点 E 作 $EF \perp BG$ 于 G,且与 BF 相交于 F,又过 F 作 $FH \parallel EB$ 与 BG 相交于 H;

3) 作 $\angle ABC$ 的平分线 BM,取 $BM = BF$,又在 $\angle CBM$ 的内部作 Rt$\triangle BMN$,使 $\angle MNB = \frac{\pi}{2}$,$MN = HG$;

4) 延长 BN 与圆 K 交于 D,分别连结 CD 与 AD,则 $ABCD$ 即为所求的四边形,如图 4.8 所示.

现在对作图进行证明.

(1) 由作法知

$$\angle EBG = \frac{1}{2}\angle CBG = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

$$\angle FBG = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$$

于是
$$\cot\frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{BG}{EG}, \sin\frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{FG}{BF}$$

(2) 在 Rt$\triangle BGE$ 中,显然有 $\frac{FG}{EG} = \frac{HG}{BG}$(平行截割定理),故 $HG = \frac{FG \cdot BG}{EG}$. 于是,由 ⑤ 得

$$\sin(x - \frac{\beta}{2}) = \cot\frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \gamma}{2} =$$

$$\frac{BG}{EG} \cdot \frac{FG}{BF} = \frac{\frac{BG \cdot FG}{EG}}{BF} = \frac{HG}{BF}$$

(3) 在 Rt$\triangle BMN$ 中

$$\sin\angle MBN = \frac{MN}{BM} = \frac{HG}{BF} = \sin(x - \frac{\beta}{2})$$

则
$$\angle MBN = x - \frac{\beta}{2}$$

从而
$$\angle ABN = (x - \frac{\beta}{2}) + \frac{\beta}{2} = x, \angle DBC = \beta - x$$

(4) 注意到由 ③ 推得 ④,又由 ④ 导出 ⑤,在这些三角函数式的恒等变形中的每一步都是可逆的,因此不难推出

$$2R(\sin\alpha + \sin(\beta - x)) = 2R(\sin\gamma + \sin x)$$

$$2R \cdot \sin\alpha + 2R \cdot \sin\angle DBC = 2R \cdot \sin\gamma + 2R \cdot \sin\angle ABD$$

这样,$AB + CD = AC + BD$,即四边形 $ABCD$ 有内切圆;又已知点 D 在圆 K 上,所以四边形 $ABCD$ 合于所设条件.

下面转至对作图的讨论.

因为 $\frac{BG}{BF} < 1$,$\frac{FG}{EG} < 1$,所以

$$\sin(x - \frac{\beta}{2}) = \frac{BG}{EG} \cdot \frac{FG}{BF} = \frac{BG}{BF} \cdot \frac{FG}{EG} < 1$$

因此 $x - \frac{\beta}{2}$ 是惟一存在的,故本题恒有一解.

6 已知一个等腰三角形,其外接圆的半径为 r,内切圆的半径为 R.求证:外接圆和内切圆的圆心距离为

$$d = \sqrt{r(r-2R)}$$

民主德国命题

证法 1 设所给的等腰三角形腰长为 S,O 为外接圆圆心,I 为内切圆圆心,顶角 $\angle BAC = \alpha$.我们把问题分为如下三种情况.

ⅰ 设顶角 $\alpha \leqslant 60°$,如图 4.9 所示.

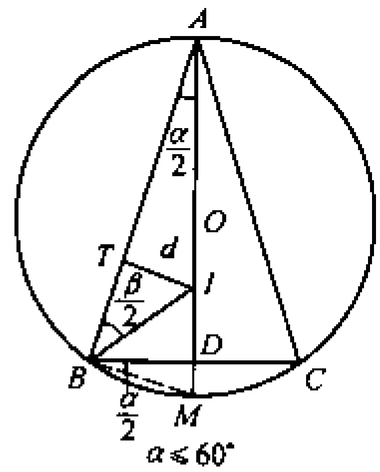


图 4.9

在 $\triangle ABI$ 中,$\angle BAI = \frac{\alpha}{2}$,$\angle ABI = \frac{\beta}{2}$($\beta$ 为底角),所以

$$\angle BIM = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

又 $\angle MBC = \frac{\alpha}{2}$,故

$$\angle MBI = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

可知 $\triangle MBI$ 是等腰三角形.所以

$$MB = IM = r - d$$

若 T 是内切圆在 AB 边上的切点,则 $\mathrm{Rt}\triangle ATI \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABM$,有

$$IT : BM = AI : AM \Rightarrow \frac{R}{r-d} = \frac{r+d}{2r} \Rightarrow$$

$$r^2 - d^2 = 2rR \Rightarrow d = \sqrt{r(r-2R)}$$

若 $\alpha = 60°$,则 O 和 I 重合.这时 $r = 2R$,$d = 0$.故

$$d = \sqrt{r(r-2R)}$$

仍能成立.

ⅱ 设顶角 $60° < \alpha \leqslant 90°$,如图 4.10 所示.

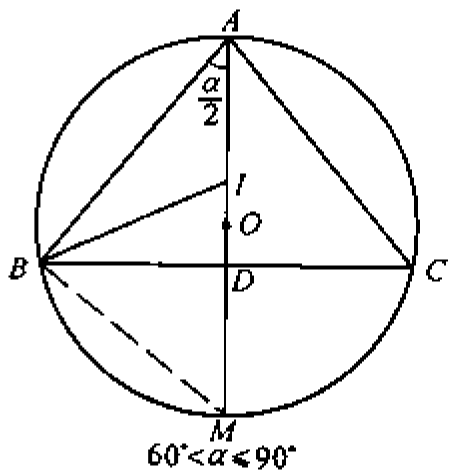


图 4.10

在这种情形下有

$$\angle BIM = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\angle IBM = \frac{\beta}{2} + \angle CBM = \frac{\beta}{2} + \angle CAM = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

故 $\triangle MBI$ 仍是等腰三角形.余下的证明和 ⅰ 类似,故从略.

若 $\alpha = 90°$,则 O 在 BC 上,这时 $r = (\sqrt{2}+1)R$,$d = R$,从而

$$\sqrt{r(r-2R)} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)R^2} = R = d$$

故求证的式子仍成立.

ⅲ 设顶角 $\alpha > 90°$.

证法和 ⅰ,ⅱ 类似,故从略.

证法 2 设 BC 边上的高 $AD = h$,则

$$h = r + d + R$$

令 $\angle ABD = \angle ACD = \beta$.在 $\triangle ADC$ 中

$$h = S \cdot \sin\beta$$

在 $\triangle ABM$ 中

$$AB/AM = S/2r = \sin\angle AMB = \sin\beta$$

所以

$$r = \frac{S}{2\sin\beta}$$

在 $\triangle BID$ 中

$$R = BD \cdot \tan\frac{\beta}{2}$$

$$BD = DC = S \cdot \cos\beta$$

所以

$$R = S \cdot \cos\beta \cdot \tan\frac{\beta}{2} = \frac{S \cdot \cos\beta(1 - \cos\beta)}{\sin\beta}$$

所以

$$d = h - r - R = \frac{S}{2\sin\beta}(2\sin^2\beta - 1 - 2\cos\beta + 2\cos^2\beta) = \frac{S(1 - 2\cos\beta)}{2\sin\beta}$$

所以

$$r^2 - 2rR = \frac{S^2}{4\sin^2\beta} - \frac{S^2}{\sin\beta} \cdot \frac{\cos\beta(1 - \cos\beta)}{\sin\beta} = \frac{S^2(1 - 2\cos\beta)^2}{4\sin^2\beta} = d^2$$

即

$$\sqrt{r(r - 2R)} = d$$

注 本题用到关于三角形的外接圆及内切圆的欧拉(Euler)定理.

定理 在任意三角形中,若其外接圆及内切圆的半径分别为 r 及 R,则其外心与内心的距离 d 满足

$$d^2 = r^2 - 2rR$$

定理的证明 设 $\triangle ABC$ 为任意三角形,O,I 分别为其外心及内心,如图 4.11 所示,引 $OD \perp AB$,则

$$\angle IAD = \frac{\angle A}{2}, \angle OAD = \frac{\pi}{2} - \angle AOD = \frac{\pi}{2} - \angle C$$

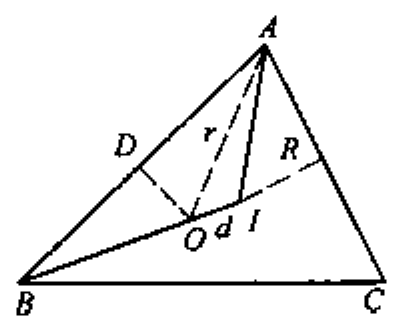


图 4.11

不妨设 $\angle C > \angle A$,则

$$\angle OAI = \frac{\angle A}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \angle C\right) = \frac{\angle A - (\angle A + \angle B + \angle C) + 2\angle C}{2} = \frac{\angle C - \angle B}{2}$$

$$AO = r$$

$$AI = R\Big/\sin\frac{A}{2} = 4r \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{A}{2} = 4r \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

在 $\triangle IOA$ 中,有

$$OI^2 = AO^2 + AI^2 - 2AO \cdot AI \cdot \cos\angle OAI =$$
$$r^2 + 16r^2 \cdot \sin^2\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2} -$$
$$8r^2 \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C-B}{2} =$$
$$r^2 + 8r^2 \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}(2\sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} -$$
$$\cos\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} - \sin\frac{C}{2} \cdot \sin\frac{B}{2}) =$$
$$r^2 - 8r^2 \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{B+C}{2} =$$
$$r^2(1 - 8\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}) =$$
$$r^2 - 2r \cdot 4r \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} =$$
$$r^2 - 2rR$$

证法 3 如图 4.12 所示,连结 CI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 F,连结 BI,BF.因为

$$\angle ABI = \angle IBC, \angle FBA = \angle ACF = \angle ICB$$

而 $$\angle FIB = \angle IBC + \angle ICB, \angle FBI = \angle ABI + \angle FBA$$

所以 $$\angle FIB = \angle FBI$$

所以 $$FB = FI$$

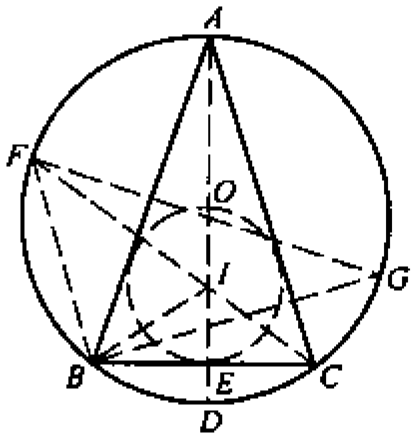


图 4.12

连结 FO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 G,连结 BG.在 $\triangle IEC$ 与 $\triangle FBG$ 中,因为

$$\angle IEC = \angle FBG = 90°, \angle ICE = \angle FGB$$

所以 $\triangle IEC \backsim \triangle FBG$,从而

$$\frac{CI}{GF} = \frac{IE}{FB}$$

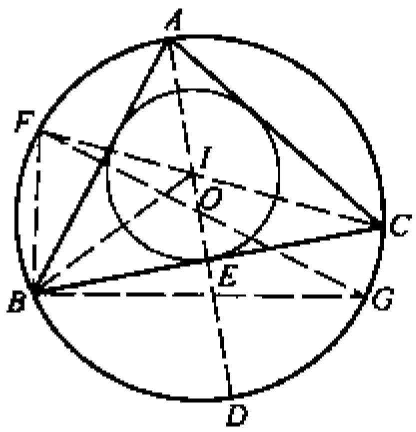


图 4.13

因为 $GF = 2r$,$IE = p$,$FB = FI$,故得

$$CI \cdot FI = 2rp$$

又因为 $$CI \cdot FI = AI \cdot DI$$

而 $$AI \cdot DI = (r+d)(r-d)$$

(当 $\angle A \leqslant 60°$ 时,如图 4.12 所示,$AI = r + d$,$DI = r - d$;当 $\angle A > 60°$ 时,如图 4.13 所示,$AI = r - d$,$DI = r + d$)

所以 $$(r+d)(r-d) = 2rp$$

得 $$d^2 = r^2 - 2rp$$

即 $$d = \sqrt{r(r-2p)}$$

证法 4 (1)若外心 O 在等腰 $\triangle ABC$ 形内,如图 4.14 所示,由

于 $\triangle AIJ \backsim \triangle AMB$ 得

$$\frac{AI}{IJ} = \frac{AM}{BM}$$

由 $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \angle IAC + \angle IBC = \angle CBM + \angle IBC = \angle IBM$

所以 $IM = BM$

因此 $$\frac{AI}{IJ} = \frac{AM}{IM}$$

即 $$\frac{R+d}{r} = \frac{2R}{R-d}$$

化简可得 $d = \sqrt{R(R-2r)}$

(2) 若外心 O 在等腰 $\triangle ABC$ 形外，如图 4.15 所示，同理可证 $\triangle AIJ \backsim \triangle AMB$，且 $IM = BM$，所以由 $\frac{AI}{IJ} = \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{IM}$ 得

$$\frac{R-d}{r} = \frac{2R}{R+d}$$

化简可得 $d = \sqrt{R(R-2r)}$

(3) 若外心 O 在等腰 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 上，如图 4.16 所示，直接验证可知

$$d = \sqrt{R(R-2r)}$$

综上可知对圆内接等腰 $\triangle ABC$，等式 $d = \sqrt{R(R-2r)}$ 总成立.

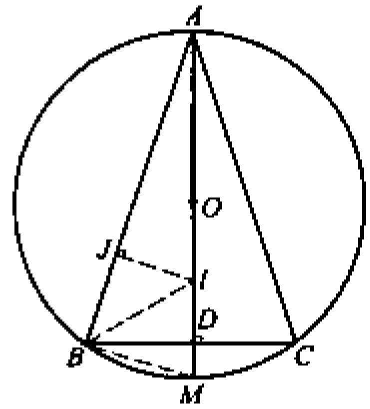


图 4.14

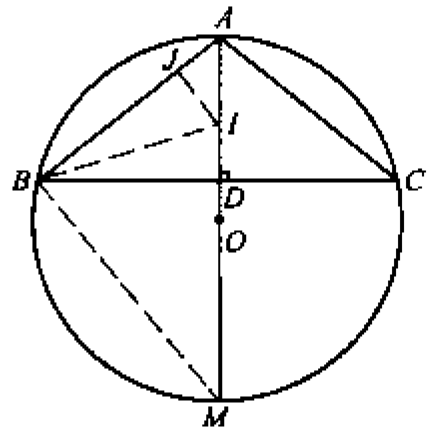


图 4.15

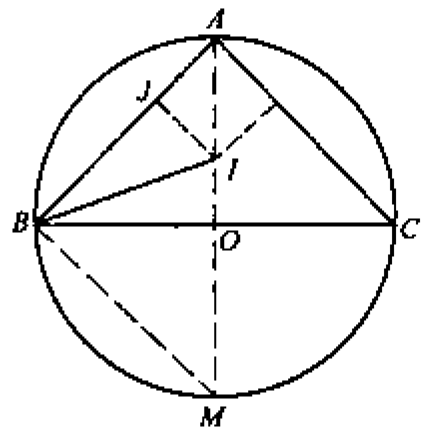


图 4.16

证法 5 设 $\triangle ABC$ 是底边为 BC 的等腰三角形，则其外心 S，内心 O 都在底边之高 AM 或其延长线上，如图 4.17 所示.

取顶角 $\angle BAC = \alpha$，若 α 是锐角，则外心 S 在 $\triangle ABC$ 之内，距底边 BC 为 $R \cdot \cos \alpha$ 个长度单位，如图 4.17(a) 所示，在这种情形下得到的距离

$$d = SO = | r - R \cdot \cos \alpha |$$

若 α 是直角，则外心 S 和垂足 M 重合，如图 4.17(b) 所示，此时

$$d = r = | r - R \cdot \cos \alpha |$$

若 α 是钝角，则外心 S 在 $\triangle ABC$ 之外，如图 4.17(c) 所示，它与底边的距离是

$$R \cdot \cos(\pi - \alpha) = -R \cdot \cos \alpha$$

所以也有

$$d = SO = r - R \cdot \cos \alpha = | r - R \cdot \cos \alpha |$$

因此，在所有情形下都有

$$d = | r - R \cdot \cos \alpha | \qquad ①$$

现在我们设法用 R 和 r 来表示 $\cos \alpha$，注意到在所有的情形

下,有

$$BM = R \cdot \sin \alpha \quad ②$$

此外,在 $\triangle BMO$ 中,因为

$$\angle OBM = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}$$

则 $$\angle BOM = 90^\circ - \angle OBM = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}$$

从而有

$$BM = r \cdot \tan(45^\circ + \frac{\alpha}{4}) \quad ③$$

由②及③得到

$$R \cdot \sin \alpha = r \cdot \tan(45^\circ + \frac{\alpha}{4}) =$$

$$r \cdot \frac{1 + \tan\frac{\alpha}{4}}{1 - \tan\frac{\alpha}{4}} = r \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4}} =$$

$$r \cdot \frac{(\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4})(\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4})}{(\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4})(\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4})}$$

即 $$R \cdot \sin \alpha = r \cdot \frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} = r(1 + \sin\frac{\alpha}{2})$$

注意到 $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$,并用正数 $1 + \sin\frac{\alpha}{2}$ 去除,得

$$2R \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} - 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + r = 0 \quad ④$$

又由 $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$,得

$$-R \cdot \cos \alpha = -R + 2R \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2R \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = R - R \cdot \cos \alpha \quad ⑤$$

但由④得

$$2R \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - r \quad ⑥$$

由⑤,⑥得

$$R - R \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - r$$

$$r - R \cdot \cos \alpha = R(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1) \quad ⑦$$

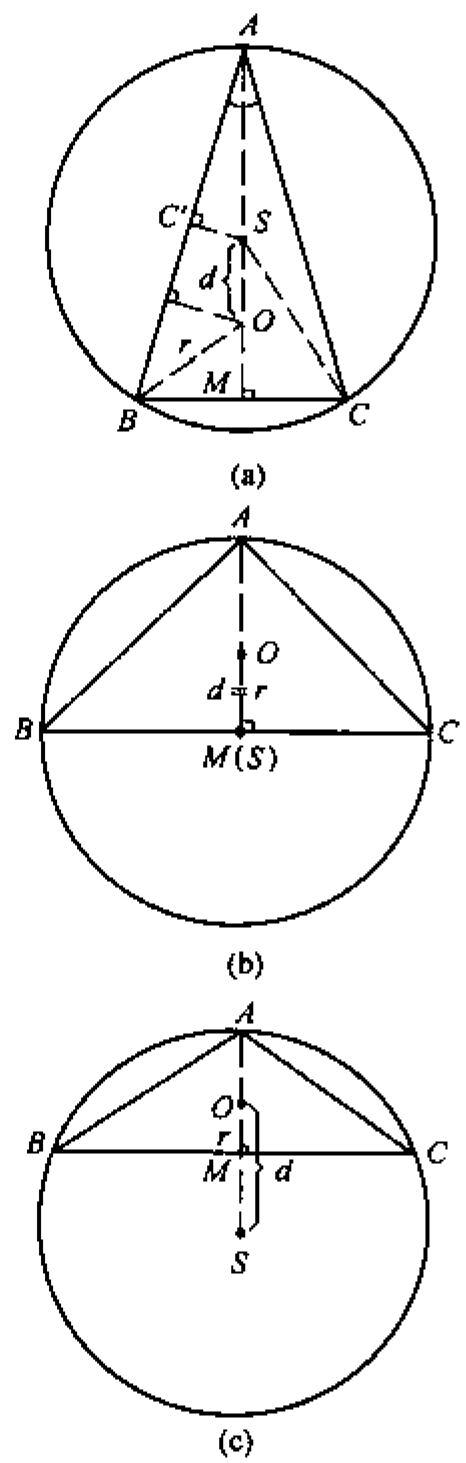


图4.17

将⑦代入①得

$$d=\left|R\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)\right|$$

两边分别平方得

$$d^2=R^2\left(4\sin^2\frac{\alpha}{2}-4\sin\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

$$d^2=R^2+\left(4R^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}-4R^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right) \quad ⑧$$

将⑥代入⑧得

$$d^2=R^2+\left(2R\left(2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}-r\right)-4R^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=R^2-2Rr$$

所以 $$d=\sqrt{R^2-2Rr}=\sqrt{R(R-2r)}$$

证法 6 注意到对于任意等腰 $\triangle ABC$($\angle A$ 为顶角)恒有

$$d=|r-R\cdot\cos A|,\sin\frac{A}{2}=\cos B,\cos\frac{A}{2}=\sin B$$

又 $$r=4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}$$

故

$$d=\sqrt{(r-R\cdot\cos A)^2}=$$

$$\sqrt{16R^2\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^4\frac{B}{2}-8R^2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos A\cdot\sin^2\frac{B}{2}+R^2\cdot\cos^2A}=$$

$$\sqrt{16R^2\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^4\frac{B}{2}-8R^2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos A\cdot\sin^2\frac{B}{2}+R^2(1-\sin^2A)}=$$

$$\sqrt{R^2-R^2\left(8\sin\frac{A}{2}\cdot\cos A\cdot\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2A-16\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^4\frac{B}{2}\right)}$$

其中 $8\sin\frac{A}{2}\cdot\cos A\cdot\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2A-16\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^4\frac{B}{2}=$

$$4\sin\frac{A}{2}\left(2\cos A\cdot\sin^2\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}-4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^4\frac{B}{2}\right)=$$

$$4\sin\frac{A}{2}\left(2\cos A\cdot\sin^2\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2B-4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^4\frac{B}{2}\right)=$$

$$4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\left(2\cos A+4\sin\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}-4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\right)=$$

$$4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\left(2\cos A+4\sin\frac{A}{2}\cdot\cos B\right)=$$

$$4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\left(2\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)+4\sin^2\frac{A}{2}\right)=$$

$$8\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}$$

因此 $$d=\sqrt{R^2-R^2\cdot8\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}}=$$

$$\sqrt{R^2-2R\cdot4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}=$$

$$\sqrt{R^2-2Rr}=\sqrt{R(R-2r)}$$

事实上，本题的结论对于任意三角形都是成立的，下面再给出一种一般性证法.

证法 7　如图 4.18 所示，O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 外接圆和内切圆的圆心，连结 OI 交圆 O 于 K，L 两点；又连结 CI，BI，并延长分别交圆 O 于 M，N 两点. 则

$$KI\cdot IL=CI\cdot IM \tag{9}$$

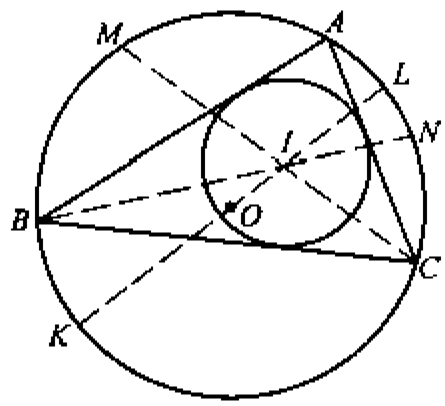


图 4.18

一方面，有

$$KI\cdot IL=(KO+OI)(OL-OI)=(R+d)(R-d)=R^2-d^2 \tag{10}$$

另又作 $ID\perp BC$ 于 D，于是有

$$CI=\frac{ID}{\sin\angle ICB}=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$$

连结 BM，在 $\triangle MIB$ 中

$$\angle MIB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{NC})$$

$$\angle MBI=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{MA}+\overset{\frown}{AN})$$

因为 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MA}$，$\overset{\frown}{NC}=\overset{\frown}{AN}$，故 $\angle MIB=\angle MBI$，由此

$$IM=BM=2R\cdot\sin\angle BCM=2R\cdot\sin\frac{C}{2}$$

于是

$$CI\cdot IM=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\cdot 2R\cdot\sin\frac{C}{2}=2Rr \tag{11}$$

最后，将⑩与⑪代入⑨，得

$$R^2-d^2=2Rr$$

所以

$$d=\sqrt{R(R-2r)}$$

7 设一个四面体 $SABC$ 具有如下性质：存在着五个球和它的棱 SA，SB，SC，AB，BC，CA 或其延长线相切，求证：

(1) $SABC$ 是正四面体.

(2) 反之，对每一个正四面体都有这样的五个球存在.

苏联命题

证法 1　设球 $\sum$ 和 $SABC$ 的六条棱或其延长线相切，则 $\sum$ 和 $SABC$ 各面各截成一个圆. 这个圆是对应面上三角形的内切圆或旁切圆，而且与某一棱相邻的两个面上的圆切于该棱上同一点.

(1) 现在我们考虑以下两种情况.

ⅰ 如图 4.19 所示,球和六条棱的切点都在棱上.这时球面 $\sum$ 必定过某一面 $\triangle ABC$ 内切圆与三边的切点 P,Q,R,而且还通过 $\triangle SAB$ 内切圆与 SA 的切点 T. P,Q,R,T 不在同一直线上,故 T 与 P,Q,R 不共面.过 P,Q,R,T 可确定一个惟一的外接球.所以在这一情况下,球是惟一的.

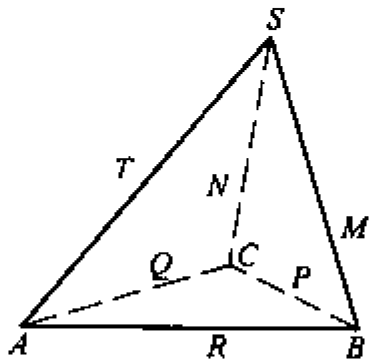


图 4.19

ⅱ 如图 4.20 所示,若球与一边的切点是在四面体外,可以证明这样的球不超过四个,且每一面对应一球.

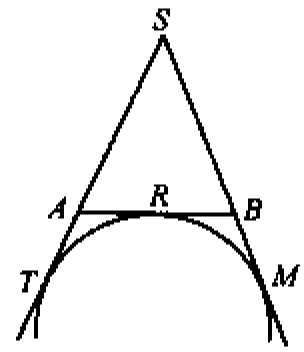


图 4.20

设 $SA=a'$, $SB=b'$, $SC=c'$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$,并设 T,M,N,P,Q,R 是在情况 ⅰ 下球和这六条棱的切点,则

$$ST=SM=SN, AT=AQ=AR$$

$$BM=BP=BR, CN=CP=CQ$$

因 $AT+TS=AS$, $BP+PC=BC$, $\cdots$.故

$$a'+a=b'+b=c'+c \qquad ①$$

现在考察在情况 ⅱ 下对应于 $\triangle SAB$ 那一面的球.这时

$$ST-AT=SA, SM-BM=SB, AR+RB=AB$$

而且 $SN-CN=SC$, $BP+PC=BC$, $AQ+QC=AC$

从而得

$$a'-a=b'-b=c-c' \qquad ②$$

由 ①,② 得

$$a'=b'=c, a=b=c'$$

再考察对应于 $\triangle ABC$ 那一面的球,可得 $a=b=c$,所以

$$a'=b'=c'=a=b=c$$

即 $SABC$ 是一个正四面体.

(2) 如图 4.21 所示,设 $SABC$ 是正四面体,G 是它的重心(若 E,F 分别是 AS 和 BC 的中点,则 G 是 EF 的中点).点 G 和各条棱等距离,故可作一内切球.

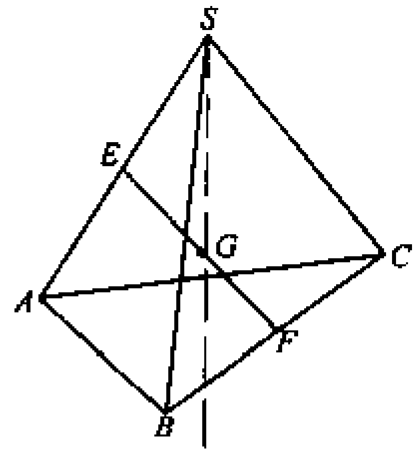


图 4.21

如果以 SG 为轴把 $SABC$ 旋转 $120°$,则 S,G 两点不变,A 移至 B,B 移至 C,C 移至 A.故原四面体和经过这样变换后的四面体并无二致.可知以 SG 上任意一点为中心的球,若与 SA 相切,亦必与 SB,SC 的延长线相切,若与 AB 相切,亦必与 AC,BC 相切.

在对应于 $\triangle SAB$ 的平面上,作 $\angle SAB$ 的外角平分线,过此线作平面使其垂直于含 $\triangle SAB$ 的平面.若 X 是所作的平面和 SG 的交点,则 X 和 SA,AB 等距离.以 X 为球心可作一个适合情况 ⅱ 的球.另三个适合情况 ⅱ 的球,可以同样作出.

证法 2 ⅰ 首先指出,由于和四面体六条棱都相切的球的球心到四面体的六条棱的距离都相等,因此,这样的球的球心必定

在已知四面体的三面角的内部，即在四面体的内部，或者在四面体的外部但在四面体的某一三面角的内部.

既然已知存在五个与四面体的六条棱(或其延长线)均相切的球，那么在四面体每一个三面角内部都有两个球的球心，而这样的两个球与四面体的棱或其延长线相切，一个球的球心在四面体的内部，这个球切四面体的六条棱于内点，另一个球的球心在四面体的外部，这个球切四面体的三条棱于内点，而切另三条棱于外点(即延长线上的点).

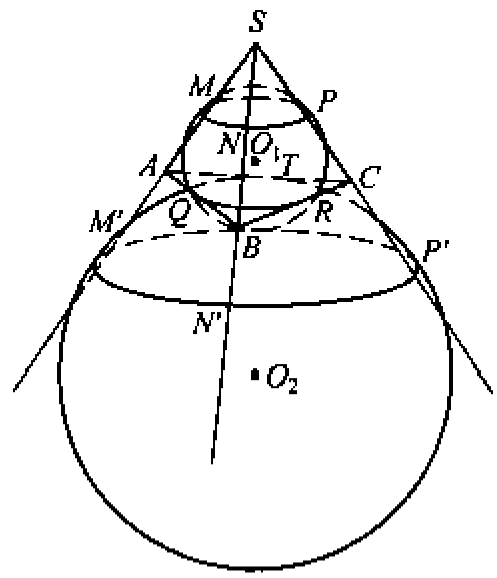


图 4.22

设 O_1 为分别切四面体 $SABC$ 六条棱 SA,SB,SC,AB,BC 与 CA 于内点 M,N,P,Q,R 与 T 的球的球心，O_2 为切四面体 $SABC$ 的三条棱 SA,SB,SC 于延长线上的点 M',N',P'，而与另三条棱切于内点的球的球心，如图 4.22 所示. 现在首先证明球 O_1 和 O_2 分别与棱 AB,BC,CA 相切于相同的点 Q,R,T.

因为，球 O_1 分别切 AB,BC,CA 于 Q,R,T，因此球 O_1 与平面 ABC 所交成的小圆即为过 Q,R,T 的圆，显然这个圆就是 $\triangle ABC$ 的内切圆.

同理，球 O_2 与平面 ABC 所交成的小圆，也是 $\triangle ABC$ 的内切圆，因为 $\triangle ABC$ 的内切圆只有一个，所以这两圆就是同一个圆，球 O_2 与 AB,BC,CA 的切点，也就是 $\triangle ABC$ 的内切圆与 $\triangle ABC$ 的三边的切点 Q,R,T，两个球 O_1 与 O_2 的交线也就是 $\triangle ABC$ 的内切圆.

我们还知道，自球外一点引球的切线，它们的长都是相等的，因此有

$$SM = SN = SP \tag{③}$$

$$SM' = SN' = SP' \tag{④}$$

④ - ③ 得

$$MM' = NN' = PP'$$

又因为

$$AM' = AQ = AM$$

所以

$$AM = \frac{1}{2}MM'$$

同理得

$$BN = \frac{1}{2}NN',\ CP = \frac{1}{2}PP'$$

所以

$$AM = BN = CP \tag{⑤}$$

③ + ⑤ 得

$$SM + AM = SN + BN = SP + CP$$

即

$$SA = SB = SC$$

同理得

$$AS = AB = AC$$

$$BS = BA = BC$$

$$CS = CA = CB$$

所以 $$SA=SB=SC=AB=AC=BC$$

因此,四面体 $SABC$ 为一正四面体.

ii 如果四面体 $SABC$ 为正四面体,并设 M,N,P,Q,R,T 分别为棱 SA,SB,SC,AB,BC,CA 的中点,那么容易知道

$$MR=NT=PQ$$

并有 MR,NT,PQ 三线段交于一点 O_1,且三线段均被 O_1 平分,另外还有

$$MR\perp SA,MR\perp BC,NT\perp SB$$
$$NT\perp AC,PQ\perp SC,PQ\perp AB$$

所以我们如果以 O_1 为球心,O_1M 为半径作球 O_1,那么球 O_1 必与正四面体 $SABC$ 的各棱相切于它们的中点 M,N,P,Q,R,T,如图 4.23 所示.

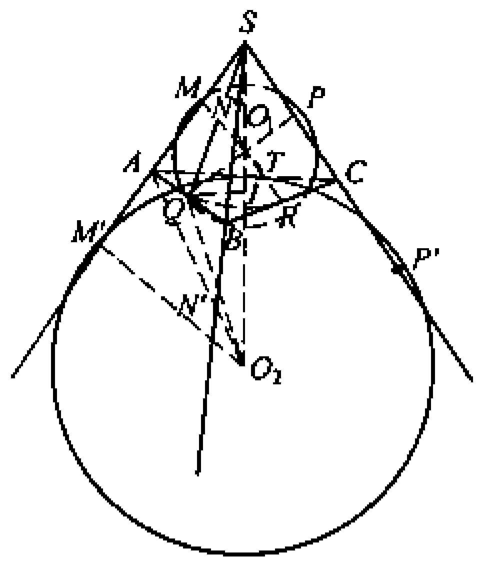


图 4.23

其次,我们在四面体 $SABC$ 的棱 SA,SB,SC 的延长线上分别取 M',N',P',使 $AM'=BN'=CP'=AM$(等于$\frac{1}{2}$四面体棱长),再在两相交直线 SA,SO_1 所决定的平面上,过 M' 作 SA 的垂线交 SO_1 于 O_2,那么显然有

$$\frac{SM}{SM'}=\frac{SO_1}{SO_2}=\frac{O_1M}{O_2M'}$$

因为 $$\frac{SN}{SN'}=\frac{SM}{SM'}$$

所以 $$\frac{SN}{SN'}=\frac{SO_1}{SO_2}$$

从而得 $$O_1N\ /\!/\ O_2N'$$

所以 $$\frac{O_1N}{O_2N'}=\frac{SO_1}{SO_2}=\frac{O_1M}{O_2M'}$$

因为 $$O_1N=O_1M,O_1N\perp SB$$

所以 $$O_2N'=O_2M',O_2N'\perp SB$$

同理得 $$O_2P'=O_2M',O_2P'\perp SC$$

再连 O_2Q,我们来证明 $O_2Q\perp AB$,且 $O_2Q=O_2M'$.

设 SO_1 交平面 ABC 于 I,那么,容易知道 I 是正△ABC 的外心(从而也是内心、垂心),因此 $IQ\perp AB$,又因为 $SQ\perp AB$,所以就有

$$O_2Q\perp AB$$

在 Rt△O_2AM' 与 Rt△O_2AQ 中,因为 $AM'=AQ$,O_2A 公共,所以

$$\text{Rt}\triangle O_2AM'\cong\text{Rt}\triangle O_2AQ$$

从而 $$O_2Q=O_2M'$$

同理可得 $O_2R\perp BC$ 且 $O_2R=O_2N'$ 和 $O_2T\perp AC$ 且 $O_2T=O_2P'$,所以

$$O_2M'=O_2N'=O_2P'=O_2Q=O_2R=O_2T$$

并且 O_2M'，O_2N'，O_2P'，O_2Q，O_2R，O_2T 分别垂直于对应的四面体的棱，所以如果以 O_2 为球心，O_2M' 为半径作球 O_2，那么球 O_2 一定和四面体的六条棱(或其延长线) SA，SB，SC，AB，BC，CA 分别切于点 M'，N'，P'，Q，R，T.

完全同样地我们可以在正四面体 $SABC$ 的另外三个三面角 $A—SBC$，$B—SCA$，$C—SAB$ 内作出类似于球 O_2 的球 O_3，O_4，O_5，它们分别都切于四面体的六条棱(或棱的延长线).

这样，我们就证明了正四面体必定存在五个球，这五个球分别切于四面体的各棱或其延长线.

证法3　设球 Ω 与四面体 $SABC$ 各棱所在的直线都相切，这时球 Ω 被四面体的每一个面相截，截线为对应三角形的内切圆或旁切圆．同时，相交于某一棱的两个面上的两个圆具有一个公共点，这个点就是球与该棱所在直线的切点.

有如下两种可能情况.

ⅰ 球的每一切点都在棱的内部．这时，各面上截得的圆都是对应三角形的内切圆.

球 Ω 必定通过 $\triangle ABC$ 的内切圆与对应边 BC，CA，AB 的切点 R，T，Q，也通过 $\triangle SAB$ 的内切圆与边 SA 的切点 M(参看图 4.22). 因为点 R，T，Q 不在一直线上，所以点 M 不在平面 RTQ 上．由于过不共面的四点 R，T，Q，M 可以作一个也只能作一个球，所以这种第一类球如果存在的话，那么至多只有一个.

ⅱ 球的切点中至少有一个在棱的外部(在棱的延长线上)．为确定起见，设这条棱是 SA，球 Ω 与 SA 所在直线的切点 M' 在 SA 的延长线上点 A 的外侧(即点 A 在 S，M' 之间)，这时与 SA，SC 及 AC 相切的圆是 $\triangle SAC$ 的旁切圆，该圆与顶点 S 分布在 AC 的两侧．因此它与棱 AC 相切于点 T，与棱 SC 的延长线相切于点 P'，点 P' 在点 C 的外侧(即点 C 在 S，P' 之间)．同理，平面 SAB 上的圆与棱 SA 的延长线相切于点 M'，与棱 AB 相切于某一点 Q，与棱 SB 的延长线相切于点 N'；在平面 SBC 上的圆与直线 SB，SC 相切于点 N'，P'，且与棱 BC 相切于某一点 R．因此，这个第二类球与面 $\triangle ABC$ 上的三条棱相切，而与棱 SA，SB，SC 的延长线相切，同时切点分别位于点 A，B，C 的外侧(即 A，B，C 位于对应的切点与点 S 之间).

与 ⅰ 相仿，我们可以证明，像这种与一个面 $\triangle ABC$ 的各棱相切，而与其余各棱的延长线相切的球至多只有一个．因此，第二类的球的总数至多只有四个.

a. 设所有这五个球都存在，我们要证明四面体 $SABC$ 是正四面体.

设四面体 $SABC$ 的各棱长分别为

$$SA = a, SB = b, SC = c, BC = a', AC = b', AB = c'$$

设 M, N, P, R, T, Q 是第一类球的切点,则有

$$SM = SN = SP, AM = AT = AQ$$

$$BN = BR = BQ, CP = CR = CT$$

又因 $AM + SM = SA, BR + CR = BC$ 等等,可得

$$a + a' = b + b' = c + c' \qquad ⑥$$

考察与面 $\triangle ABC$ 相对应的第二类的球,有

$$SM' - AM' = SA, BR + RC = BC, SN' - BN' = SB$$

$$AT + TC = AC, SP' - CP' = SC, AQ + QB = AB$$

可得

$$a - a' = b - b' = c - c' \qquad ⑦$$

由 ⑥,⑦ 可得

$$a = b = c, a' = b' = c'$$

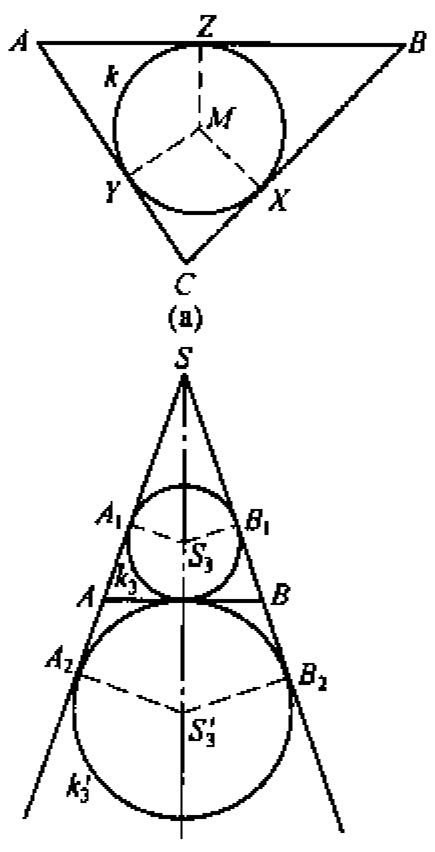
如果再考察对应于面 SAB 的第二类的球,用同样的方法可得 $c' = a = b$.因此就证明了 $a = b = c = a' = b' = c'$,即四面体 $SABC$ 是正四面体.

b. 我们再来证明:正四面体必定存在五个这样的球.

设点 O_1 是正四面体 $SABC$ 的中心,以 O_1 为球心,通过某一棱中点的球 Ω 必定通过其余五条棱的中点,并且与各棱均相切.再以点 S 为位似中心,相似系数为 3 作位似变换,将这个球 Ω 变为球 Ω_1,它必定与各棱所在的直线均相切,它是一个第二类的球.以正四面体的每一个顶点为位似中心,作这样的位似变换,便可作出四个第二类的球.

证法4 (1)首先确定球面和四面体 $SABC$ 的棱或其延长线在怎样的点相切?不失一般性,就平面 ABC 来说,所设五个球面与平面 ABC 分别交于某个圆,这些圆对于 $\triangle ABC$ 或为内切,或为旁切.

i 我们首先假定球面 k 和平面 ABC 在圆 k 相交,这个圆是 $\triangle ABC$ 的内切圆,如图 4.24(a) 所示.这个球面 k 和平面 SAB 或者在一个内切于 $\triangle SAB$ 的圆 k_3 相交,或者在一个关于 AB 边的 $\triangle SAB$ 的旁切圆 k'_3 相交,如 4.24(b) 所示.



(a)
(b)
图 4.24

在第一种情形下,球面 k 和平面 SBC 在一个圆相交,这个圆在 $\triangle SBC$ 的边 SB 和 BC 的内点相切.因此,它也是 $\triangle SBC$ 的内切圆,并且它和 SC 边也是在内点相切.所以球面 k 和这四面体的所有棱都在内点相切.我们把这个球面记为 k_0,并且称之为内切于各棱的球.

在第二种情形下,球面 k 和平面 SBC 相交于另一个圆,这个圆

和 BC 边切于内点，而和 SB 边切于其延长线上一点，因此这个圆是 $\triangle SBC$ 中关于 BC 边的旁切圆，从而它和另一边 SC 也相切于其延长线上. 我们把这个球记为 k_s，并称它为旁切于棱的球.

ii 球面 k 和平面 ABC 在圆 k_1 相交，且设圆 k_1 是在 $\triangle ABC$ 中关于 BC 边的旁切圆. 注意到此时球面与 AB 有公共点(切点)，因此它和平面 SAB 相交于一个圆. 显然这个圆是 $\triangle SAB$ 中关于 SB 边的旁切圆. 这样，由于球 k 与棱 BC，SB 相切于其内点，则球面 k 与平面 SBC 的交线圆，是 $\triangle SBC$ 的内切圆. 因此，这种情形返回到情形(1)，在这里顶点 S,A,B,C 的顺序被换为 A,B,C,S. 通过类似的方法交换顶点顺序，不难看出，所设的五个球，只能是一个内切于棱的球，和四个旁切于棱的球.

下面，我们来证明：具有上述性质的四面体 $SABC$ 是正四面体.

球面 k_0 在点 A_1,B_1,C_1 依次和直线 SA,SB 和 SC 相切；球面 k_s 依次在点 A_2,B_2,C_2 和这些直线相切. 两个球面和平面 ABC 相交于 $\triangle ABC$ 的内切圆 k，两个球面和棱 AB,BC,CA 依次在点 Z,X,Y 相切.

对应于同一个球面的切线性质有

$$AA_1 = AA_2 = AZ = AY$$
$$BB_1 = BB_2 = BZ = BX$$
$$CC_1 = CC_2 = CX = CY \quad ⑧$$

同样地，还有

$$SA_1 = SB_1 = SC_1$$
$$SA_2 = SB_2 = SC_2 \quad ⑨$$

现在有

$$SA_2 = SA_1 + AA_1 + AA_2$$
$$SB_2 = SB_1 + BB_1 + BB_2$$
$$SC_2 = SC_1 + CC_1 + CC_2$$

因此，由 ⑧ 和 ⑨ 有

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 \quad ⑩$$

又有 $SA = SA_1 + AA_1, SB = SB_1 + BB_1, SC = SC_1 + CC_1$

所以根据 ⑨ 和 ⑩ 有

$$SA = SB = SC \quad ⑪$$

通过交换顶点，我们由 ⑪ 断定，由所给的四面体的任何一个顶点出发的所有的棱的长度都相等，由此可以得到四面体 $SABC$ 的所有的棱长度相等. 因此这四面体是正四面体，于是问题(1)得证.

(2) 设 $SABC$ 是一个正四面体，点 M 同时是等边 $\triangle ABC$ 的内

心和外心，如图 4.25 所示．将平面 SAB 通过两次绕直线 SM 旋转，每次转 120°，分别得到平面 SBC 和 SAC．我们再用 k_3 来记 $\triangle SAB$ 的内切圆，它的圆心为 S_3；另用 k'_3 来记关于 AB 边的 $\triangle SAB$ 的旁切圆，且它的圆心为 S'_3．因为平面 SAB 包含直线 AB，而 AB 垂直于直线 CM，同时还垂直于 SM，也就是平面 SAB 垂直平面 SCM．因此通过点 S_3 且与平面 SAB 垂直的直线交直线 SM 于一点 O_0．相应地，通过点 S'_3 且和平面 SAB 垂直的直线交直线 SM 于点 O_t．但球心为 O_0 的球面 k_0（以 O_0Z 为半径）必包含圆 k_3，且与 $\triangle SAB$ 的三边相切（因为从 O_0 到圆 k_3 上任一点的距离都等于 O_0Z，且 $O_0Z\perp AB$）；同理，球面 k_0 也包含 $\triangle SBC$，$\triangle SCA$ 的内切圆且和这些三角形的各边相切．因此，球面 k_0 是所作的五个球面之一．

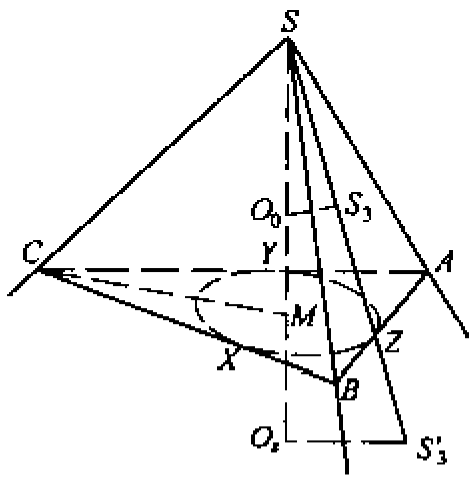


图 4.25

类似地可以证明，球心为 O_t 的球面 k_t 包含圆 k'_3，它也包含 $\triangle SBC$ 和 $\triangle SCA$ 的旁切圆，因此球面 k_t 是所作的五个球面的第二个．

如果依次用点 A，B，C 来代替点 S，那么可以得到另外的三个旁切于棱的球．于是，问题(2) 得证．

证法 5　为证问题(1)，先证以下三条引理．

引理 1　三角形的内切圆与其一边上的旁切圆如果有相同的切点，则这三角形的其他两边相等．

引理 1 的证明　如图 4.26 所示，若 $\triangle ABC$ 的内切圆 I 与 BC 边上的旁切圆 P_a 有公共切点 T，则因 $IT\perp BC$，$P_aT\perp BC$，从而 T 必在连心线 AIP_a 上，亦即 $AT\perp BC$．注意到 AT 是 $\angle BAC$ 的平分线，显然有 $AB = AC$．

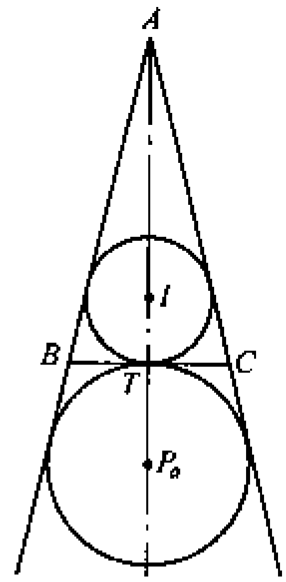


图 4.26

引理 2　三棱锥 $S—ABC$ 如果同时存在内切于棱的球和关于 $\triangle ABC$（底面）的旁切于棱的球，则关于三边 AB，BC，CA 必有相同的切点．

引理 2 的证明　设内切于棱的球心为 O，旁切于棱的球心为 P_t．注意到球 O 内切于棱，则它与线段 AB，BC，CA 必都有切点，设之为 X，Y，Z，如图 4.27 所示．但球面与平面 ABC 的交线为圆，设之为圆 I，显然圆 I 与 AB，BC，CA 不能有另外的公共点（否则球 O 将与诸棱不相切），因此圆 I 为 $\triangle ABC$ 的内切圆．

类似地，考察旁切于棱的球 P_t，注意到球心 P_t 在三面角 $S—ABC$ 的内部，而三边 AB，BC，CA 的延长线都在三面角 $S—ABC$ 的外部，显然球 P_t 不能与三边相切于其延长线上，亦即球 P_t 必分别与线段 AB，BC，CA 切于内点．因此，球 P_t 与平面 ABC 的交线也只能是 $\triangle ABC$ 的内切圆．但是三角形的内切圆是惟一的，因而其切点就只能是点 X，Y，Z．故这两球在这三棱上有相同的切点．

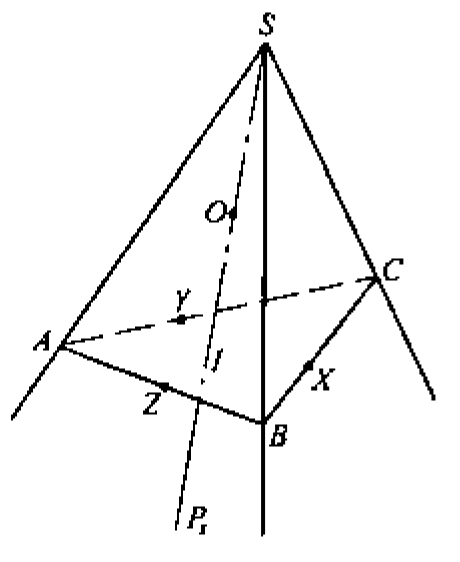


图 4.27

引理 3 三棱锥 $S—ABC$ 如果同时存在内切于棱的球 O 和旁切于棱(关于底面 ABC 的)的球 P_s,则三侧棱 $SA = SB = SC$.

引理 3 的证明 从平面 SAB 来看,内切于棱的球 O 与它的交线是 $\triangle SAB$ 的内切圆,旁切于棱的球 P_s 与它的交线是 $\triangle SAB$ 关于边 AB 的旁切圆.据引理 1 可知

$$SA = SB$$

同理可证 $SB = BC$.所以

$$SA = SB = SC$$

现在来证明本题(1).事实上,已知它存在五个切于棱的球,显然它们只能是一个切于棱的球和四个关于平面 ABC,SAB,SBC,SCA 的旁切于棱的球.

因此,就三棱锥 $S—ABC$ 来看,据引理 3 有

$$SA = SB = SC$$

就三棱锥 $A—SBC$ 来看,有

$$AB = AC = SA$$

就三棱锥 $B—SCA$ 来看,有

$$SB = AB = BC$$

于是有 $SA = SB = SC = AB = BC = CA$,因此,这个四面体是正四面体,从而题(1)得证.

下面,为证问题(2),先提出两条引理.

引理 4 若平面外一点到这平面上若干线段或其延长线的距离相等,则这点在这平面上的射影到这些线段或其延长线的距离也相等.它的逆命题也成立.

引理 5 从一角的顶点,引该角所在平面的交线,若此线与该角两边成等角,则此线上任意一点到该角两边等距.

现在考察正四面体 $SABC$,如图 4.28 所示.过点 S 作直线 $SH \perp$ 平面 ABC 于点 H,显然,点 H 是正 $\triangle ABC$ 的中心.因此,根据引理 4 和 5 可得

ⅰ SH 上任一点到 $\triangle ABC$ 的三边距离相等;

ⅱ SH 上任一点到三棱 SA,SB,SC 距离相等.

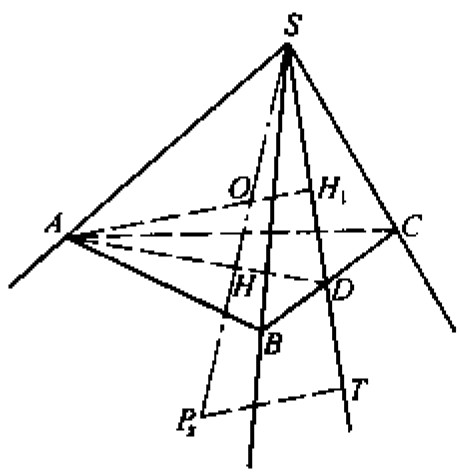


图 4.28

又过点 A 作直线 $AH_1 \perp$ 平面 SBC 于点 H_1,由于 AH,SH_1 的延长线都过 BC 的中点 D,则 AH_1,SH 为 $\triangle SAD$ 之二高,它们必交于垂心 O.根据上面结论,易证点 O 到正四面体六条棱的距离都等于 OD,故以 O 为圆心,OD 为半径之球即为所求的内切于棱之球.

注意到 SD 是 $\angle BSC$ 的平分线,故关于 BC 的旁切圆圆心 T 在 SD 的延长线上.在平面 SAD 上,过 T 作 $TP_s \parallel H_1O$,与 SH 之延长线交于点 P_s,由于 $OH_1 \perp$ 平面 SBC,则 $P_sT \perp$ 平面 SBC.而点 T 到 BC 及 SB,SC 的延长线距离相等(都等于 TD),则据引理 4,点 P_s

到 BC 及 SB,SC 的延长线距离也相等,又由于点 P_s 在直线 SH 上,由此可证 P_s 到线段 AB,BC,CA 及到棱 SA,SB,SC 的延长线距离都相等(即都等于 P_sD).因此,以 P_s 为心,P_sD 为半径的球是这个四面体的一个关于 $\triangle ABC$ 为底面的旁切于棱的球.

同理,分别考察正四面体 $ASBC$,$BSCA$ 和 $CSAB$,还可以依次得到关于底面 SBC,SCA 和 SAB 的另三个旁切于棱的球.

故对于正四面体,一定存在五个切于棱的球.至此,本题证毕.



布拉格人民博物馆

第 5 届国际数学奥林匹克

波兰，1963

1 求方程
$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$
的所有实根，其中 p 是一个实参数.

捷克斯洛伐克命题

解 若 $p<0$，则
$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}\geqslant\sqrt{x^2-p}>x$$
在这种情形下原方程无解，故可设 $p\geqslant 0$.

原方程移项、平方，得
$$4(x^2-1)=x^2-2x\sqrt{x^2-p}+(x^2-p)$$
即
$$2x^2+p-4=-2x\sqrt{x^2-p}$$
将上式两边再平方，得
$$4x^4+4(p-4)x^2+(p-4)^2=4x^2(x^2-p)\Leftrightarrow$$
$$8px^2-16x^2+(p-4)^2=0\Leftrightarrow$$
$$x^2=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}$$
因 x 为实数，故 $p<2$，即 $0\leqslant p<2$. 所以
$$x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}} \qquad ①$$
把上面求得的 x 值代入原方程并化简，得
$$|3p-4|=4-3p\Leftrightarrow 3p-4\leqslant 0$$
故只有当 $0\leqslant p\leqslant 4/3$ 时，原方程式有实根，所有根可由①给出.

2 直角的一边经过已知点 A，另一边与已知线段 BC 至少有一公共点. 求空间上该直角顶点的轨迹.

苏联命题

解法 1 所求的轨迹和点 A 及线段 BC 的相对位置有关，现在考察以下几种情况.

i A 在 BC 上，如图 5.1 所示. 分别以 AB 和 AC 为直径作二球.

这二球球面上和球内的点皆满足本题的条件，故即是所求的轨迹.

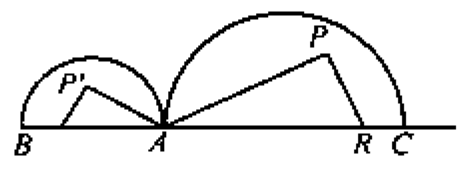


图 5.1

ⅱ A 在 BC 的延长线上，如图 5.2 所示. 设 B 介于 A，C 二点之间，分别以 AB 和 AC 为直径作二球，则所求的轨迹是大球球面上的点，及在大球内但不在小球内的点，这是因为，如果 Q 是小球内的点，过 Q 作垂直于 AQ 的平面，那么这个平面和 AC 的交点是在 A，B 之间，而不在 BC 上.

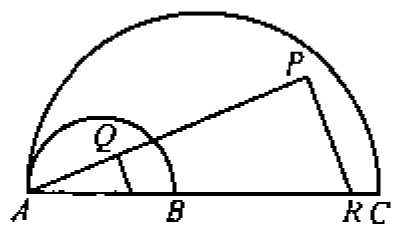


图 5.2

ⅲ A 不在 BC 或其延长线上，如图 5.3 所示. 以 AB 为直径作球 $\sum_1$，以 AC 为直径作球 $\sum_2$，则凡是在球面 $\sum_1$ 或 $\sum_2$ 上的点都属于所求的轨迹. 这是因为，若 Y 是这样的点，则 $\angle AYB$（或 $\angle AYC$）是直角，又凡是在球 $\sum_1$（或 $\sum_2$）内而不在球 $\sum_2$（或 $\sum_1$）内的点都属于所求轨迹. 事实上若 X 是这样的点，AX 的延线交 $\sum_1$（或 $\sum_2$）于 Y_1（或 Y_2），则 $\angle AY_1B$（或 $\angle AY_2C$）是直角，而且过 X 且垂直于 AX 的平面和 BC 有公共点；但若 E 同时是 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 球内的点，则 AE 的延长线交 $\sum_1$（或 $\sum_2$）于 W_1（或 W_2），这时 $\angle AW_1C$（或 $\angle AW_2B$）虽为直角，但过 E 且垂直于 AE 的平面却不和 BC 相交（交点在 BC 的延线上）.

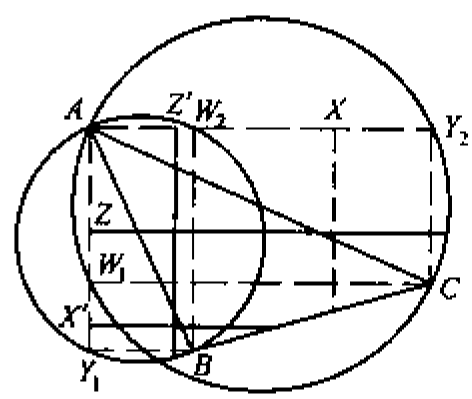


图 5.3

综合上面三种情况可知若 K_1，K_2 表示 $\sum_1$，$\sum_2$ 球内的点集，$\overline{K}_1$，$\overline{K}_2$ 表示 $\sum_1$，$\sum_2$ 球内和球面上的点集，则所求的轨迹为

$$(\overline{K}_1 \cup \overline{K}_2)/(K_1 \cap K_2)$$

注 上面求得的轨迹，包括 BC 上的点，这样的点，可以看做无限接近于 BC 的点，这时 PR 的长度无限接近于 0，而 $\angle APR$ 仍是直角，但严格地说，所求的轨迹以减去 BC 上的点为宜.

解法 2 先求平面 ABC 上符合条件的点的轨迹.

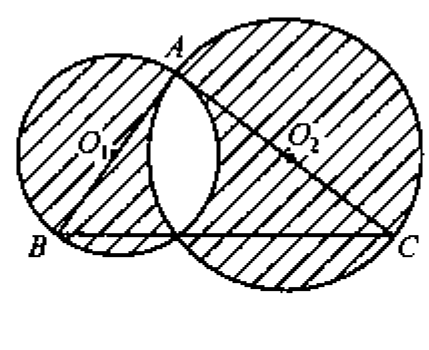


图 5.4

若点 A 不在直线 BC 上，如图 5.4 所示，分别以线段 AB，AC 为直径作圆圆 O_1 与圆 O_2，则所求的轨迹是这两圆的内部区域（包括边界在内）除去两圆公共部分后所得的点集. 如果用 K_1，K_2 分别表示两圆的内部区域（不包括边界），用 $\overline{K}_1$，$\overline{K}_2$ 分别表示两圆的内部区域（包括边界在内），则所求的轨迹可以表示为 $(\overline{K}_1 \cup \overline{K}_2)/(K_1 \cap K_2)$. 下面我们来证明这个结论.

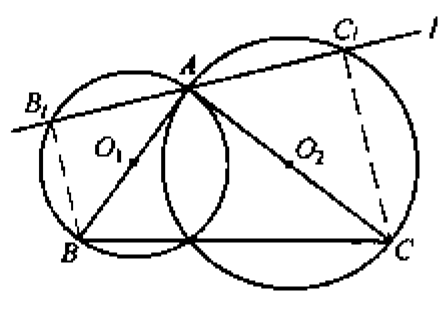


图 5.5

设 l 为过点 A 的任意一条直线，作线段 BC 在 l 上的正射影 B_lC_l，如图 5.5 所示. 显然，线段 B_lC_l 上的任一点都符合条件（即可以作为符合题给条件的直角顶点），而在直线 l 上位于线段 B_lC_l 外

的任一点都不符合条件.

因为圆 O_1 与圆 O_2 分别是以 AB,AC 为直径的圆,它们就是通过 A,B 或通过 A,C 的直角顶点的轨迹,所以当直线 l 绕点 A 旋转时,点 B_l,C_l 相应地就画出了圆 O_1 与圆 O_2.当直线 l 与两圆之一相切时,B_l 或 C_l 就与点 A 重合;当直线 l 与两圆都不相切(即均相交)时,B_l,C_l 就分别是直线 l 和圆 O_1,圆 O_2 的另一个交点.

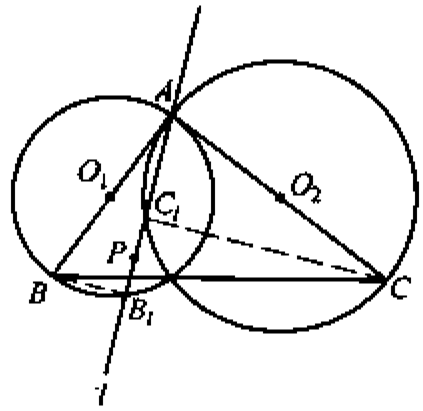


图5.6

先证明在区域$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)/(K_1\cap K_2)$内的任一点都符合条件.设 P 是这个区域内的任一点,那么它或者属于 $\overline{K}_1$ 而不属于 K_2(即 $P\in\overline{K}_1/K_2$),或者属于 $\overline{K}_2$ 而不属于 K_1(即 $P\in\overline{K}_2/K_1$).如果 $P\in\overline{K}_1/K_2$,过 P,A 两点作直线 l,与圆 O_1,圆 O_2 必相交,设另一交点分别为 B_l,C_l,这时点 P 必定在 A,B_l 两点之间,而 C_l 在线段 AP 上,如图5.6所示.或在 AP 的反向延长线上,如图5.7所示.总之,点 P 必定在 B_l 与 C_l 之间,即在线段 B_lC_l 上,所以点 P 符合条件.如果 $P\in\overline{K}_2/K_1$,同样可证点 P 符合条件.

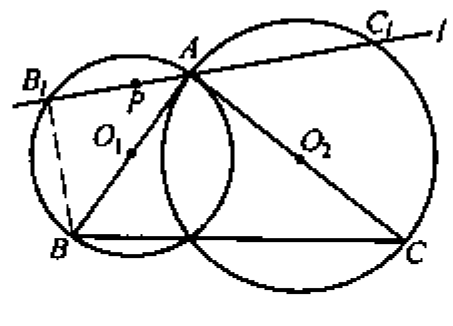


图5.7

再证明区域$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)/(K_1\cap K_2)$外部的任一点都不符合条件.设 P 是区域外部的任一点,那么它或者在两圆的外部,或者在两圆的公共部分.

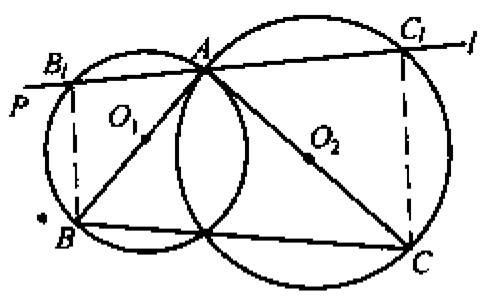


图5.8

如果点 P 在两圆 K_1,K_2 的外部,如图5.8所示,过 A,P 两点的直线 l 分别与两圆周相交于另一点 B_l,C_l,这时截得的线段 PC_l(或 PB_l)必定大于 B_lC_l,即点 P 在线段 B_lC_l 之外,因此点 P 不符合条件.

如果点 P 在两圆的公共部分,即 $P\in K_1\cap K_2$,如图5.9所示,过 A,P 作直线 l,显然,线段 AB_l 是 l 与 K_1 的交线,线段 AC_l 是 l 与 K_2 的交线,而 AP 在线段 AB_l 与 AC_l 的公共部分上,它必在线段 B_lC_l 外,所以点 P 不符合条件.

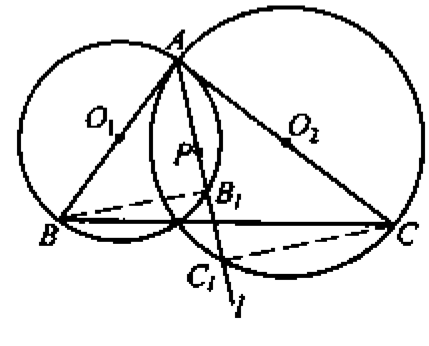


图5.9

这样,我们证明了在区域$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)/(K_1\cap K_2)$内的任一点都符合条件,而这个区域外的任一点都不符合条件.这就是说,$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)/(K_1\cap K_2)$是所求直角顶点的轨迹.

若点 A 在直线 BC 上,它可以看做上述一般情况的极限位置,所求的轨迹也是$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)/(K_1\cap K_2)$,如图5.10～5.12所示.

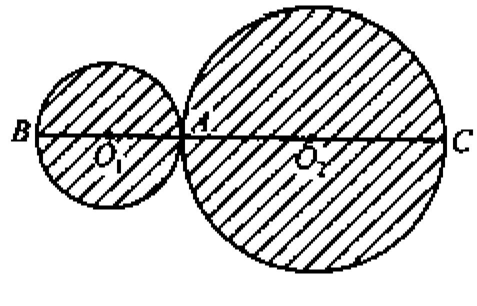


图5.10

在三维空间中,所求直角顶点的轨迹是由上述平面 ABC 上的轨迹绕两圆的连心线 O_1O_2 旋转所得到的区域,即是以 AB,AC 为直径的两个球的内部(包括边界面在内)除去两球公共部分的所有点的集合.

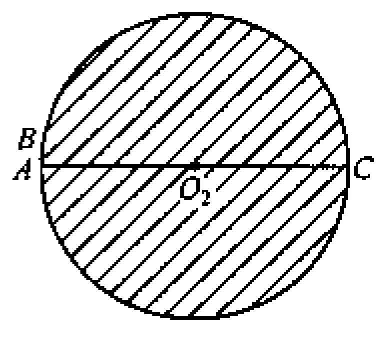


图 5.11

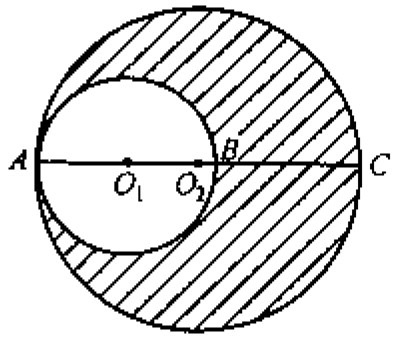


图 5.12

解法3 设轨迹为 M,我们首先在一个平面内作考察.如图 5.13 所示,p 是过点 A 的某一直线,过线段 BC 上的任一点 Y 作 p 的垂线,交 p 于 X,则点 X 属于所求的轨迹 M.显然,对于固定的直线 p,所有的点 X 的轨迹构成一线段 $B'C'$,其端点 B',C' 分别为自 B,C 向 p 所作垂线的垂足.当直线 p 变动时,B' 和 C' 的轨迹是分别以 AB,AC 为直径的圆 G_1,G_2(当点 A 和 B 或 C 重合时,则变成一点 A),点 X 的轨迹 M 是这两个圆周 G_1,G_2,以及在一个圆的外部,同时又在另一个圆的内部的平面部分,即图 5.13 中的阴影部分.

上面的结论不难推广到三维空间的情形:事实上,如果我们分别过 B,C 对所有的过点 A 的直线 p 作相应的垂直平面,那么交点的轨迹分别构成以 AB,AC 为直径的球面 K_1,K_2(当 A 和 B 或 C 重合时,则变成一点 A).由此,所求几何轨迹 M 是两个球面 K_1,K_2,以及在一个球面的外部,同时又在另一个球面的内部的空间部分.

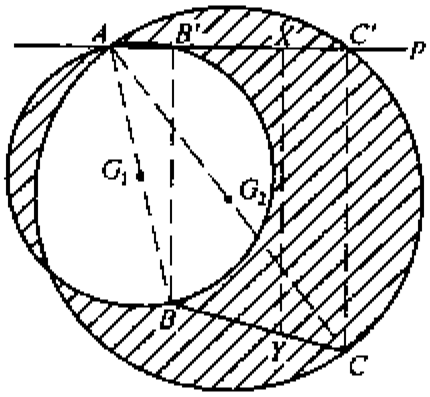


图 5.13

解法4 仍然先限于一个平面内作考察.对于线段 BC 上的某一固定点 Y,显然点 X 的轨迹构成一个以 AY 为直径的圆 G.当点 Y 从点 B 运动至点 C 时,则圆心 G 在 $\triangle ABC$ 的中位线 G_1G_2 上从点 G_1 运动至点 G_2,直径从 $|AB|$ 连续变化至 $|AC|$.

不难证明,这些圆均属于以 AA' 为公共根轴的同轴圆系.这里,A' 是自 A 向直线 BC 所作垂线的垂足,如图 5.14 所示.由此推知,点 X 的轨迹 M 是圆周 G_1,G_2,以及在一个圆的外部,同时又在另一个圆的内部的平面部分.

与解法1相同,上述结果不难类推到三维空间中去.

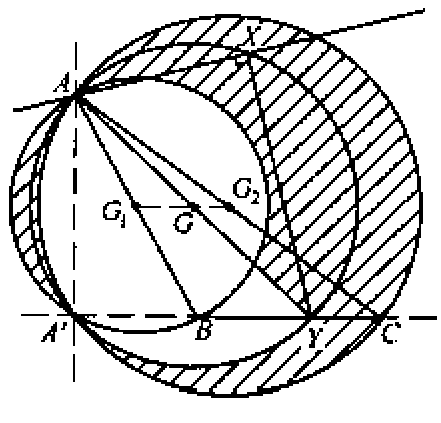


图 5.14

3 一个凸 n 边形的诸内角皆相等，而且各边的长度依次满足不等式

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n$$

证明

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$$

匈牙利命题

证法1 设 $n = 2k+1$，在给定的凸 n 边形上，作 $\angle A_nA_1A_2$ 的平分线 l，如图 5.15 所示. 因诸内角相等，所以

$$\frac{1}{2}\angle A_1 + \angle A_2 + \cdots + \angle A_{k+1} = \frac{1}{2}\angle A_1 + \angle A_n + \cdots + \angle A_{k+2}$$

可知 $l \perp A_{k+1}A_{k+2}$. 故折线 $A_1A_2A_3\cdots A_{k+1}$ 和 $A_1A_nA_{n-1}\cdots A_{k+2}$ 到 l 的射影长相等.

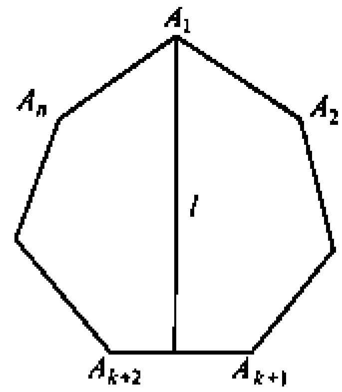


图 5.15

如果 $a_i > a_{i+1}(i \leqslant k)$ 成立，则 $a_i > a_{n+1-i}$（因为 $n+1-i > i+1$）. 因 A_iA_{i+1} 和 l 及 $A_{n+2-i}A_{n+1-i}$ 和 l 所构成的角相等，A_iA_{i+1}（等于 a_1）在 l 上的射影就要大于 $A_{n+2-i}A_{n+1-i}(= a_{n+1-i}i_1)$ 在 l 上的射影. 这样便和两折线在 l 上有等长的射影发生矛盾. 如果 $a_i > a_{i-1}(n-1 \geqslant i \geqslant k)$ 成立，同样会发生矛盾.

设 $n = 2k$. 在这种情形下，$\angle A_nA_1A_2$ 的平分线通过 A_{k+1}，如图 5.16所示. 仿照 $n = 2k+1$ 的情形作两折线在 l 上的射影讨论之. 如果 $a_i > a_{i+1}$ 成立，同样会发生矛盾.

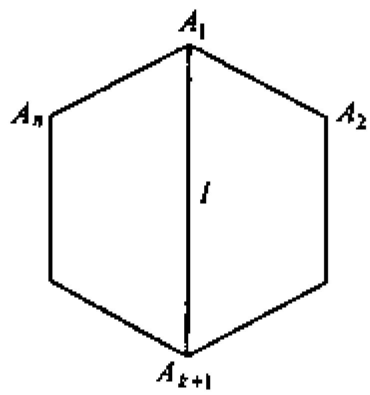


图 5.16

故不论 n 是奇数或偶数皆有 $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

证法2 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是已知的凸 n 边形，其中，$P_iP_{i+1} = a_i(i = 1,2,\cdots,n; P_{n+1}$ 与 P_1 重合).

我们在 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在的平面上，以 P_iP_{i+1} 为基础，向凸 n 边形内作一个这样的等腰 $\triangle P_iP_{i+1}S_i$，使顶角 $\angle P_iS_iP_{i+1} = \frac{360°}{n}$. 然后，再以 S_i 为圆心，S_iP_i 为半径作圆 K_i，如图 5.17 所示.

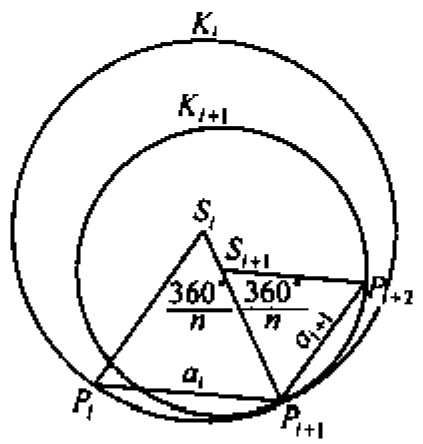


图 5.17

现在我们考察圆 K_i 和圆 K_{i+1} 的关系：由于

$$\angle S_iP_{i+1}P_i = \angle S_{i+1}P_{i+1}P_{i+2} = \frac{1}{2}(180° - \frac{360°}{n}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-2)180°}{n}$$

而 $\angle P_iP_{i+1}P_{i+2} = \frac{(n-2)180°}{n}$（注意到 $P_1P_2\cdots P_n$ 的各角相等），故 S_{i+1} 在 S_iP_{i+1} 上.

若 $a_i = a_{i+1}$，即 $P_iP_{i+1} = P_{i+1}P_{i+2}$，那么圆心 S_i 和 S_{i+1} 重合，因此圆 K_i 和圆 K_{i+1} 也重合.

若 $a_i > a_{i+1}$，那么点 S_{i+1} 位于 S_i 和 P_{i+1} 之间，因此圆 K_i 和圆 K_{i+1} 在点 P_{i+1} 内切，圆 K_{i+1} 在圆 K_i 内部(除切点 P_{i+1} 外).

这样，若有某一个 $a_i > a_{i+1}$ 成立，由 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ 便可推知，圆 K_n(由边 P_nP_1 作出的)在圆 K_1 内部，且与圆 K_1 至多只一个公共点 P_n(仅在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} > a_n$，即圆 K_{n-1} 与圆 K_1 重合时才有可能)，而点 P_1 在圆 K_1 内. 但圆 K_1 是由边 P_1P_2 作出的，故点 P_1 又必须在圆 K_1 上. 然而，这是不可能的.

由此，只能得到 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，于是问题得证.

4 解方程组

苏联命题

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 & ① \\ x_1 + x_3 = yx_2 & ② \\ x_2 + x_4 = yx_3 & ③ \\ x_3 + x_5 = yx_4 & ④ \\ x_4 + x_1 = yx_5 & ⑤ \end{cases}$$

解法1 不论 y 取什么值，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ 显然都满足该方程组. 这是所谓平凡解.

现在我们要求该方程组的非平凡解. 把给定的五个方程相加，得

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)(y - 2) = 0$$

从而得
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$
或
$$y = 2$$

若 $y = 2$，则自 ②，③ 得

$$x_2 + x_3 = x_1 + x_4$$

又自 ⑤ 得
$$x_1 + x_4 = 2x_5$$
所以
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2(x_1 + x_4) + x_5 = 5x_5$$

把未知数的下标循环替换，即 $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_1$，原方程组不变，可知对于任意 $j(j = 1,2,3,4,5)$，皆有

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5x_j$$

所以 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = k$，$k$ 是任意常数.

若 $y \neq 2$，由方程组消去 x_3, x_4, x_5 可得

$$(y^2 + y - 1)(x_2 - x_1) = 0 \qquad ⑥$$

$$(y^2 + y - 1)(x_2 + x_1 - yx_1) = 0 \qquad ⑦$$

若 $y^2 + y - 1 \neq 0$，则自 ⑥ 得 $x_1 = x_2$，代入 ⑦ 得

$$(y - 2)x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

从而得
$$x_2 = 0, x_3 = x_4 = x_5 = 0$$
这即是前面所得的平凡解.

若 $y^2+y-1=0$，则 x_1,x_2 可取任意值. x_3,x_4,x_5 值可用 $y^2+y-1=0$ 的根及 x_1,x_2 表示，即

$$x_3=rx_2-x_1$$
$$x_4=(r^2-1)x_2-rx_1$$
$$x_5=rx_1-x_2$$

其中，$r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，是 $y^2+y-1=0$ 的根.

解法 2 如果我们定义

$$x_{k+5}=x_k,k=0,1,2,\cdots$$

则原方程组中每一方程皆可用下式表示

$$x_{n+1}=-x_{n-1}+yx_n \qquad ⑧$$

这是所谓二阶递推方程. 要解这个方程，我们引进矩阵 T 和向量 v_n 如下，即

$$T=\begin{pmatrix}0&1\\-1&y\end{pmatrix},v_n=\begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\end{pmatrix},n=1,2,\cdots$$

当 $n=5$ 时有

$$v_5=\begin{pmatrix}x_5\\x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix}=v_0$$

于是 ⑧ 可写成矩阵方程

$$v_{n+1}=Tv_n \qquad ⑨$$

从而得

$$v_0=v_5=Tv_4=T(Tv_3)=T^2v_3=T^3v_2=T^4v_1=T^5v_0 \qquad ⑩$$

若向量 v 和数 λ 满足方程 $Mv=\lambda v$，其中 M 是正方矩阵，则 v 叫做 M 的特征向量，λ 叫做 M 的特征值. 故自 ⑩ 知 v_0 是 T^5 的特征向量，其相应的特征值为 1.

若 t 是 T 的特征值，则 $Tv=tv$，即

$$(T-tI)v=0$$

其中，$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 是单位矩阵. 这样就得到如下的特征方程

$$\det(T-tI)=\begin{vmatrix}-t&1\\1&y-t\end{vmatrix}=t^2-yt+1=0$$

所以

$$y=t+\frac{1}{t} \qquad ⑪$$

自 ⑩ 并根据线性代数定理，知

$$t \text{ 是 } T \text{ 的特征值} \Leftrightarrow t^5=1$$

解右边的方程得

$$t=\cos\frac{2k\pi}{5}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{2k\pi}{5},k=0,1,2,3,4$$

若 $k=0$,则 $t=1$,由 ⑪ 得 $y=2$ 而各 x_i 都相等.

若 $k\neq 0$,则 $t\neq 1$,由 $t^5=1$ 得

$$t^4+t^3+t^2+t+1=0 \qquad ⑫$$

由 ⑪ 及 ⑫ 得

$$y^2+y=(t^2+2+\frac{1}{t^2})+(t+\frac{1}{t})=$$

$$\frac{1}{t^2}(t^4+2t^2+1+t^3+t)=$$

$$\frac{1}{t^2}((t^4+t^3+t^2+t+1)+t^2)=1$$

于是得到和解法 1 相同的关于 y 的二次方程

$$y^2+y-1=0$$

由此各 x_i 可依解法 1 的方程求得.

解法 3 由题显然,对于任意的 y 值,$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$ 是方程的一组解.下面我们再求非平凡解(即至少有一个 $x_i\neq 0,i=1,2,\cdots,5$).

由 ①,⑤ 分别得

$$x_2=yx_1-x_5 \qquad ⑬$$

$$x_4=yx_5-x_1 \qquad ⑭$$

而由 ②,④ 分别得

$$x_3=yx_2-x_1 \qquad ⑮$$

$$x_3=yx_4-x_5 \qquad ⑯$$

将 ⑬,⑭ 分别代入 ⑮,⑯,得

$$x_3=(y^2-1)x_1-yx_5 \qquad ⑰$$

$$x_3=(y^2-1)x_5-yx_1 \qquad ⑱$$

所以 $$(y^2-1)x_1-yx_5=(y^2-1)x_5-yx_1$$

即

$$(y^2+y-1)(x_1-x_5)=0 \qquad ⑲$$

若 $y^2+y-1\neq 0$,得

$$x_1-x_5=0$$

即 $$x_1=x_5$$

类似地,只要循环地变换方程的编号与未知数的足码,可得 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$.当 $x_i\neq 0$ 时,代入原方程组中任何一个方程,可得 $y=2$.不难检验,当 $y=2$ 时,$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5\neq 0$ 是原方程组的非平凡解.而当 $y^2+y-1\neq 0,y\neq 2$ 时,原方程组

只有平凡解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

若 $y^2 + y - 1 = 0$，即 $y^2 - 1 = -y$，代入方程⑰或⑱可得同样的方程

$$x_3 = -y(x_1 + x_5) \quad ⑳$$

这时，方程⑬，⑭，⑳就等价于方程①，②，④，⑤. 并且我们还可以证明：方程⑬，⑭，⑳的任一组解必定满足③. 事实上，由⑬，⑭得

$$x_2 + x_4 = (y-1)(x_1 + x_5)$$

而由⑳得

$$yx_3 = -y^2(x_1 + x_5)$$

由于 $y^2 + y - 1 = 0$，即 $y - 1 = -y^2$，故有

$$x_2 + x_4 = yx_3$$

因此，当 $y^2 + y - 1 = 0$，即 $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 时，原方程组等价于三个方程⑬，⑭，⑳，我们可以任意取 x_1, x_5 的值，再由⑬确定 x_2，由⑭确定 x_4，由⑳确定 x_3.

总之，原方程组的解为

(1) 当 $y \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$，$y \neq 2$ 时，只有平凡解

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

(2) 当 $y = 2$ 时，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = k$，$k$ 可取任意值；

(3) 当 $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 时，可任意取 x_1, x_5 的值，则

$$x_2 = yx_1 - x_5, x_3 = -y(x_1 + x_5), x_4 = yx_5 - x_1$$

5 证明：

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

民主德国命题

证法1　因为

$$\cos\frac{2\pi}{7} = -\cos(\pi - \frac{2\pi}{7}) = -\cos\frac{5\pi}{7}$$

所以

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} \quad ①$$

因为

$$\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7})$$

$$\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}(\sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7})$$

所以

$$\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{7} \qquad ②$$

自 ①,② 得

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7}=$$
$$\frac{1}{2}\sin\left(\pi-\frac{6\pi}{7}\right)\Big/\sin\frac{\pi}{7}=$$
$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}\Big/\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

证法 2 以 $2\cos\frac{\pi}{14}$ 乘原式左边并利用公式

$$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

得 $$2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)=$$
$$\left(\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}\right)-\left(\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}\right)+\left(\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}\right)=$$
$$\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{14}$$

由于 $\cos\frac{\pi}{14}\neq 0$,立刻可以推得所求证的等式.

证法 3 方程 $x^7-1=0$ 的七个根为

$$\cos\frac{2k\pi}{7}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{2k\pi}{7},k=0,1,2,\cdots,6$$

因为这七个根的和等于 0,其实数部分的和亦必等于零.

所以

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0 \qquad ③$$

应用关系式

$$\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)=-\cos(\pi-\theta)$$

得 $$\cos\frac{4\pi}{7}=\cos\frac{10\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$$
$$\cos\frac{6\pi}{7}=\cos\frac{8\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$$
$$\cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$$

代入 ③ 得 $$1+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\right)=0$$

即 $$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

证法 4 利用一个熟知的结论:在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=2\angle B$ 成

立的充要条件为 $a^2 = b^2 + bc$，借此可证明在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A : \angle B : \angle C = 1:2:4$，则

$$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{b}{2a}, \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{c}{2b}, \cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{a}{2c}$$

$$\angle B = 2\angle A \Rightarrow b^2 - a^2 = ac \qquad ④$$

$$\angle C = 2\angle B \Rightarrow c^2 - b^2 = ab \qquad ⑤$$

④ + ⑤ 得 $$c^2 - a^2 = bc$$

由 $\angle A : \angle B : \angle C = 1:2:4$ 得

$$\angle A = \frac{\pi}{7}, \angle B = \frac{2\pi}{7}, \angle C = \frac{4\pi}{7}$$

由正弦定理得 $a/\sin A = b/\sin B$，即

$$\frac{a}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sin\frac{4\pi}{7}}$$

所以 $$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{b}{2a}$$

同理可得 $$\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{c}{2b}, \cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{a}{2c}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{b}{2a} - \frac{c}{2b} + \frac{a}{2c} = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 - ac}{ab} + \frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{ab} + \frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ac + ab}{bc}\right) \qquad ⑥$$

再由 ④，⑤ 相加得

$$c^2 = ac + ab + a^2 = a(a + b + c)$$

所以 $$\frac{1}{a} = \frac{a+b+c}{c^2} = \frac{a+b}{c^2} + \frac{1}{c} = \frac{a+b}{ab+b^2} + \frac{1}{c} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow bc = ac + ab$$

代入 ⑥ 中即得

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

推广

此推广属于宋庆

命题 对 $k = 1,3,5$，有

$$\cos^k\frac{\pi}{7} + \cos^k\frac{3\pi}{7} + \cos^k\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \qquad ⑦$$

显然，$k = 1$ 时，式 ⑦ 即为式 ①，下面证明 $k = 3,5$ 时，式 ⑦ 成立.

证明 因为

$$4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$$

$$16\cos^5\alpha = \cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha$$

所以

$$\cos^3\frac{\pi}{7}+\cos^3\frac{3\pi}{7}+\cos^3\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{4}(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{9\pi}{7}+\cos\frac{15\pi}{7})+\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7})=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

$$\cos^5\frac{\pi}{7}+\cos^5\frac{3\pi}{7}+\cos^5\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{16}(\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{15\pi}{7}+\cos\frac{25\pi}{7})+\frac{5}{16}(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{9\pi}{7}+\cos\frac{15\pi}{7})+\frac{10}{16}(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7})=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

综上，命题获证.

6 五个学生 A，B，C，D，E 参加一次比赛，有人试图猜测这次比赛的结果.甲猜测的名次顺序是 ABCDE，他没有猜中任何一个学生的名次，也没有猜中任何一对相邻名次学生的名次的顺序关系.乙猜测的名次顺序是 DAECB，他猜中了两个学生的名次，又猜中了两对相邻名次顺序关系（这两对相邻名次顺序关系，不包括共同的名次）.试问这次比赛结果的名次是怎样的？

匈牙利命题

解法 1 若在一对被猜中的相邻名次顺序关系中，有一个名次被猜中，则显然两个名次全部被猜中，所以乙所猜中的两个名次，必是被他所猜中的两对顺序关系中的某一对.

如果是第二、三名 AE（或第三、四名 EC）被猜中，则另一对被猜中的顺序关系必是第四、五名 CB（或第一、二名 DA），于是全部都被猜中，故不合.可能的情形，只有以下两种.

ⅰ 第一、二名 DA 被猜中.

在这种情形下，可能的名次顺序为

DACBE，DACEB，DABCE，DAEBC，DABEC，DAECB

前三个名次顺序使甲猜中一个名次；末一个名次顺序使乙全猜中；其余两个名次顺序使甲猜中一对顺序关系.皆不合.

ⅱ 第四、五名 CB 被猜中.

在这种情形下，除 DAECB 已在 ⅰ 中说过不合外，其他的可能名次顺序为

ADECB，AEDCB，DEACB，EDACB，EADCB

前三个名次顺序，使甲猜中一个名次；末一个名次顺序使乙只猜中一对顺序关系．皆不合．所剩下的名次是 EDACB．这即是这次比赛的结果．

解法2 显然，如果在一对相邻名次的学生中，有一个的名次是正确的，那么另一个的名次也必定是正确的．分析乙猜想的名次顺序：DAECB，有如下两方面的结论．

第一，他猜中的两对相邻名次的学生中，必定有一对的名次也是正确的．因为如若不然，被他猜中名次的两个学生中，至少有一个属于猜中相邻名次中的某一对，这一对的另一个学生的名次也将是正确的，这样乙至少要猜中三个学生的名次，与题给的条件不符．

第二，这一对猜中名次的学生只可能位于边缘（即第一、二名或第四、五名）．因为如若不然，即这一对名次位于中间（第二、三名或第三、四名），那么另一对猜中的相邻名次只有惟一的可能（第四、五名或第一、二名），从而另一对学生的名次也正确的，这也与题给的条件不符．

因此，乙的猜想只有下列四种可能．

ⅰ $\underline{\bar{D}\bar{A}}\,\underline{EC}B$；

ⅱ $\underline{\bar{D}\bar{A}}E\,\underline{CB}$；

ⅲ $\underline{DA}E\,\underline{\bar{C}\bar{B}}$；

ⅳ $D\,\underline{AE}\,\underline{\bar{C}\bar{B}}$．

这里字母上面一划表示名次是正确的，字母下面一划表示相邻的名次是正确的．

下面我们分别对这四种可能情况，对照甲的猜想予以检查、分析，找出比赛的实际结果．

ⅰ $\underline{\bar{D}\bar{A}}\,\underline{EC}B$，B 不可能在最后（否则成为乙全部猜中），而应在第三名，即只可能有$\underline{\bar{D}\bar{A}}B\,\underline{EC}$．但这时 A，B 两学生的名次是相邻的，与甲"没有猜中任何一对相邻名次学生的名次的顺序关系"不符，因此，这是不可能的；

ⅱ $\underline{\bar{D}\bar{A}}E\,\underline{CB}$，和 ⅰ 一样，$E$ 不可能在第三名，即只可能有 $\underline{\bar{D}\bar{A}}\,\underline{CB}E$．而这时学生 C 为第三名，与甲"没有猜中任何一个学生的名次"不符，所以这也是不可能的；

ⅲ $\underline{DA}E\,\underline{\bar{C}\bar{B}}$，同理 E 不可能在第三名，即只可能有 $E\,\underline{DA}\,\underline{\bar{C}\bar{B}}$，与甲的猜想的名次顺序相对照，完全符合题给的条件，所以实际比赛的结果可能为 EDACB；

ⅳ $D\,\underline{AE}\,\underline{\bar{C}\bar{B}}$，同理 D 不可能在第一名，即只可能$\underline{AE}D\,\underline{\bar{C}\bar{B}}$，这时学生 A 为第一名，也与甲"没有猜中任何一个学生的名次"不符，所以这也是不可能的．

综上所述，比赛的实际结果，五个学生的名次顺序为

EDACB

解法 3 设有五个元素的全排列：$x_1x_2x_3x_4x_5$，我们使其中的两个元素的位置不变，其他三个元素的位置全部重新排列，并观察其中有无两对相邻的元素仍取原来排列中相邻的元素所取的顺序

$$x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5$$

容易验证，若按下列形式排列，即

$$x_1 * x_3 * *, x_1 * * x_4 *, x_1 * * * x_5, * x_2x_3 * *$$

$$* x_2 * x_4 *, * x_2 * * x_5, * * x_3x_4 *, * * x_3 * x_5$$

则不存在两对相邻的元素同时取上列的顺序. 于是，仅有下面两种排列，就是开头两个或最后两个元素位置不变的排列，可能存在某两对相邻的元素同时取前列的顺序，即

$$x_1x_2 * * *, * * * x_4x_5$$

根据上面的结论，由乙猜测的结果分析，实际比赛结果只可能是

DA * * *, * * * CB

第一种情形有下述可能性，即

DACBE, DACEB, DABCE, DABEC, DAEBC, DAECB

通过和甲的猜测比较，第 1,2,3,4,5 种都是不可能的；第 6 种就是乙的猜测，同样也是不可能的.

第二种情形有下述可能性，即

ADECB, AEDCB, DAECB, DEACB, EADCB, EDACB

与前一种情形的分析一样，第 1,2,3,4 种都是不可能的；第 5 种与乙的猜测比较，只有一对相邻元素 CB 的顺序相同，同样是不可能的.

由此，只剩下第 6 种排列，即 EDACB. 容易验证，它恰好是问题的解.

第6届国际数学奥林匹克

苏联,1964

捷克斯洛伐克命题

1 (1) 求所有的正整数 n,使得 2^n-1 能被7整除;
(2) 证明:对于任何正整数 n,2^n+1 不能被7整除.

解法1 (1) 任何一个正整数 n,皆可写成 $3m+k$ 形式,其中 $k=0,1,2$. 因为

$$2^3\equiv 1 \pmod 7$$

故

$$2^{3m}\equiv 1 \pmod 7$$

从而知当 $n=3m$ 时,2^n-1 能被7整除.

又因

$$2^{3m+1}\equiv 2 \pmod 7, 2^{3m+2}\equiv 4 \pmod 7$$

故仅当 $n=3m$ 时,2^n-1 能被7整除.

(2) 自(1)知,对于所有正整数 n,2^n 除以7时其余数为1,2或4.故

$$2^n+1\equiv 2,3,5 \pmod 7$$

这就是说 2^n+1 不能被7整除.

解法2 (1) 若 m 是正整数或零,则

$$\begin{aligned}2^{3m}&=(2^3)^m=(7+1)^m=\\&7^m+C_m^1\cdot 7^{m-1}+C_m^2\cdot 7^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}\cdot 7+1=\\&7M_0+1\quad ,M_0\in\mathbf{N}\end{aligned}$$

由此

$$2^{3m+1}=2\cdot 2^{3m}=2(7M_0+1)=7M_1+2, M_1\in\mathbf{N}$$

$$2^{3m+2}=4\cdot 2^{3m}=4(7M_0+1)=7M_2+4, M_2\in\mathbf{N}$$

所以

$$2^n-1=\begin{cases}7M_0, \text{当 } n=3m \text{ 时}\\7M_1+1, \text{当 } n=3m+1 \text{ 时}\\7M_2+3, \text{当 } n=3m+2 \text{ 时}\end{cases}$$

故当且仅当 n 是3的倍数时,2^n-1 能被7整除.

(2) 因为

$$2^n+1=\begin{cases}7M_0+2,\text{当 } n=3m \text{ 时}\\7M_1+3,\text{当 } n=3m+1 \text{ 时}\\7M_2+5,\text{当 } n=3m+2 \text{ 时}\end{cases}$$

所以对于所有的正整数 n,2^n+1 都不能被 7 整除.

2 设 a,b,c 是任一三角形三边的长度,求证

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

匈牙利命题

证法 1 令

$$b+c-a=x,c+a-b=y,a+b-c=z \qquad ①$$

因三角形两边长度之和大于第三边的长度,故 x,y,z 皆取正值,而且

$$\frac{1}{2}(x+y)=c,\frac{1}{2}(y+z)=a,\frac{1}{2}(z+x)=b$$

因算术中项不小于几何中项,故知

$$\frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant\sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}\cdot\sqrt{zx}=xyz$$

所以

$$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \qquad ②$$

但 ② 的右边等于

$$(b+c-a)(a^2-(b-c)^2)=$$
$$a^2(b+c-a)-(b^2-c^2)(b-c)+a(b-c)^2=$$
$$a^2(b+c-a)-(b-c)((b^2-c^2)-a(b-c))=$$
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc$$

从而得到求证的不等式.

证法 2 设 $a\leqslant b\leqslant c$,则

$$c-a\geqslant b-a\geqslant 0\Rightarrow$$
$$c(c-b)(c-a)\geqslant b(c-b)(b-a)\geqslant 0$$

左边加 $a(a-b)(a-c)$(这数大于等于 0),得

$$a(a-b)(a-c)+c(c-b)(c-a)+b(b-c)(b-a)\geqslant 0\Rightarrow$$
$$a^3+b^3+c^3-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)+3abc\geqslant 0\Rightarrow$$
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

证法 3 把求证的不等式的左边改写成

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)$$

应用余弦定理,上式等于

$$a(2bc\cdot\cos A)+b(2ca\cdot\cos B)+c(2ab\cdot\cos C)=$$
$$2abc(\cos A+\cos B+\cos C)$$

假如任一角 C 是固定的，则 $\sin\frac{C}{2}$ 的值也是固定的．故

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

当 $\cos\frac{A-B}{2}=1$，即 $A=B$ 时为最大．从而可知 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的值，当 $A=B=C=60^\circ$ 时为最大．这时

$$\cos A+\cos B+\cos C=3\cos 60^\circ=\frac{3}{2}$$

故 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$

证法 4　对于任意实数 a,b,c，有

$$(a-b)^2\geqslant 0,(b-c)^2\geqslant 0,(c-a)^2\geqslant 0$$

又因 a,b,c 是某一三角形三边之长，所以有

$$b+c-a>0,c+a-b>0,a+b-c>0$$

从而可得
$$(b-c)^2(b+c-a)\geqslant 0$$
$$(c-a)^2(c+a-b)\geqslant 0$$
$$(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0$$

将这三个不等式两边分别相加，得

$$(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)+(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0$$

即
$$6abc-2a^2(b+c-a)-2b^2(a+c-b)-2c^2(a+b-c)\geqslant 0$$

得 $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$

证法 5　不失一般性，设 $a\geqslant b\geqslant c$，且 $a=b+m,c=b-n$，其中，$m\geqslant 0,n\geqslant 0$．因而只须证

$$(b+m)^2(b-m-n)+b^2(b+m-n)+(b-n)^2(b+m+n)\leqslant 3(b+m)b(b-n)$$

或
$$b(m^2+mn+n^2)+(m+n)(m^2-n^2)\geqslant 0$$

若 $m>n$，上面的不等式显然成立；

若 $m\leqslant n$，由 $a-c<b$ 或 $m+n<b$ 得

$$(n^2-m^2)(b-(m+n))+b(2m^2+mn)\geqslant 0$$
$$b(2m^2+mn)+b(n^2-m^2)-(m+n)(n^2-m^2)\geqslant 0$$
$$b(m^2+mn+n^2)+(m+n)(m^2-n^2)\geqslant 0$$

故 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$

南斯拉夫命题

3 设圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，作三条分别平行于三角形各边的圆 I 的切线，这三条切线在三角形内截得三个新三角形，然后再作每个新三角形的内切圆. 求这四个内切圆的面积的和.(用 $\triangle ABC$ 三边的长度表示所求的面积)

解法1 如图6.1所示，在 $\triangle ABC$ 内作 $A_1A_2 // BC$，$C_1C_2 // AB$，$B_1B_2 // CA$. 以 r, r_1, r_2, r_3 分别表示 $\triangle ABC$，$\triangle AA_1A_2$，$\triangle BB_1B_2$，$\triangle CC_1C_2$ 的内切圆的半径，a, b, c 表示 $\triangle ABC$ 三边的长度，h_a, h_b, h_c 表示对应高，s 表示半周界. 则 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC} = rs = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

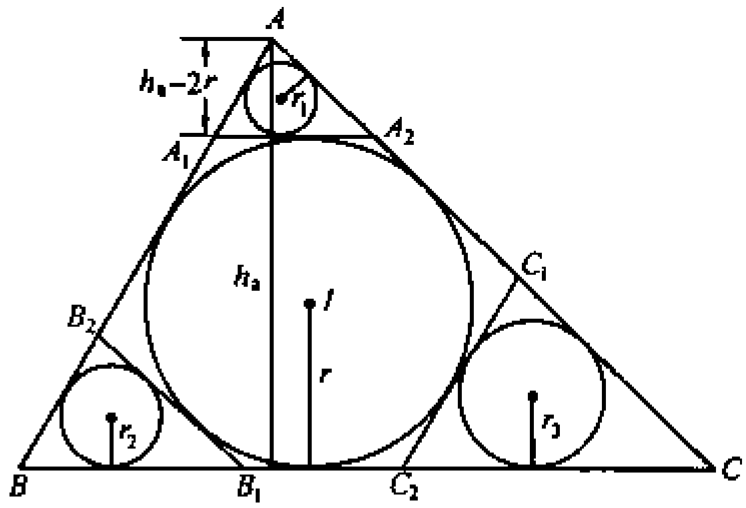


图 6.1

因为
$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a} = 1 - \frac{a}{s}$$

所以
$$r_1 = (1 - \frac{a}{s})r$$

同理
$$r_2 = (1 - \frac{b}{s})r, r_3 = (1 - \frac{c}{s})r$$

所以所求的面积和等于

$$\pi(r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \pi r^2(1 + (1 - \frac{a}{s})^2 + (1 - \frac{b}{s})^2 + (1 - \frac{c}{s})^2) = \pi r^2(4 - \frac{2(a + b + c)}{s} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2}) = \frac{\pi r^2}{s^2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

但
$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{s} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$$

代入上式可得所求的面积和等于

$$\frac{\pi(s - a)(s - b)(s - c)(a^2 + b^2 + c^2)}{s^3}$$

解法 2 用 $\triangle, s, \triangle_1, s_1, \triangle_2, s_2, \triangle_3, s_3$ 分别表示 $\triangle ABC$, $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_2BC_2$, $\triangle A_3B_3C$ 的面积和半周长.

因为 $\triangle A_3B_3C \backsim \triangle ABC$,所以

$$\frac{\triangle_3}{\triangle}=\frac{s_3^2}{s^2}, \triangle_3=\frac{s_3^2\triangle}{s^2}$$

由此,$\triangle A_3B_3C$ 的内切圆面积为

$$\frac{\pi\triangle_3^2}{s_3^2}=\frac{\pi\cdot\frac{s_3^4\triangle^2}{s^4}}{s_3^2}=\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_3^2$$

同理,$\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle A_2BC_2$ 的内切圆面积分别为$\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_1^2$ 和 $\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_2^2$.

再注意到 $s_1=s-a, s_2=s-b, s_3=s-c$,可得题设四个圆的面积和为

$$\frac{\pi\triangle^2}{s^2}+\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_1^2+\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_2^2+\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_3^2=$$

$$\frac{\pi\triangle^2}{s^4}(s^2+s_1^2+s_2^2+s_3^2)=$$

$$\frac{\pi\triangle^2}{s^4}(s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2)=$$

$$\frac{\pi\triangle^2}{s^4}(a^2+b^2+c^2)=$$

$$\frac{\pi(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)}{s^3}$$

4 十七个科学家中每一个和其余十六个通信,在他们的通信中所讨论的仅有三个问题,而任两个科学家通信时所讨论的是同一个问题.

证明:至少有三个科学家通信时所讨论的是同一个问题.

匈牙利命题

证明 设A是这十七个科学家之一.因为所讨论的问题仅有三个,所以根据抽屉原则,他和其他十六个中至少和六个科学家讨论同一个问题.不妨设这六个科学家是B,C,D,E,F,G,而所讨论的是问题甲.

如果在B,C,D,E,F,G这六个科学家中有二人所讨论的也是问题甲,则结论已成立.否则他们之间所讨论的是另外两个问题.这样,B至少和三个科学家讨论同一个问题.不妨设这三个科学家为C,D,E,而所讨论的是问题乙.

如果在C,D,E中有两人所讨论的也是问题乙,则结论成立.

否则他们之间所讨论的只能是所剩下的问题丙，所以结论也成立.

5 在平面上给定五点，其中两两连线互不平行，互不垂直，也互不重合.今过其中每一点作与其余各点连线的垂线.试问若不计已知的五点，这些垂线的交点最多能有多少？

罗马尼亚命题

解法 1 设 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 是所给定的五点.先考虑过 A_1 和过 A_2 所作的垂线.就 A_1 来说，可作其余四点的 $C_4^2=6$ 条连线的垂线；就 A_2 来说，亦可作其余四点的 6 条连线的垂线.在这两组垂线上，除同垂直于 A_3A_4,A_4A_5,A_5A_3 的三对直线因互相平行而没有交点外，共有 $6\times 6-3=33$ 个交点.

从五点中任取二点，共有 $C_5^2=10$ 种取法.因此交点的总数不多于 $10\times 33=330$.

从五点中任取三点作三角形，共有 $C_5^3=10$ 种取法.这些点在前面计算三次.故交点的总数不多于 $330-2\times 10=310$.

解法 2 从某一已知点与其余四点两两连结所得的直线作垂线，由于四点中每两点连线有 $C_4^2=6$ 条，所以从某一已知点向这些直线作垂线共有 6 条，五个点总共可作 $5\times 6=30$ 条垂线.

这 30 条垂线，如果两两相交于不同的点，则"交点"的个数为

$$C_{30}^2=435$$

但是，这些垂线中有些是不相交(平行)的，有些是相交于同一点甚至交于已知点的，对于这些情况应从上面的个数中除去.

对于连结任意两点的一条直线，其余三点向这条直线所作的三条垂线互相平行，它们两两的交点不存在，所以对每条这样的直线，上面多计入的"交点"有 $C_3^2=3$ 个，而这样的直线有 $C_5^2=10$ 条，所以总共应除去这样"交点"的个数为

$$10\times 3=30$$

五个已知点中任意三点组成一个三角形，从这三点中任意一点向其他两点连线所作的三条垂线是这个三角形的三条高，它们实际上只交于一点，所以对每一个三角形多计入了$(C_3^2-1)=3-1=2$个"交点"，而这样的三角形有 $C_5^3=10$个，所以总共应除去这样"交点"的个数为

$$2\times 10=20$$

从五个已知点中的任意一点作其余四点两两连线的垂线有 $C_4^2=6$条，这六条垂线都相交于这个已知点，所以对每一个已知点来说，上面多计算的"交点"有 $C_6^2=15$个，五个已知点总共应除去

这样交点(重合于已知点)的个数为

$$5 \times 15 = 75$$

由此可得,符合题设要求的这些垂线的交点,最多的个数为

$$435 - 30 - 20 - 75 = 310$$

6 已知一个四面体 $ABCD$,DD_0 是顶点 D 和底面 $\triangle ABC$ 的重心 D_0 的连线.过 A,B,C 作 DD_0 的平行线分别与该点相对的面相交于 A_1,B_1,C_1.证明:四面体 $ABCD$ 的体积是四面体 $A_1B_1C_1D_0$ 的体积的 1/3.当点 D_0 是 $\triangle ABC$ 内的任意点时,结果会是怎样呢?

波兰命题

证法 1 在四面体 $ABCD$ 中,作 AA_1,BB_1,CC_1 与 DD_0 平行,如图6.2所示.AA_1 交 $\triangle BCD$ 所在的平面于 A_1,故由 AA_1,DD_0 所确定的平面通过 $\triangle ABC$ 的中线 AM.所以

$$\triangle MAA_1 \backsim \triangle MDD_0$$

因 $MA = 3MD_0$(D_0 是 $\triangle ABC$ 的重心),故

$$AA_1 = 3DD_0$$

同理

$$BB_1 = 3DD_0, CC_1 = 3DD_0$$

所以 $AA_1B_1B,BB_1C_1C,CC_1A_1A$ 皆是平行四边形,而且

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$$

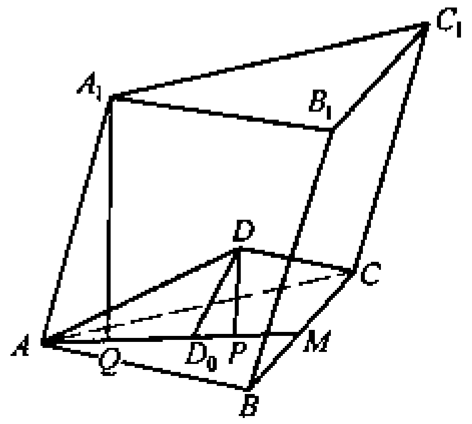


图 6.2

自 D 和 A_1 分别作 DP,A_1Q 垂直于底平面,并以 h,h_1 表示这两条垂线的长度.因 $\triangle A_1AQ \backsim \triangle DD_0P$,故

$$h_1/h = AA_1/DD_0 = 3 \Rightarrow h_1 = 3h$$

用 V_{ABCD} 表示四面体 $ABCD$ 的体积,则

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}hS_{\triangle ABC}$$

所以 $$V_{A_1B_1C_1D_0} = \frac{1}{3}h_1S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot 3hS_{\triangle ABC} = 3V_{ABCD}$$

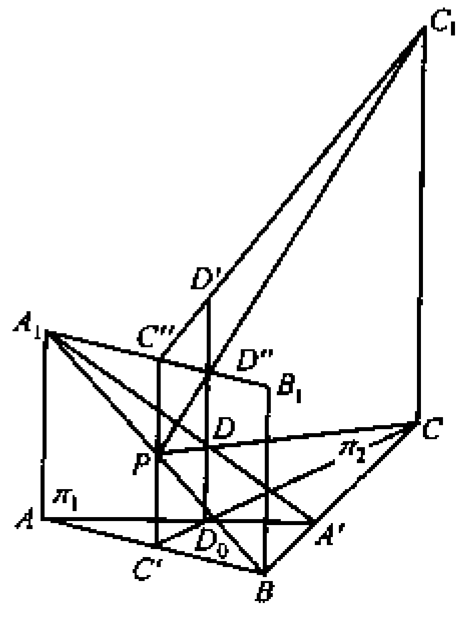


图 6.3

现在考虑当 D_0 不是 $\triangle ABC$ 的重心时的情形,如图6.3所示.设 AD_0 交 BC 于 A',CD_0 交 AB 于 C',并设过 A,B 而平行于 DD_0 的平面为 π_1,过点 B,C 与 D 的平面为 π_2.显然 A,A_1,D,D_0 与 A' 在同一个平面上,点 A_1,D 与 A' 在平面 π_2 上,A_1 是 $A'D$ 和 AA_1 的交点.所以 BA_1 是 π_1 和 π_2 的交线.

直线 DC 不平行于 π_1 而交 π_1 于 P,因为 C,D,D_0,C' 与 P 在同一个平面上,且 DD_0 平行于 π_1,故 DD_0 平行于 PC'.AP 与 A,C,D 在同一个平面上,所以 A,P,B_1 是在同一直线上.

$C'D$ 与 A,B,D 在同一个平面上,所以 C',D,C_1 也是同一直线上的点.设 $C'P$ 交 A_1B_1 于一点 C'',DD_0 交 $C''C_1$ 于一点 D'.故 D_0D' 与 C_1P 的交点存在,以 D'' 表示.

四边形 ABB_1A_1 是一个梯形. P 是其对角线的交点. 由于 $C'C''$ 平行于 AA_1, 故 $C'P = PC''$. 因此在梯形 $C'CC_1C''$ 中

$$D_0D = DD'' = D''D'$$

从而有

$$D_0D' = 3DD_0$$

四面体 $A_1B_1C_1D_0$ 的体积

$$V_{A_1B_1C_1D_0} = V_{A_1B_1D'D_0} + V_{B_1C_1D'D_0} + V_{C_1A_1D'D_0} =$$

$$V_{ABD_0D'} + V_{BCD_0D'} + V_{CAD_0D'} = V_{ABCD'}$$

根据关系式 $D_0D' = 3DD_0$ 得

$$V_{A_1B_1C_1D_0} = 3V_{ABCD}$$

证法2 本题只要 D_0 不是 $\triangle ABC$ 的边上或其延长线上的点, 皆能成立. 其简捷的证法要用矩阵的行列式.

我们以四面体 $ABCD$ 的顶点 D 为空间直角坐标系的原点, 并分别以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 表示向量 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$. 根据空间解析几何的定理知

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\det(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$$

其中, $\det(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ 表示矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ 的行列式.

若 D_0 在 $\triangle ABC$ 所在的平面上, 则

$$\boldsymbol{D}_0 = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{C}, a + b + c = 1 \quad ①$$

其中, $\boldsymbol{D}_0$ 表示向量 $\overrightarrow{DD_0}$. 若 D_0 不在 $\triangle ABC$ 的边上或其延长线上, 则 $abc \neq 0$.

设 A_t 是过 A 而平行于 $\overrightarrow{DD_0}$ 的直线上的任意点, 则 $\boldsymbol{A}_t$ (即向量 $\overrightarrow{DA_t}$) 可表示为

$$\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{A} + t(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{C}) = (1 + at)\boldsymbol{A} + bt\boldsymbol{B} + ct\boldsymbol{C}$$

其中, t 是参数. 若 $\boldsymbol{A}$ 的系数为 0, 则此向量的终点在 $\triangle BCD$ 所在的平面上. 此时 $t = -\frac{1}{a}$, 故

$$\boldsymbol{A}_1 = -\frac{b}{a}\boldsymbol{B} - \frac{c}{a}\boldsymbol{C} \quad ②$$

同理

$$\boldsymbol{B}_1 = -\frac{a}{b}\boldsymbol{A} - \frac{c}{b}\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}_1 = -\frac{a}{c}\boldsymbol{A} - \frac{b}{c}\boldsymbol{B} \quad ③$$

所以 $V_{A_1B_1C_1D_0} = \frac{1}{6}\det(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{D}_0)$

由 ①,②,③ 知

$$\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{D}_0 = -a\boldsymbol{A} - \left(\frac{b}{a} + b\right)\boldsymbol{B} - \left(\frac{c}{a} + c\right)\boldsymbol{C}$$

$$B_1 - D_0 = -(\frac{a}{b} + a)A - bB - (\frac{c}{b} + c)C$$

$$C_1 - D_0 = -(\frac{a}{c} + a)A - (\frac{b}{c} + b)B - cC$$

令

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{a}{b} + a & \frac{a}{c} + a \\ \frac{b}{a} + b & b & \frac{b}{c} + b \\ \frac{c}{a} + c & \frac{c}{b} + c & c \end{pmatrix}$$

则 $(A, B, C)(M) = -(A_1 - D_0, B_1 - D_0, C_1 - D_0)$

因两矩阵之积的行列式等于该两矩阵的行列式之积.故

$$|\det(A, B, C) \cdot \det(M)| = |\det(A_1 - D_0, B_1 - D_0, C_1 - D_0)|$$

又因 $\det(M) = 2 + a + b + c = 3$

故得 $3V_{ABCD} = V_{A_1B_1C_1D_0}$

证法 3 设 D_1 是 $\triangle ABC$ 的重心,连结 BD_1 并延长交 AC 于 E,如图 6.4 所示,则点 E 是 AC 的中点,且

$$BE : D_1E = 3 : 1$$

过 E, D_1, D 三点作一个平面.因为点 B 在 ED_1 上,所以它在平面 ED_1D 上.又因 $BB_1 /\!/ D_1D$,所以 BB_1 在平面 ED_1D 上.

在平面 ED_1D 上,直线 BB_1 与直线 ED 必定相交,其交点也就是 BB_1 与平面 ADC 的交点 B_1.这就是说,E, D, B_1 三点在一直线上.

在 $\triangle EBB_1$ 中,由 $BB_1 /\!/ DD_1$ 可得

$$BB_1 : D_1D = BE : D_1E = 3 : 1$$

即 $BB_1 = 3D_1D$

同理 $AA_1 = 3D_1D, CC_1 = 3D_1D$

故 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 3D_1D$

又因 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1 /\!/ D_1D$,所以四边形 A_1ABB_1,A_1ACC_1,B_1BCC_1 都是平行四边形,从而平面 $A_1B_1C_1 /\!/$ 平面 ABC,并且

$$A_1B_1 = AB, B_1C_1 = BC, C_1A_1 = CA$$

所以

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC \quad ④$$

从点 D 作 $DH \perp$ 平面 ABC,垂足为 H;从点 B_1 作 $B_1H' \perp$ 平面 ABC,垂足为 H'.有

$$\angle BH'B_1 = \angle D_1HD = 90°$$

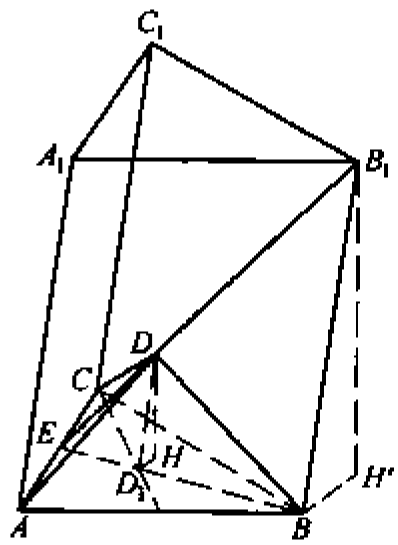


图 6.4

因为 $BB_1 /\!/ D_1D$，$B_1H' /\!/ DH$，所以

$$\angle BB_1H' = \angle D_1DH$$

所以 $$\triangle BH'B_1 \backsim \triangle D_1HD$$

所以 $$B_1H' : DH = BB_1 : D_1D = 3 : 1$$

即

$$B_1H' = 3DH \quad ⑤$$

由 ④，⑤ 即得

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}$$

如果点 D_1 是 $\triangle ABC$ 内的任意一点，上述结论仍然是成立的．证明如下，如图 6.5 所示．

在平面 ABC 上，连结 AD_1 交 BC 于 A'，连结 CD_1 交 AB 于 C'．

过 A'，D_1，D 三点作一个平面，因为 A 在 $A'D_1$ 上，且 $AA_1 /\!/ D_1D$，所以 AA_1 在平面 $A'D_1D$ 上，直线 AA_1 与 $A'D$ 必定相交，其交点也就是直线 AA_1 与平面 BCD 的交点 A_1，即 A'，D，A_1 三点在一直线上．

过 C，D_1，D 三点作一个平面．因为点 C' 在 CD_1 上，且 C' 在 AB 上，所以平面 CD_1D 与平面 ABA_1 必交于过点 C' 的一条直线 $C'P$，设直线 CD 与这条交线 $C'P$ 相交于点 P．又由 $D_1D /\!/ AA_1$ 可得 $DD_1 /\!/$ 平面 ABA_1，从而 $C'P /\!/ D_1D$．

因为 $BB_1 /\!/ AA_1 /\!/ D_1D$，所以 BB_1 在平面 ABA_1 上，直线 BB_1 与 AP 必相交．由于 AP 在平面 ACD 上，所以直线 BB_1 与 AP 的交点，也就是 BB_1 与平面 ACD 的交点 B_1，即 A，P，B_1 三点共线．

同理可证 C'，D，C_1 三点共线；A_1，P，B 三点共线．

因为 $AA_1 /\!/ BB_1$，它们都在平面 ABA_1 上，$C'P$ 与 A_1B_1 相交，设交点为 C''．四边形 A_1ABB_1 是梯形，点 P 是梯形对角线的交点，且 $C'C'' /\!/ AA_1 /\!/ BB_1$（都平行于 D_1D），所以 $C'P = PC''$．

因为 $C'C'' /\!/ D_1D /\!/ CC_1$，它们都在平面 CD_1D 上，设 $C''C_1$ 与直线 D_1D 相交于点 D_2，PC_1 与 D_1D 相交于点 D_3．在梯形 $C''C'CC_1$ 中，$D_1D_2 /\!/ C'C'' /\!/ CC_1$，$C'P = PC''$，$D$，$D_3$ 分别是 PC，PC_1 与 D_1D_2 的交点，点 D 还是梯形 $PC'CC_1$ 对角线的交点，所以有

$$D_1D = DD_3 = D_3D_2$$

即有 $$D_1D_2 = 3D_1D$$

从而不难证明 $$V_{ABCD_2} = 3V_{ABCD}$$

又因 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ D_1D_2$，所以四面体 $A_1B_1D_2D_1$ 与四面体 ABD_1D_2 有相等的底面积，即

$$S_{\triangle A_1D_1D_2} = S_{\triangle AD_2D_1}$$

与相等的高（都等于直线 BB_1 和平面 $AD_1D_2A_1$ 间的距离），因此它

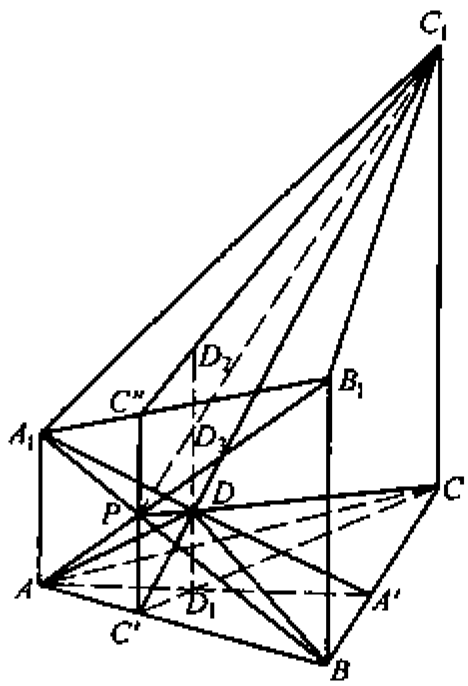


图 6.5

们的体积相等,即

$$V_{A_1B_1D_2D_1}=V_{ABD_1D_2}$$

同理可得 $V_{B_1C_1D_2D_1}=V_{BCD_1D_2}$, $V_{C_1A_1D_2D_1}=V_{CAD_1D_2}$

所以

$$V_{A_1B_1C_1D_1}=V_{A_1B_1D_2D_1}+V_{B_1C_1D_2D_1}+V_{C_1A_1D_2D_1}=$$
$$V_{ABD_1D_2}+V_{BCD_1D_2}+V_{CAD_1D_2}=$$
$$V_{ABCD_2}=3V_{ABCD}$$

证法4 我们也可以利用物理学上质点重心的有关知识来证明本题的结论.现就一般情况证明如下.

如图6.6所示,设 D_1 是 $\triangle ABC$ 内的任一点,在底面 $\triangle ABC$ 内,连结 AD_1, BD_1, CD_1,并分别延长与对边相交于 A', B', C'.如前所证,必有 A', D, A_1 三点共线(在一直线上), B', D, B_1 三点共线, C', D, C_1 三点共线.

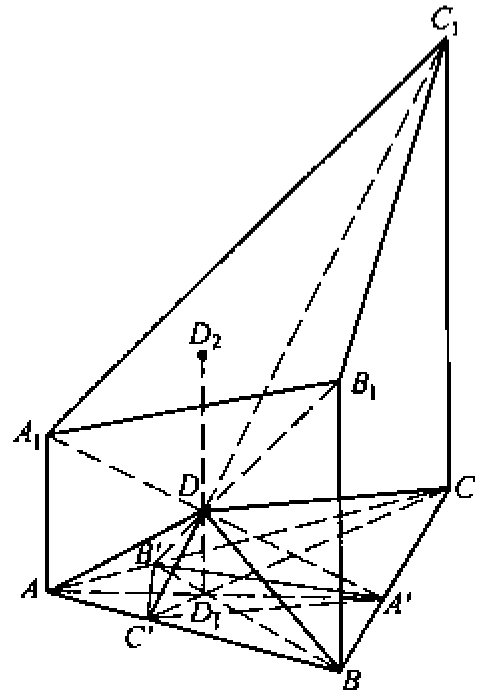


图6.6

在 A, B, C 三点分别放置适当的质量 x, y, z,使 A, B, C 三质点的重心为点 D_1.这时,点 C' 可看成是点 A(质量 x)与点 B(质量 y)的重心,点 A' 可看成是点 B(质量 y)与点 C(质量 z)的重心,点 B' 可看成是点 C(质量 z)与点 A(质量 x)的重心.而点 D_1 既可以看成是点 A(质量 x)与 A'(质量 $y+z$)的重心,也可以看成是点 B(质量 y)与 B'(质量 $z+x$)的重心,还可以看成是点 C(质量 z)与 C'(质量 $x+y$)的重心.由重心的性质,应有

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{z}{x},\frac{CA'}{A'B}=\frac{y}{z},\frac{BC'}{C'A}=\frac{x}{y}$$

我们可取 $x=B'C$, $z=AB'$, $y=\frac{CA'}{A'B}\cdot AB'$,便能满足要求.

因为

$$\frac{S_{\triangle AB'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AB'\cdot AC'}{AB\cdot AC}=\frac{AB'}{AC}\cdot\frac{AC'}{AB}$$

而

$$\frac{AB'}{AC}=\frac{AB'}{AB'+B'C}=\frac{z}{x+z}$$
$$\frac{AC'}{AB}=\frac{AC'}{AC'+C'B}=\frac{y}{x+y}$$

所以

$$\frac{S_{\triangle AB'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{yz}{(x+y)(x+z)}$$

同理可得

$$\frac{S_{\triangle BC'A'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{zx}{(y+z)(y+x)}$$
$$\frac{S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{xy}{(z+x)(z+y)}$$

因此

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AB'C'}-S_{\triangle BC'A'}-S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle ABC}}=$$

$$1-\frac{yz}{(x+y)(x+z)}-\frac{zx}{(y+z)(y+x)}-\frac{xy}{(z+x)(z+y)}=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

由于四面体 $A'B'C'D$ 与四面体 $ABCD$ 有相同的高，所以它们的体积之比等于底面积之比，即有

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad ⑥$$

又 $$\frac{A'D}{DA_1}=\frac{A'D_1}{D_1A}=\frac{x}{y+z}$$

同理 $$\frac{B'D}{DB_1}=\frac{y}{z+x},\frac{C'D}{DC_1}=\frac{z}{x+y}$$

由于三面角 $D—A'B'C'$ 与三面角 $D—A_1B_1C_1$ 全等，所以四面体 $A'B'C'D$ 与四面体 $A_1B_1C_1D$ 的体积之比等于对应的三条侧棱乘积之比，即有

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{DA'\cdot DB'\cdot DC'}{DA_1\cdot DB_1\cdot DC_1}=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} \quad ⑦$$

由 ⑥,⑦ 可得

$$V_{A_1B_1C_1D}=2V_{ABCD} \quad ⑧$$

为证明本题结论($V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}$)，我们进一步来证明 $V_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{3}{2}V_{A_1B_1C_1D}$. 在 $\triangle A'B'C'$ 的三顶点 A',B',C' 分别放置质量 $\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2},\frac{x+y}{2}$，这时 A',B',C' 三质点的重心也就在点 D_1. 再在点 A_1,B_1,C_1 三点分别放置适当的质量，使点 D 恰为各对质点 A_1 与 A'，B_1 与 B'，C_1 与 C' 的重心. 因为

$$\frac{A_1D}{DA'}=\frac{y+z}{x},\frac{B_1D}{DB'}=\frac{z+x}{y},\frac{C_1D}{DC'}=\frac{x+y}{z}$$

所以 A_1,B_1,C_1 三点放置的质量应分别为 $\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}$.

这样，点 D 是点 $A'\left(质量\frac{y+z}{2}\right)$ 与 $A_1\left(质量\frac{x}{2}\right)$ 的重心，也是点 $B'\left(质量\frac{z+x}{2}\right)$ 与 $B_1\left(质量\frac{y}{2}\right)$ 的重心，还是点 $C'\left(质量\frac{x+y}{2}\right)$ 与 $C_1\left(质量\frac{z}{2}\right)$ 的重心. 设 A_1,B_1,C_1 三点的重心为 D_2，它显然在平面 $A_1B_1C_1$ 上. 而 D_1 是 A',B',C' 三点的重心，所以点 D 可以看成是 D_1 与 D_2 两质点的重心，点 D_2 在直线 D_1D 上，并且这时在点 D_1 相当于集中了点 A',B',C' 的总质量 $x+y+z$，在点 D_2 相当于集中了点 A_1,B_1,C_1 的总质量 $\frac{x+y+z}{2}$，因此

$$\frac{D_1D}{DD_2}=\frac{(x+y+z)/2}{x+y+z}=\frac{1}{2}$$

所以
$$\frac{D_1D_2}{DD_2}=\frac{D_1D+DD_2}{DD_2}=\frac{3}{2}$$

由此可知,从点 D_1 与 D 分别到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离之比等于 $\frac{3}{2}$.

四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 与四面体 $A_1B_1C_1D$ 具有同一底面 $\triangle A_1B_1C_1$,而对应高之比为 $\frac{3}{2}$,所以有

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{3}{2} \quad ⑨$$

由 ⑧,⑨ 即得

$$V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}$$



圣彼得堡战神广场

第 7 届国际数学奥林匹克

民主德国,1965

1 求出区间$[0,2\pi]$内所有能满足下面不等式的实数 x:

$$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}$$

南斯拉夫命题

解 原不等式可以改写为

$$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \quad ①$$

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2} \quad ②$$

先解不等式 ①.因为不等式 ① 的右边总是非负数,所以如果 $\cos x \leqslant 0$,即

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \quad ③$$

不等式 ① 总是成立的;

如果 $\cos x > 0$,将不等式 ① 两边平方,得

$$4\cos^2 x \leqslant 2-2\sqrt{\cos^2 2x}$$

$$\sqrt{\cos^2 2x} \leqslant 1-2\cos^2 x$$

$$|\cos 2x| \leqslant -\cos 2x$$

所以
$$\cos 2x \leqslant 0$$

所以
$$\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

所以
$$\frac{\pi}{4}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}+k\pi, k=0,1$$

于是,当 $\cos x > 0$ 时能使不等式 ① 成立的 x 值为

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{4} \quad ④$$

综合 ③,④ 得不等式 ① 的解为

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$$

再考虑不等式 ②.它的两边都是非负数,分别平方,得

$$2-2\sqrt{\cos^2 2x} \leqslant 2, \ -2\sqrt{\cos^2 2x} \leqslant 0$$

它对任意实数 x 都是成立的.

因此,原不等式的解为

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$$

2 给出方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

其系数满足下列条件:

(1) a_{11}, a_{22}, a_{33} 是正的;

(2) 所有其他的系数都是负的;

(3) 每一个方程中的系数之和是正的.

证明: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是这个方程组的惟一解.

波兰命题

证法 1 假设 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 不是原方程组的惟一解,则其非平凡解有如下两种可能的情形.

ⅰ 某个数 x_i 是正的.

不失一般性,可设 $x_1 > 0, x_1 \geqslant x_2, x_1 \geqslant x_3$. 由

$$a_{12}x_2 \geqslant a_{12}x_1, a_{13}x_3 \geqslant a_{13}x_1, a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$$

得
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geqslant (a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 > 0$$

引出一个矛盾,所以这种情形不会出现.

ⅱ 某个数 x_i 是负的.

不失一般性,可设 $x_1 < 0, x_1 \leqslant x_2, x_1 \leqslant x_3$. 由

$$a_{12}x_2 \leqslant a_{12}x_1, a_{13}x_3 \leqslant a_{13}x_1, a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$$

得
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant (a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 < 0$$

这也引出一个矛盾,所以这种情形也不会出现.

综上所证,可知 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是原方程组的惟一解.

证法 2 n 元线性齐次方程组有非平凡解的必要条件是其系数行列式等于 0.

用 $\triangle$ 表示本题方程组的系数行列式,即

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

要证 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是方程组的惟一解,只须证明 $\triangle \neq 0$.

在 $\triangle$ 中,第三列各数以 $s_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$ 代换,其值不变,故

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & s_1 \\ a_{21} & a_{22} & s_2 \\ a_{31} & a_{32} & s_3 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + s_2 \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} + s_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

由条件(1),(2)可知

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} > 0$$

又 $$a_{11} > -a_{12} - a_{13} > -a_{12} \Rightarrow a_{11} > |a_{12}|$$

$$a_{22} > -a_{21} - a_{31} > -a_{21} \Rightarrow a_{22} > |a_{21}|$$

故 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

最后由条件(3)可知 $s_i > 0$,从而证明了 $\triangle > 0$.

证法3 用反证法,如果有不全为零的解:$x_1 = k_1, x_2 = k_2, x_3 = k_3$.则 $|k_1|, |k_2|, |k_3|$ 中必有最大者,不失一般性,不妨设

$$\max\{|k_1|, |k_2|, |k_3|\} = |k_1|, k_1 \neq 0$$

因 $$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0$$

所以 $$a_{11} = -\frac{k_2}{k_1}a_{12} - \frac{k_3}{k_1}a_{13}$$

从而 $$|a_{11}| = \left|-\frac{k_2}{k_1}a_{12} - \frac{k_3}{k_1}a_{13}\right| \leqslant$$

$$\left|\frac{k_2}{k_1}\right| \cdot |a_{12}| + \left|\frac{k_3}{k_1}\right| \cdot |a_{13}| \leqslant |a_{12}| \cdot |a_{13}|$$

由条件(1),(2)知 $a_{11} > 0, a_{12} < 0, a_{13} < 0$.所以

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} \leqslant 0$$

这与条件(3)矛盾.因此方程组有惟一解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3 已知一个四面体 $ABCD$ 的棱 AB, CD 的长度分别为 a, b.这两棱间的距离为 d,交角为 ω.该四面体被一个平行于 AB, CD 的平面 π 截成两部分.已知 AB, CD 到平面 π 的距离之比为 k,求这两部分的体积的比.

捷克斯洛伐克命题

解法1 若一个多面体的所有顶点都在两个平行的平面上,如图7.1所示,上底和下底的面积分别为 A_1, A_2,高为 h,它的中截面的面积为 M.根据立体几何的定理,这个多面体的体积为

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + A_2 + 4M) \quad ①$$

这种多面体,叫做拟柱*.

一般书多称"拟柱",事实上要称"拟棱台"比较适当.

设平行于 AB, CD 的平面 π 和四面体 $ABCD$ 的截面为 $PQRS$,其中 $PQ \parallel SR \parallel CD, QR \parallel PS \parallel AB$. T_1 表示以 $PQRS$ 为下底,线

段 AB 为上底，高为 m 的拟柱；T_2 表示以 $PQRS$ 为上底，线段 CD 为下底，高为 n 的拟柱. 根据题意

$$m + n = d, m/n = k \qquad ②$$

T_1, T_2 的体积积分别用 V_1, V_2 表示.

▱$PQRS$ 的面积

$$S_{PQRS} = PQ \cdot QR \cdot \sin\omega$$

但是 $$PQ = \frac{m}{d} \cdot DC = \frac{mb}{d}, QR = \frac{n}{d} \cdot AB = \frac{na}{d}$$

所以 $$S_{PQRS} = \frac{mnab}{d^2} \cdot \sin\omega$$

平行于 AB 及 $PQRS$，且在其中间的平面为 $P'Q'R'S'$，其面积为

$$M_1 = \frac{1}{2}PQ\left(\frac{QR + a}{2}\right)\sin\omega =$$
$$\frac{mb}{4d}\left(\frac{na}{d} + a\right)\sin\omega = \frac{mab}{4d^2}(n + d)\sin\omega$$

同样求得平行于 $PQRS$ 及 CD，且在其中间的平面的面积为

$$M_2 = \frac{nab}{4d^2}(m + d)\sin\omega$$

应用①得

$$V_1 = \frac{m}{6}(S_{PQRS} + 4M_1) = \frac{m^2ab}{6d^2}(2n + d)\sin\omega$$

$$V_2 = \frac{n}{6}(S_{PQRS} + 4M_2) = \frac{n^2ab}{6d^2}(2m + d)\sin\omega$$

所以

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{m^2(2n + d)}{n^2(2m + d)} \qquad ③$$

由②知 $$\frac{n}{d} = \frac{1}{k + 1}, \frac{m}{d} = \frac{k}{k + 1}$$

代入③得

$$\frac{V_1}{V_2} = k^2 \cdot \frac{2 + k + 1}{2k + k + 1} = \frac{k^2(k + 3)}{3k + 1}$$

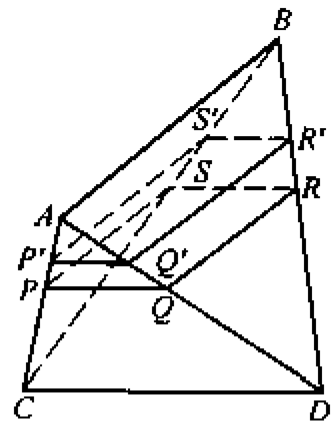


图 7.1

解法 2 利用仿射变换把 $ABCD$ 映成另一个四面体. 经这样变换后，比值 k 不变，被 π 分成的两部分的体积的比也不变.

设 $ABCD \to A'B'C'D'$，如图 7.2 所示，并设所映成的四面体 $A'B'C'D'$ 顶点的坐标为

$$A'(1,0,0), B'(0,1,0), C'(0,0,1), D'(0,0,0)$$

因 $C'D'$ 垂直于 $A'B'$ 所在的平面 $z = 0$ 上，故四面体被 π 所截成的四边形 $PQRS$ 是矩形.

$D'Q$ 和 QA' 的长度分别以 t 和 $1 - t$ 表示，则 $k = t/(1 - t)$.

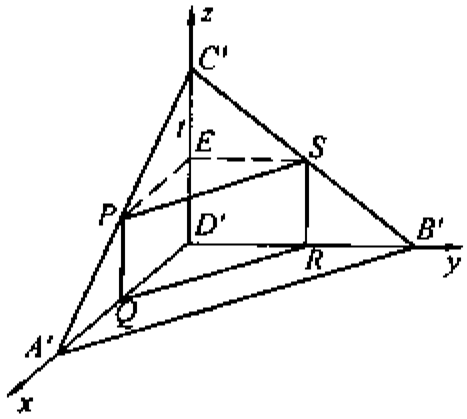


图 7.2

故 $t = k/(1+k)$.

$A'B'C'D'$ 被 π 及平行于平面 $z=0$ 而通过 PQ 的平面分成如下三部分:直棱柱 $PESRQD'$,四面体 $C'PES$ 和拟柱 $A'B'SPQR$(底面为 $A'B'RQ$,另一底为线段 PS).

直棱柱 $PESRQD'$ 的体积等于

$$S_{\triangle D'QR}\cdot PQ=\frac{1}{2}t^2(1-t)$$

四面体 $C'PES$ 的体积等于

$$\frac{1}{2}S_{\triangle PES}\cdot C'E=\frac{1}{6}t^3$$

拟柱 $A'B'SPQR$ 的体积等于

$$\frac{1}{3}S_{\triangle A'B'D'}\cdot C'D'-\frac{1}{2}t^2(1-t)-\frac{t^3}{6}=\frac{1}{6}-\frac{t^2(3-2t)}{6}=\frac{(1-t)^2(1+2t)}{6}$$

以 V_1 表示直棱柱 $PESRQD'$ 及四面体 $C'PES$ 的体积和,以 V_2 表示拟柱 $A'B'SPQR$ 的体积,则

$$V_1:V_2=\frac{t^2(3-2t)}{6}:\frac{(1-t)^2(1+2t)}{6}=k^2(k+3):(3k+1)$$

注　V_1 与 V_2 之比仅依赖于 k,而与 a,b,d,ω 无关.

解法3　如图7.3所示,AB,CD 平行于平面 $EFGH$.过 EH 作平面 EHK // 平面 BCD.

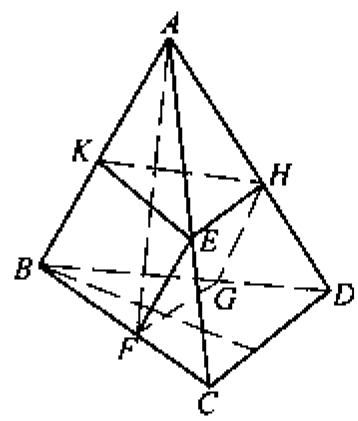


图7.3

设三棱锥 $A—BCD$ 和 $A—KEH$ 的体积分别为 V 和 V_1.由 A 向底所作的高分别为 h 和 h_1.在 $\triangle BCD$ 中,设 CD 边上的高为 L,$\triangle BFG$ 中 FG 边上的高为 L_1.

根据题设及平行面截线段成比例可知

$$h_1=\frac{kh}{1+k},L_1=\frac{kL}{1+k},FG=\frac{bk}{1+k}$$

其中,$k=\frac{AE}{EC}$.则

$$V=\frac{h}{3}\cdot\frac{L}{2}b=\frac{hLb}{6}$$

$$V_1=\frac{h_1}{3}\cdot\frac{L_1}{2}\cdot\frac{bk}{1+k}=\frac{hLbk^3}{6(1+k)^3}=\frac{k^3}{(1+k)^3}V$$

又直棱柱 BH 的体积

$$V_2=\frac{bLk^2}{2(1+k)^2}\cdot\frac{h}{1+k}=\frac{3k^2}{(1+k)^3}V$$

所以拟柱 FA 的体积

$$V_3 = V_1 + V_2 = \frac{k^2(k+3)}{(1+k)^3}V$$

拟柱 ED 的体积

$$V_4 = V - V_3 = \frac{1+3k}{(1+k)^3}V$$

因而
$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}$$

解法 4 设平面 γ 和直线 AB 之间的距离为 y. 平面 γ 和四面体 $ABCD$ 的截口是平行四边形 $MLNR$，如图 7.4 所示. 这是由于 $ML \parallel AB$，$RN \parallel AB$，所以有 $ML \parallel RN$，并且 $NL \parallel CD$，$MR \parallel CD$，故有 $NL \parallel MR$.

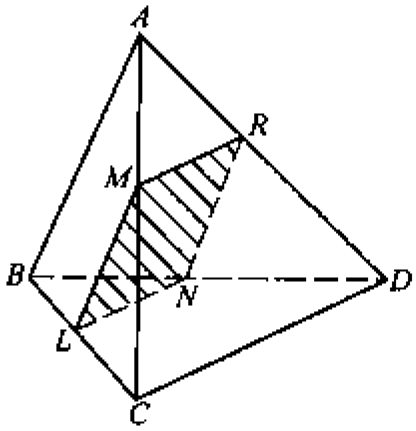


图 7.4

由平行线截得比例线段定理得

$$ML : a = y : d \Rightarrow ML = \frac{ay}{d}$$

$$MR : b = (d-y) : d \Rightarrow MR = \frac{b(d-y)}{d}$$

因为平行四边形 $MLNR$ 的两边 ML 和 MR 之间的夹角为 δ，所以这平行四边形的面积为

$$s(y) = ML \cdot MR \cdot \sin\delta = \frac{ay}{d} \cdot \frac{b(d-y)}{d}\sin\delta$$

相应的，对于和直线 AB 的距离为 x 的平行于 γ 的平面所确定的平行四边形的面积为

$$s(x) = \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d}\sin\delta$$

因此，利用横断面的面积计算体积的公式，得到平面 γ 所截的一部分多面体 $MLNRAB$ 的体积

$$V_1 = \int_0^y s(x)\mathrm{d}x = \int_0^y \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d}\sin\delta\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^y \left(\frac{ab}{d}x - \frac{ab}{d^2}x^2\right)\sin\delta\mathrm{d}x = \left(\frac{aby^2}{2d} - \frac{aby^3}{3d^2}\right)\sin\delta =$$
$$\frac{aby^2}{6d^2}(3d-2y)\sin\delta \qquad ④$$

若在 ④ 中令 $y = d$，我们就得到

$$V_{ABCD} = \frac{abd}{6}\sin\delta \qquad ⑤$$

由 ④ 和 ⑤ 就得到平面 γ 截四面体 $ABCD$ 所得另一部分多面体 $MLNRCD$ 的体积

$$V_2 = V_{ABCD} - V_1 = \frac{abd}{6}\sin\delta - \frac{aby^2}{6d^2}(3d-2y)\sin\delta =$$

$$\frac{ab}{6}\left(d-\frac{\gamma^2}{d^2}(3d-2\gamma)\right)\sin\delta$$

由已知条件$\frac{\gamma}{d-\gamma}=k$，即 $d=\gamma\frac{k+1}{k}$，于是得

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{ab\gamma^2}{6d^2}(3d-2\gamma)\sin\delta}{\frac{ab}{6}\left(d-\frac{\gamma^2}{d^2}(3d-2\gamma)\right)\sin\delta}=$$

$$\frac{\gamma^2(3d-2\gamma)}{d^3-\gamma^2(3d-2\gamma)}=\frac{k^3+3k^2}{3k+1}=\frac{k^2(k+3)}{3k+1}$$

4 求出所有四元实数组(x_1,x_2,x_3,x_4)，使其中任一数与其他三数的积之和皆等于 2.

苏联命题

解法 1 本题相当于求下面方程组的所有实数解，即

$$\begin{cases}x_1+x_2x_3x_4=2 & ①\\ x_2+x_3x_4x_1=2 & ②\\ x_3+x_4x_1x_2=2 & ③\\ x_4+x_1x_2x_3=2 & ④\end{cases}$$

若 $x_1=0$，则自 ① 得 $x_2x_3x_4=2$，自 ②，③，④ 得 $x_2=x_3=x_4=2$，这两个结果互相矛盾，故 $x_1\neq0$，同理 $x_2\neq0$，$x_3\neq0$，$x_4\neq0$.

令 $x_1x_2x_3x_4=p$，则方程组中每一个方程皆可写成

$$x_i+\frac{p}{x_i}=2$$

或 $$x_i^2-2x_i+p=0$$

解之得 $$x_i=1\pm\sqrt{1-p}$$

由于 x_i 是实数，故 $p\leqslant1$.

(1) 若 $p=1$，则 $x_i=1$，$i=1,2,3,4$.

(2) 若 $p<1$，则有如下三种可能.

ⅰ 三个根为 $1+\sqrt{1-p}$，一个根为 $1-\sqrt{1-p}$. 这时

$$p=(1+\sqrt{1-p})^3(1-\sqrt{1-p})=(1+\sqrt{1-p})^2p\Leftrightarrow$$
$$1=(1+\sqrt{1-p})^2\Leftrightarrow1+\sqrt{1-p}=\pm1$$

式子左边不能取负值，故 $1+\sqrt{1-p}=1$，即 $p=1$. 但这和 $p<1$ 的假设矛盾.

ⅱ 三个根为 $1-\sqrt{1-p}$，一个根为 $1+\sqrt{1-p}$. 这时

$$p=(1-\sqrt{1-p})^3(1+\sqrt{1-p})=(1-\sqrt{1-p})^2p\Leftrightarrow$$
$$1=(1-\sqrt{1-p})^2\Leftrightarrow1-\sqrt{1-p}=\pm1$$

因 $p<1$，式子左边应取负值，故 $1-\sqrt{1-p}=-1$. 解之得

$p=-3$.故有一个 x_i 为3,其他三数为 -1.

ⅲ 两个根为 $1+\sqrt{1-p}$,两个根为 $1-\sqrt{1-p}$.这时

$$p=(1+\sqrt{1-p})^2(1-\sqrt{1-p})^2=p^2$$

故 $p=1$.这又和 $p<1$ 的假设矛盾.

综合以上各种情形,得

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,1,1),(3,-1,-1,-1),(-1,3,-1,-1),$$
$$(-1,-1,3,-1),(-1,-1,-1,3)$$

解法2 首先,我们证明 $x_i\neq 0(i=1,2,3,4)$;否则,例如设 $x_1=0$ 时,则由②,③,④得 $x_2=x_3=x_4=2$,不满足①.故 $x_i\neq 0$.

其次,由①得 $x_3x_4=\frac{2-x_1}{x_2}$,由②得 $x_3x_4=\frac{2-x_2}{x_1}$,从而得

$$\frac{2-x_1}{x_2}=\frac{2-x_2}{x_1}$$
$$2x_1-x_1^2=2x_2-x_2^2$$
$$(x_1-1)^2=(x_2-1)^2$$

即
$$|x_1-1|=|x_2-1|$$

将未知数 x_1,x_2,x_3,x_4 进行轮换,可得

$$|x_1-1|=|x_2-1|=|x_3-1|=|x_4-1| \quad ⑤$$

就 x_i 的取值可分下列五种情况.

ⅰ 四个 $x_i\geqslant 1(i=1,2,3,4)$.

由⑤可知,$x_1=x_2=x_3=x_4$,由①,得

$$x_1+x_1^3=2,x_1^3+x_1-2=0$$

即
$$(x_1-1)(x_1^2+x_1+2)=0$$

由于 $x_1^2+x_1+2=0$ 的判别式 $\Delta=1^2-8=-7<0$,故 $x_1^2+x_1+2=0$ 无实数解.

只有 $x_1=1$,所以 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

ⅱ 只有三个 $x_i\geqslant 1(i=2,3,4)$.

则 $x_1<1$,由⑤可得

$$-x_1+1=x_2-1=x_3-1=x_4-1$$

所以
$$x_2=x_3=x_4,x_1=2-x_2$$

由①得
$$2-x_2+x_2^3=2,x_2(x_2^2-1)=0$$

因为 $x_2\geqslant 1$,所以

$$x_2=1,x_1=2-x_2=1$$

这与 $x_1<1$ 矛盾,即这时方程组无解.

ⅲ 只有二个 $x_i\geqslant 1(i=3,4)$.

则 $x_1<1,x_2<1$.由⑤得

$$-x_1+1=-x_2+1=x_3-1=x_4-1$$

所以 $x_1=x_2, x_3=x_4=2-x_1$

由 ③ 得 $2-x_1+x_1^2(2-x_1)=2$

即 $x_1(x_1-1)^2=0$

因为 $x_1 \neq 0$,所以 $x_1=1$,这与 $x_1<1$ 矛盾.即这时方程组无解.

ⅳ 只有一个 $x_i \geqslant 1$(例如 $x_4 \geqslant 1$),其余 $x_i<1(i=1,2,3)$.

由 ⑤ 得

$$-x_1+1=-x_2+1=-x_3+1=x_4-1$$

所以 $x_1=x_2=x_3, x_4=2-x_1$

由 ④ 得 $2-x_1+x_1^3=2$

即 $x_1(x_1^2-1)=0$

由于 $x_1<1$,且 $x_1 \neq 0$,所以 $x_1=-1$,从而得

$$x_1=x_2=x_3=-1, x_4=2-x_1=3$$

满足方程组.

轮换 x_1, x_2, x_3, x_4,得

$(3,-1,-1,-1),(-1,3,-1,-1),(-1,-1,3,-1)$

也是原方程组的解.

ⅴ 四个 $x_i<1(i=1,2,3,4)$.

由 ⑤ 得

$$x_1=x_2=x_3=x_4$$

类似于情形 ⅰ,可得 $x_1=1$,这与 $x_1<1$ 矛盾.这时即方程组无解.

综上所述,所求实数为

$$x_1=x_2=x_3=x_4=1$$
$$x_1=x_2=x_3=-1, x_4=3$$
$$x_2=x_3=x_4=-1, x_1=3$$
$$x_3=x_4=x_1=-1, x_2=3$$
$$x_4=x_1=x_2=-1, x_3=3$$

解法 4 根据题意 ① - ② 得

$$(x_1-x_2)(x_3x_4-1)=0$$

于是原方程组与下列两个方程组 Ⅰ 和 Ⅱ 同解,即

$$\text{Ⅰ}\quad \begin{cases} x_1-x_2=0 & ⑥ \\ x_1+x_2x_3x_4=2 & ① \\ x_3+x_4x_1x_2=2 & ③ \\ x_4+x_1x_2x_3=2 & ④ \end{cases}$$

$$\text{Ⅱ}\quad\begin{cases}x_3x_4-1=0 & ⑦\\ x_1+x_2x_3x_4=2 & ①\\ x_3+x_4x_1x_2=2 & ③\\ x_4+x_1x_2x_3=2 & ④\end{cases}$$

由⑥，方程组Ⅰ变为

$$\begin{cases}x_1+x_1x_3x_4=2 & ⑧\\ x_3+x_1^2x_4=2 & ⑨\\ x_4+x_1^2x_3=2 & ⑩\end{cases}$$

⑨－⑩得 $(x_3-x_4)(x_1^2-1)=0$

于是方程组Ⅰ又与下列方程组Ⅰ′和Ⅱ″同解，即

$$\text{Ⅰ}'\begin{cases}x_3-x_4=0\\ x_1+x_1x_3x_4=2\\ x_3+x_1^2x_4=2\end{cases}\qquad \text{Ⅰ}''\begin{cases}x_1^2-1=0\\ x_1+x_1x_3x_4=2\\ x_3+x_1^2x_4=2\end{cases}$$

解方程组Ⅰ′，得到原方程组的一组解为(1,1,1,1).

解方程组Ⅰ″，当 $x_1=1$ 时，所得的一组解与上面得到的解相同；当 $x_1=-1$ 时，则方程组Ⅰ″变为

$$\begin{cases}x_3x_4=-3\\ x_3+x_4=2\end{cases}$$

由此得到原方程组的另外两组解

(－1，－1，－1,3)，(－1，－1,3，－1)

由⑦，方程组Ⅱ变为

$$\begin{cases}x_1+x_2=2 & ⑪\\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2 & ⑫\\ \dfrac{1}{x_3}+x_1x_2x_3=2 & ⑬\end{cases}$$

⑫－⑬得 $(x_3-\dfrac{1}{x_3})(x_1x_2-1)=0$

于是方程组Ⅱ又与下列方程组Ⅱ′和Ⅱ″同解，即

$$\text{Ⅱ}'\begin{cases}x_3^2=1\\ x_1+x_2=2\\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2\end{cases}\qquad \text{Ⅱ}''\begin{cases}x_1x_2=1\\ x_1+x_2=2\\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2\end{cases}$$

解方程组Ⅱ′，当 $x_3=1$ 时，则方程组Ⅱ′变为

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=1\end{cases}$$

由此得到原方程组的一组解仍为(1,1,1,1)；

当 $x_3=-1$ 时，则方程组Ⅱ′变为

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=-3\end{cases}$$

由此得到原方程组的另外两组解为

$$(-1,3,-1,-1),(3,-1,-1,-1)$$

解方程组 Ⅱ″,当 $x_1x_2=1$ 时,方程组 Ⅱ″ 变为

$$\begin{cases}x_1+\dfrac{1}{x_1}=2\\x_3+\dfrac{1}{x_3}=2\end{cases}$$

由此得到原方程的一组解仍为(1,1,1,1).

显然,若四元实数组(x_1,x_2,x_3,x_4)满足原方程组,则对于所有的 $i=1,2,3,4$,都有 $x_i\neq 0$.

综合上述讨论,原方程组共有五组不同的实数解,即

$$(1,1,1,1),(-1,-1,-1,3),(-1,-1,3,-1)$$
$$(-1,3,-1,-1),(3,-1,-1,-1)$$

5 在$\triangle OAB$中,$\angle AOB$为锐角.自$\triangle OAB$中任意一点M(异于点O)作OA,OB的垂线MP,MQ.H是$\triangle OPQ$的垂心.试求:当点M(1)在AB上,(2)在$\triangle OAB$内部移动时,点H的轨迹.

罗马尼亚命题

解法1 (1)设$\triangle OAB$是给定的三角形,如图7.5所示,M是边AB上的点,P,Q分别是自点M到OA和OB的垂线的垂足,C与D分别是自A到OB和自B到OA的垂线的垂足,而K是自P到OB的垂线的垂足.S是KP和CD的交点,T是QS和OA的交点.现在需要证明QT垂直于OA,因而S是$\triangle OPQ$的垂心.

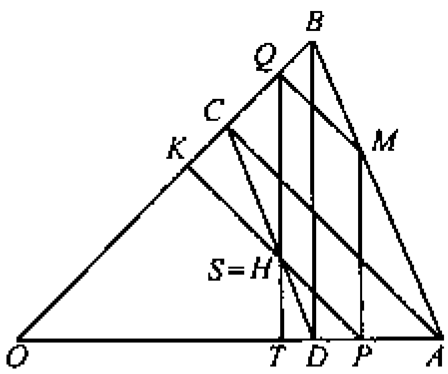


图7.5

因为KP交$\triangle OCD$的边或其延长线于点K,S和P,由梅氏定理得

$$DS\cdot CK\cdot OP=SC\cdot KO\cdot PD$$

由此得

$$\frac{DS}{SC}=\frac{KO\cdot PD}{CK\cdot OP}$$

又依据射线定理有

$$\frac{KO}{CK}=\frac{OP}{PA}$$

故

$$\frac{DS}{SC}=\frac{OP}{PA}\cdot\frac{PD}{OP}=\frac{PD}{PA}$$

另由射线定理有

$$\frac{PD}{PA}=\frac{BM}{MA}=\frac{BQ}{CQ}$$

故 $$\frac{DS}{SC}=\frac{BQ}{QC}$$

今由射线定理的可逆性，得 $QT /\!/ BD$，所以 $QT\perp OA$. 这样，$\triangle OPQ$ 的三条高的交点便在 CD 上. 又根据上述作法可知，线段 AB 上的每一点 M 恰好对应线段 CD 上的一点 H；另一方面，对应于线段 CD 的每一点，恰是线段 AB 上的一点，即构成了线段 AB 上的点集与线段 CD 上的点集之间的一个一一对应. 所以，在这一情形下，所求的轨迹是线段 CD.

(2) 如图 7.6 所示，设 A' 是线段 OA 的内点，B' 是线段 OB 的内点，$A'B'$ 与 AB 平行，C' 与 D' 分别是自 A' 到 OB 与自 B' 到 OA 的垂线的垂足. 从图 7.6 可知，与第一种情形一样，线段 $A'B'$ 的每个内点恰好对应线段 $C'D'$ 的一个内点；反过来，对应于线段 $C'D'$ 的每个内点恰是一个 $A'B'$ 的内点. 即线段 $A'B'$ 的内点集合与线段 $C'D'$ 的内点集合构成一一对应.

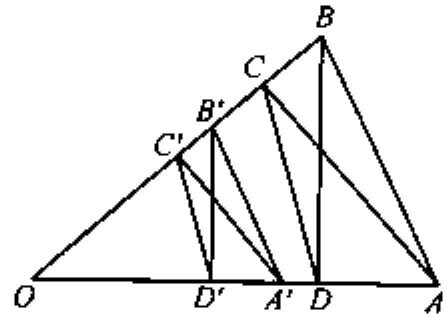


图 7.6

现在，我们考虑平行于 AB 的一族线段 $A'B'$，这里 A' 与 B' 分别是线段 OA 与 OB 的内点，使得这一族线段与平行于 CD 的一族线段 $C'D'$ 还是构成一一对应，这里 C' 与 D' 分别是线段 OC 与 OD 的内点. 即 $\triangle OAB$ 的内点集合与 $\triangle OCD$ 的内点集合构成一一对应(由作法可知，两条不同的线段 $C'D'$ 与 $C''D''$ 所对应的也是两条不同的线段 $A'B'$ 与 $A''B''$)，所以，在这一情形下，所求的点 H 的轨迹是 $\triangle ODC$ 的内部.

解法 2 (1) 以 O 为原点，作向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$，并分别以 A,B,H,M,P,Q 表示之.

因 $MP\perp OA$，$QH\perp OA$，故 $MP /\!/ QH$. 同理 $MQ /\!/ PH$，所以 $MPHQ$ 是平行四边形，从而得

$$H-P=Q-M \quad ①$$

用 t 表示 $AM:AB$ 的比值，则

$$M=A+t(B-A)=(1-t)A+tB \quad ②$$

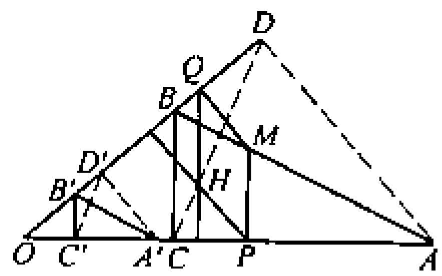


图 7.7

如图 7.7 所示，C 是自 B 至 OA 的垂线的垂足，D 是自 A 至 OB 的垂线的垂足. 若

$$(1-t)A+tC=P_1$$

则 P_1 是 OA 上的点，自 ② 得

$$M-P_1=t(B-C)$$

故 $P_1M /\!/ CB$，即 $P_1M\perp OA$. 可知 P_1 即是点 P. 所以

$$P=(1-t)A+tC \quad ③$$

同理

$$Q=tB+(1-t)D \quad ④$$

把 ②，③，④ 代入 ①，得

$$H=(1-t)A+tC+tB+(1-t)D-(1-t)A-tB=$$
$$tC+(1-t)D$$

当 $t:0\to1$ 时，M 自 A 移动至 B，而 H 则自 D 移动至 C. 故点 H 的轨迹是 DC.

(2) $\triangle OAB$ 可看成是由无穷多的平行于 AB 的线段所组成. 设 $A'B'$ 是这样的一个线段，以 C'，D' 分别表示自 B' 至 OA 及自 A' 至 OB 的垂线的垂足. 当 M 自 A' 移动至 B' 时，H 自 D' 移动至 C'. 故当 M 在 $\triangle OAB$ 内移动时，点 H 的轨迹是 $\triangle OCD$ 的内部.

解法3 不妨先就 $\triangle OAB$ 是锐角三角形的情形予以讨论.

(1) 如图7.8所示，设 $AH_1\perp OB$，$BH_2\perp OA$，垂足分别为 H_1，H_2，则线段 H_1H_2 就是所求的轨迹. 证明如下.

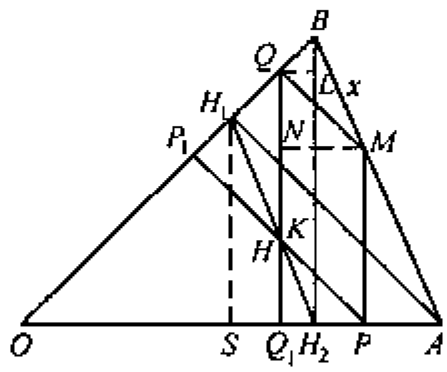


图7.8

设 M 是 AB 上的任一点，$MP\perp OA$，$MQ\perp OB$，$QQ_1\perp OA$，$PP_1\perp OB$，垂足分别为 P，Q，Q_1，P_1，则 P_1P 与 Q_1Q 的交点 H 就是 $\triangle OPQ$ 的垂心. 并设 QQ_1 与 H_1H_2 相交于点 K. 要证明点 H 在 H_1H_2 上，只要证明点 H 与点 K 重合就可以了.

由题设 $\angle AOB=\alpha$，并令 $\angle OBA=\beta(\alpha,\beta<90^\circ)$. 因为

$$\angle BH_2A=\angle AH_1B=90^\circ$$

所以 H_2，A，B，H_1 四点共圆，所以

$$\angle H_1H_2O=\angle OBA=\beta$$

设 $BM=x$，则 $BQ=x\cdot\cos\beta$，$QM=x\cdot\sin\beta$.

作 $QL\parallel OA$，交 BH_2 于点 L，则四边形 QQ_1H_2L 是矩形，$\angle LQB=\angle AOB=\alpha$.

因为点 K 是 QQ_1 与 H_1H_2 的交点，所以在 $\triangle KQ_1H_2$ 中，有

$$Q_1H_2=QL=BQ\cdot\cos\alpha=x\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha$$

$$Q_1K=Q_1H_2\cdot\tan\angle H_1H_2O=x\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\tan\beta=$$
$$x\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad ⑤$$

作 $MN\parallel AO$，交 Q_1Q 于点 N，则 MNQ_1P 是矩形，且 $\angle NQM=\angle AOB=\alpha$.

因为点 H 是 P_1P 与 Q_1Q 的交点，所以在 $\triangle HQ_1P$ 中，有

$$Q_1P=NM=QM\cdot\sin\alpha=x\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$$

又因 $\angle Q_1HP=\angle AOB=\alpha$，得

$$Q_1H=Q_1P\cdot\cot\angle Q_1HP=$$
$$x\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cot\alpha=x\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad ⑥$$

由⑤，⑥两式，得

$$Q_1H=Q_1K$$

且 Q_1H 与 Q_1K 均在线段 Q_1Q 上，所以点 H 与 K 重合，因此符合条件的点 H 在线段 H_1H_2 上.

当动点 M 在 BA 上从 B 连续运动到 A 时，$x = BM$ 的值从0连续增大到 BA（长度），从而

$$Q_1H = Q_1K = x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

从0连续增大到

$$BA \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta = AH_1 \cdot \cos\alpha = H_1S$$

其中，$H_1S \perp OA$，垂足为 S. 于是，对于线段 H_1H_2 上的任一点 H'，作 $H'Q'_1 \perp OA$，垂足为 Q'_1，有 $0 < Q'_1H' < H_1S$，有对应的 $x' = \frac{Q'_1H'}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$，使

$$Q'_1H' = x' \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

由于 $$0 < x' < \frac{H_1S}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = BA$$

所以在线段 BA 上存在一点 M'，使 $AM' = x'$. H' 就是对应于点 M' 的符合条件的垂心. 这就是说，线段 H_1H_2 上的任一点符合条件.

(2) 当动点 M 在 $\triangle OAB$ 的内部运动时. 我们先考察动点 M 在 $\triangle OAB$ 内与 AB 平行的某一条线段 $A'B'$ 上运动时，对应的垂心 H 的轨迹. 如图7.9所示，作 $A'H'_1 \perp OB$，$B'H'_2 \perp OA$，垂足分别为 H'_1，H'_2. 对 $\triangle OA'B'$ 利用(1)的结论，可知这时点 H 的轨迹为线段 $H'_1H'_2$.

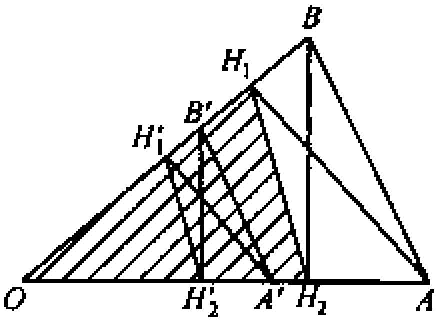


图7.9

显然，由 $A'B' \parallel AB$，$A'H'_1 \parallel AH_1$，$BH'_2 \parallel BH_2$ 可知，四边形 $H'_1H'_2A'B'$ 与四边形 H_1H_2AB 位似，所以 $H'_1H'_2 \parallel H_1H_2$，且

$$\frac{OH'_2}{OH_2} = \frac{OA'}{OA}$$

设 $OA' = y$，则有 $OH'_2 = \frac{OH_2 \cdot y}{OA}$.

当点 A' 在 OA 上从点 O 连续移动到点 A 时，对应的一系列平行线段 $A'B'$（平行于 AB）就连续充满整个 $\triangle OAB$. 这时，y 从0连续增大到 OA，从而 $OH'_2 = \frac{OH_2 \cdot y}{OA}$ 的值从0连续增大到 OH_2，即对应的点 H'_2 从点 O 连续移动到点 H_2，这一系列的平行线段 $H'_1H'_2$（平行于 H_1H_2）便连续地移遍整个 $\triangle OH_1H_2$. 并且由于当点 M 在线段 AB 上运动时，对应的点 H 的轨迹是线段 H_1H_2；当点 M 在线段 OA 上运动时，点 H 的轨迹是线段 OH_1；当点 M 在线段 OB 上运动时，点 H 的轨迹是线段 OH_2，所以当点 M 在 $\triangle OAB$ 的内部运动时，所求点 H 的轨迹是 $\triangle OH_1H_2$ 的内部区域（不包括 $\triangle OH_1H_2$ 的边界）.

如果 $\triangle OAB$ 是钝角三角形或直角三角形，也有同样的结论，并可类似地作出证明.

解法4 如图7.10所示,建立直角坐标系,设$\triangle AOB$是锐角三角形(当$\angle OAB$或$\angle ABO$为直角或钝角时,证明完全类似),$|OA|=a$,$|OB|=b$,作$AC\perp OB$,$BD\perp OA$,连结CD,那么A,B,C,D各点的坐标分别为

$$A(a\cdot\cos\alpha,a\cdot\sin\alpha),B(b,0)$$

$$C(a\cdot\cos\alpha,0),D(b\cdot\cos^2\alpha,b\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$$

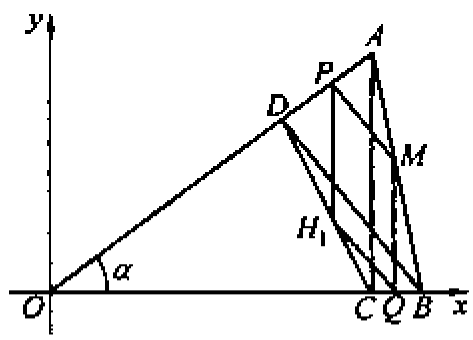


图7.10

直线OA的方程为

$$y=x\cdot\tan\alpha \quad ⑦$$

直线AB的方程为

$$y=\frac{a\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}x-\frac{ab\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b} \quad ⑧$$

直线CD的方程为

$$y=\frac{b\cdot\sin\alpha}{b\cdot\cos\alpha-a}x-\frac{ab\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{b\cdot\cos\alpha-a} \quad ⑨$$

ⅰ 当点M在AB上运动时,H的轨迹为CD.

事实上,设点M的坐标为(x_0,y_0),则点Q的坐标为$(x_0,0)$.直线MP的方程为

$$y-y_0=-(x-x_0)\cot\alpha \quad ⑩$$

解⑦和⑩的联立的方程组,并利用点M在AB上的条件,即

$$y_0=\frac{a\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}$$

得点P的横坐标为

$$\frac{a\cdot\cos\alpha-b\cdot\cos^2\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}$$

所以,直线PH的方程为

$$x=\frac{a\cdot\cos\alpha-b\cdot\cos^2\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b} \quad ⑪$$

直线QH的方程为

$$y=-(x-x_0)\cot\alpha \quad ⑫$$

解⑪和⑫联立的方程组,得

$$y=\frac{b\cdot\sin\alpha}{b\cdot\cos\alpha-a}x-\frac{ab\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{b\cdot\cos\alpha-a}$$

而这正是CD的方程,由此可知点H在线段CD上.

反之,在CD上任取一点$H_1(x_1,y_1)$,如图7.10所示,得到点M,类似上面的方法亦可证得点M在线段AB上.

ⅱ 首先来证明,当点M在$\angle AOB$内运动时,点H也在$\angle AOB$内运动.

事实上,由于点M在$\angle AOB$内,其坐标(x_0,y_0)必满足

$$0\leqslant y_0\leqslant x_0\cdot\tan\alpha \quad ⑬$$

容易求得点P的横坐标为$y_0\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+x_0\cdot\cos^2\alpha$,所以$PH$

的方程为

$$x = y_0 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + x_0 \cdot \cos^2\alpha \quad ⑭$$

解⑫和⑭联立的方程组,并利用条件⑬,得

$$0 \leqslant y \leqslant x \cdot \tan\alpha$$

由此可知点 H 也在 $\angle AOB$ 内运动.

下面再来证明,当点 M 在 $\angle ABO$ 内运动时,点 H 在 $\angle DCO$ 内运动.

事实上,点 $M(x_0, y_0)$ 的坐标满足

$$0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{a \cdot \sin\alpha}{a \cdot \cos\alpha - b}x_0 - \frac{ab \cdot \sin\alpha}{a \cdot \cos\alpha - b} \quad ⑮$$

解⑫和⑭联立的方程组,并利用条件⑮,得

$$y < \frac{b \cdot \sin\alpha}{b \cdot \cos\alpha - a}x - \frac{ab \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{b \cdot \cos\alpha - a} \quad ⑯$$

因为 H 是 $\triangle OPQ$ 的垂心,所以它的纵坐标总满足

$$y \geqslant 0 \quad ⑰$$

由⑯,⑰知道点 H 在 $\angle DCO$ 内.

反之,在 $\angle DCO$ 内任取一点 H,类似地可以证明它所对应的点 M 在 $\angle ABO$ 内.

由于 $\angle AOB$ 和 $\angle ABO$ 的公共部分是 $\triangle OAB$,$\angle AOB$ 和 $\angle DCO$ 的公共部分是 $\triangle OCD$.于是我们就证明了当点 M 在 $\triangle OAB$ 内部运动时,点 H 的几何轨迹是 $\triangle OCD$ 的内部.

6 在平面上给出 $n(n \geqslant 3)$ 个点,其中任意两点的距离不超过 d.我们把距离为 d 的两点间的线段皆叫做这一点集的直径.证明:这一点集的直径的数目至多为 n.

波兰命题

证法1 首先,我们证明对于这 n 个点中的某一点 A,若由 A 出发的直径多于两条,则必有另外一点 B,使得由点 B 出发的直径只有一条.

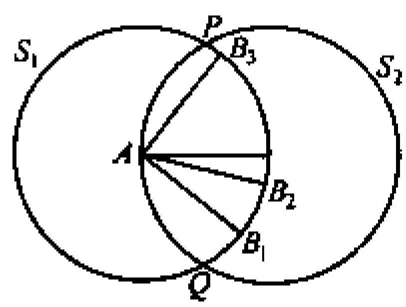


图7.11

设由点 A 出发的直径有三条(或多于三条).如图7.11所示,以 A 为圆心,d 为半径作圆 S_1,则这三条直径的另一端点 B_1, B_2, B_3 皆在圆周 S_1 上,而且 $\overset{\frown}{B_iB_j}$ 在圆 S_1 中所对的圆心角小于等于 $\pi/3$(因 $B_iB_j \leqslant d$).

设 B_2 是弧上介于 B_1, B_3 之间的点,以 B_2 为圆心,d 为半径作圆 S_2 交 S_1 于 P, Q.在 S_2 的优弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 上,除 P, Q 二点外,所有点和 B_2 的距离皆大于 d.在 $\overset{\frown}{PA}$ 上(点 A 除外),所有点和 B_1 的距离皆大于 d.在 $\overset{\frown}{QA}$ 上(点 A 除外),所有点和 B_3 的距离皆大于 d.所以

B_2A 是由点 B_2 出发的惟一直径.

现在可以用归纳法证明原命题.

当 $n = 3$ 时,命题显然成立.因为过三点的线段不会多于三条,故直径也不会多于三条.

假设当 $n = 3,4,\cdots,k$ 时,命题成立.

现若给出一个 $k+1$ 个点组成的点组,记它为 T.

如果 T 中从任一点出发的直径不多于两条,由于每一条直径有两个端点,故直径的数目不多于

$$\frac{2(k+1)}{2} = k+1$$

所以命题成立.

如果 T 中由某一点 A 出发的直径多于二条,则根据前面结论,在 T 中存在着另一点 B,使得由点 B 出发的直径只有一条.自 T 中除去点 B 剩下一个 k 点组,依假设,这 k 点组至多有 k 条直径,再把点 B 加回去,因为由点 B 出发的直径是惟一的,所以 T 中至多有 $k+1$ 条直径,即当 $n = k+1$ 时,命题也以成立.

所以命题普遍成立.

证法 2　分别以 n 个已知点为圆心,以 d 为半径作 n 个圆,这 n 个圆(指圆盘,即圆周及其内部)的交集(公共部分)记作 Φ.

图形 Φ 有下列明显的性质.

(1) 任一已知点都不可能在图形 Φ 的外部.

因为如果某一已知点在 Φ 的外部,它必定在某一圆外,那么它与此圆圆心的距离就大于 d,与已知 d 是"每两点之间的距离的最大值"矛盾.由此可见,这 n 个已知点或者在图形 Φ 的内部,或者在图形 Φ 的边界上.

(2) 图形 Φ 的内部没有一条所作圆的弧.

因为如果有某一条弧属于 Φ,那么它(这条弧或与其他弧一起)就将图形 Φ 分成两部分,其中一部分就在这弧所在圆的外部,这与图形 Φ 的意义矛盾.

由于在图形 Φ 的内部的点,必定在所作出的 n 个圆内部,它与各已知点(圆心)的距离必定小于 d,所以 Φ 内部的任一已知点都不可能是这个点集的直径的端点.也就是说,直径的两端点必定在图形 Φ 的边界上.我们研究直径的条数问题,只要研究 Φ 边界上的那些点就可以了.不妨设 n 个已知点中有 k 个点在 Φ 的边界上,$k \leqslant n$.

由于两个圆至多只有两个交点,所以作出的 n 个圆的交点不多于 $2C_n^2 = n(n-1)$ 个,因此图形 Φ 的边界是由有限条弧组成的.

为叙述方便起见，我们把边界上若干条弧的交点叫做图形 Φ 的顶点. 在图形 Φ 的边界上的 k 个已知点中，设有 l 个点不是图形 Φ 的顶点（$l \leqslant k$），而有 $k-l$ 个点是图形的顶点.

又如果边界上的某一已知点不是顶点，那么以这一点为端点的直径至多只有一条. 因为如若不然，即至少有两条以它为端点的直径，从而也就至少要有两条弧通过这一点，这与该点不是顶点矛盾.

由于边界上的已知点有 l 个不是顶点，所以至少有一个端点不是顶点的直径至多只有 l 条.

我们再来证明：两个端点都是顶点的直径不多于 $k-l$ 条. 为此，我们先证明：通过某一顶点，且另一端点亦为顶点的直径不多于两条. 证明如下.

一方面，所有这种直径的另一端点都在同一个圆周上，因为它们与这某一指定的顶点的距离都等于 d；

另一方面，在图形 Φ 的边界上，每一个圆的弧至多只有一段. 事实上，如果有同一圆的两段弧在 Φ 的边界上，那么它们之间就有另一圆的弧，连结这弧的两个端点得一条弦. 如果两个圆的圆心在此弦的同侧，因为两圆的半径相等，所以两圆的圆心必定重合；如果两圆的圆心在此弦的异侧，这时图形 Φ 就在其中一圆的外部，即有一些已知点与此圆圆心的距离大于 d，显然这是不可能的.

由于图形 Φ 边界上每一圆的弧不多于一段，所以如果同一条弧上有三个已知点，那么其中至多只有两个是顶点. 再由上述第一方面的结论，可知通过某一顶点如果它属于已知点集且另一端点也是顶点的直径不多于2条. 由于边界上只有 $k-l$ 个已知点是图形的顶点，所以两个端点都是顶点的直径的条数不多于 $2(k-l)\cdot\frac{1}{2}=k-l$（因为每一条直径按其两个端点重复计算了两次）.

综上所述，这 n 个已知点的点集的直径至多只有 $l+(k-l)=k$ 条，而 $k \leqslant n$，所以直径不多于 n 条. 命题得证.

应该指出，对于任一 $n \geqslant 3$，确实存在这样的 n 个点. 具有 n 条直径. 我们只要作一个边长为 d 的等边 $\triangle ABC$，再以某一顶点 A 为圆心，d 为半径作圆，在 $\overset{\frown}{BC}$ 上任意取 $n-3$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-3}$，所得的 n 个点 A, B, C 及 $A_i(i=1,2,\cdots,n-3)$ 的点集就有 n 条直径 AB, BC, CA 及 $AA_i(i=1,2,\cdots,n-3)$. 这就说明，题目所作的估计数 n 是精确的，不可能再加强了.

第 8 届国际数学奥林匹克

保加利亚,1966

1 在一次数学竞赛中共出了 A,B,C 三题.在参加竞赛的所有学生中,至少解出一题者共 25 人.在不能解出 A 题的学生中,至少解出一题者共 25 人.在不能解出 A 题的学生中,能解出 B 题的人数是能解出 C 题的人数的二倍.在能解出 A 题的学生中,只能解出这一题的人数比至少还能解出另一题的人数多一人.如果只能解出一题的学生中有一半不能解出 A 题,问只能解出 B 题的学生有几人?

苏联命题

解法 1 用[A],[AB],[ABC],… 分别表示只能解出 A 题,能解出 A,B 二题,能解出 A,B,C 三题 … 的人数.依题意

$$[A]+[B]+[C]+[AB]+[BC]+[CA]+[ABC]=25 \quad ①$$

$$[B]+[BC]=2[C]+2[BC] \quad ②$$

$$[A]=[AB]+[AC]+[ABC]+1 \quad ③$$

$$[A]+[B]+[C]=2[B]+2[C] \quad ④$$

②,④ 可写成

$$[BC]=[B]-2[C] \quad ⑤$$

$$[A]=[B]+[C] \quad ⑥$$

由 ①,③ 得

$$2[A]+[B]+[C]+[BC]=26 \quad ⑦$$

由 ⑤,⑥,⑦ 得

$$4[B]+[C]=26 \quad ⑧$$

由 ⑧ 可知 $4[B]\leqslant 26$

故

$$[B]\leqslant \frac{26}{4}<7 \quad ⑨$$

又自 ⑤ 可知 $[B]\geqslant 2[C]$

将上式代入 ⑧ 得

$$4[B]+\frac{1}{2}[B]\geqslant 26$$

故

$$[B]\geqslant \frac{52}{6}>5 \quad ⑩$$

由⑨,⑩得 $$[B] = 6$$
即只能解出B题的学生共6人.

解法2 如图8.1所示,设 x 为只解出A题的人数,y 为只解出B题的人数,z 为只解出C题的人数.

V 为只解出A,B二题的人数,W 为只解出A,C二题的人数.U 为只解出B,C二题的人数,t 为同时解出三个题的人数.

依题意,在没有解出A题的人数中,解出B题的人数是解出C题的2倍.即

$$y + U = 2(U + z) \Rightarrow y = 2z + U$$

又
$$x = V + t + W + 1$$
$$x = y + z$$

所以图中每种阴影部分都应为

$$y + z = 3z + U$$

但

$$(3z + U) \times 3 + U = 25 + 1 = 26 \quad ⑪$$

即
$$9z + 4U = 26$$
$$9z \leqslant 26 \Rightarrow z \leqslant \frac{26}{9} < \frac{27}{9} = 3$$

z 取0,1,2三个非负整数值.

当 $z = 0$ 时,$4U = 26$,不能成立;当 $z = 1$ 时,$4U = 26 - 9 = 17$,$U = \frac{17}{4}$,也不能成立.所以只能是 $z = 2$,此时代入⑪,$U = 2$,$y = 6$,于是 $x = 8$,$V + W + t = 7$.代入原题检验合于题意要求,因此,只解出B题的学生共6人.

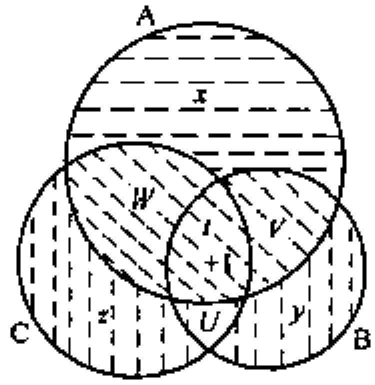


图8.1

② 设△ABC 三边的长度为 a,b,c,其所对的角分别为 α,β,γ,且满足条件

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}(a \cdot \tan\alpha + b \cdot \tan\beta)$$

证明:该三角形是等腰三角形.

匈牙利命题

证法1 因 α,β,γ 是三角形的三内角,故

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Big/ \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

代入给定的关系式,并化简得

$$(a \cdot \cos\beta - b \cdot \cos\alpha)\sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) = 0$$

若 $\sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) = 0$,则

$$\frac{\beta-\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$$

若 $$a\cdot\cos\beta-b\cdot\cos\alpha=0$$

则 $$\frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

但是根据正弦定理知

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

所以

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta)=0$$

$$\Rightarrow\alpha-\beta=0(\text{或 }\pi-(\alpha-\beta)=0)$$

显然，$\pi-(\alpha-\beta)\neq 0$(因为 $\alpha<\pi+\beta$)，所以 $\alpha-\beta=0$，即 $\alpha=\beta$.

证法2 **引理** 若 α,β 是锐角，$OP=1$，且 $\alpha\leqslant\beta$，则

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)$$

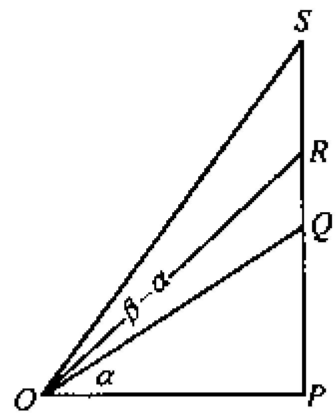


图 8.2

引理的证明 如图8.2所示，$PQ=\tan\alpha$，$PS=\tan\beta$.若 OR 平分 $\angle QOS$，则

$$PR=\tan\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

显然 $RS\geqslant RQ$，故

$$PR-PQ\leqslant PS-PR$$

所以 $$PR\leqslant\frac{1}{2}(PQ+PS)$$

这即是所要证的不等式.这个不等式当且仅当 $\alpha=\beta$ 时等号成立.

本题所给出的关系式可写成

$$(a+b)\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=a\cdot\tan\alpha+b\cdot\tan\beta \qquad ①$$

不妨设 $\alpha\leqslant\beta$.若 $\beta\geqslant 90^\circ$，则 $a<b$.这时

$$\tan\alpha<\tan(\alpha+\gamma)=\tan(\pi-\beta)=|\tan\beta|$$

代入①的右边得负值，而①的左边却取正值，这是不可能的.故 $\alpha\leqslant\beta<90^\circ$.

若 $\alpha<\beta$，根据上述引理及①，得

$$\frac{1}{2}(a+b)(\tan\alpha+\tan\beta)>a\cdot\tan\alpha+b\cdot\tan\beta\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(b-a)\tan\alpha>\frac{1}{2}(b-a)\tan\beta\Rightarrow\tan\alpha>\tan\beta$$

因对于锐角 θ，$\tan\theta$ 是增函数，故 $\tan\alpha>\tan\beta\Rightarrow\alpha>\beta$.这和 $\alpha<$

β 的假设矛盾.所以 $\alpha=\beta$,即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证法3 因 α,β,γ 是 $\triangle ABC$ 的内角,所以

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

因此 $$\tan\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

代入①得 $$a+b=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+b\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)$$

移项、去分母,得

$$a\left(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$b\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

或 $$a\cdot\cos\beta\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)=b\cdot\cos\alpha\cdot\sin\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

即 $$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}(a\cdot\cos\beta-b\cdot\sin\alpha)=0$$

由此知 $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0$,因而得 $\alpha=\beta$;或者

$$a\cdot\cos\beta-b\cdot\cos\alpha=0$$

即 $$a\cdot\cos\beta=b\cdot\cos\alpha$$

两边平方得 $$a^2\cdot\cos^2\beta=b^2\cdot\cos^2\alpha$$

再由正弦定理知 $a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha$,又将此式两边平方后和上式相加,就得到 $a^2=b^2$,即 $a=b$.所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

3 证明:一个正四面体的外接球中心到四个顶点的距离的和,小于空间中其他的任意一点到这四个顶点的距离的和.

保加利亚命题

证法1 如图8.3所示,设 AB,CD 是一对相对的棱,M,N 是它们的中点.因 CM,DM 分别是正 $\triangle ABC,\triangle ABD$ 的中线,可知 $\triangle CMD$ 是等腰三角形.同理,$\triangle ANB$ 也是等腰三角形.故 $AB\perp MN,CD\perp MN$.MN 的长度 d 即是空间两线段 AB,CD 的距离.

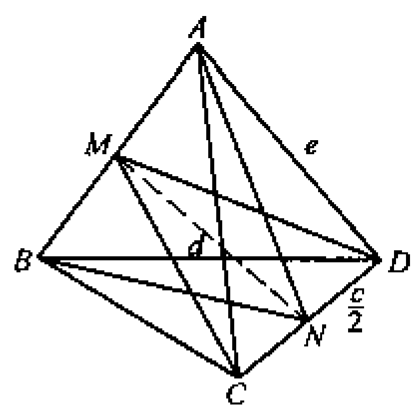


图8.3

设 P 是空间的任一点,以 h_1,h_2 分别表示 $\triangle APB,\triangle CPD$ 中以 P 为顶点的高,则 $h_1+h_2\geq d$.

如图8.4所示,在同一平面上取一点 P',作两个等腰 $\triangle A'P'B',\triangle C'P'D'$,使其底边互相平行,即 $A'B'\parallel C'D'$.这两底边的长度等于正四面体任一棱的长度 e,且以 P' 为顶点至 $A'B'$,

$C'D'$ 的高分别为 h_1, h_2. 这样所作的三角形, $\triangle A'P'B'$ 和 $\triangle APB$ 等底等高, $\triangle C'P'D'$ 和 $\triangle CPD$ 等底等高.

在等底等高的诸三角形中,等腰三角形的周界为最小. 令

$$S = PA + PB + PC + PD$$

则
$$S \geqslant P'A' + P'B' + P'C' + P'D' \qquad ①$$

又 $A'P' + P'D' \geqslant A'D'$, $B'P' + P'C' \geqslant B'C'$, 如图 8.4 所示, 故

$$S \geqslant A'D' + B'C' \qquad ②$$

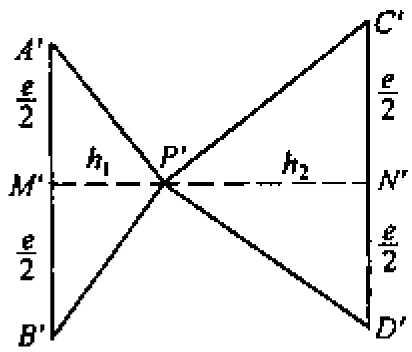


图 8.4

$A'D'$ 和 $B'C'$ 是矩形 $A'B'C'D'$ 的对角线. 这矩形的长和宽分别为 e 及 $h_1 + h_2 \geqslant d$.

若 P 是外接球的球心, 则 P 是 MN 的中点, $\triangle APB$ 和 $\triangle CPD$ 是高为 $d/2$ 的等腰三角形. 这时矩形的面积等于 ed, 而对角线长度的和 $2\sqrt{e^2 + d^2}$ 恰好等于 S. 若 P 不是外接球的球心, 则 P 不是 MN 的中点. 这时 ①, ② 中至少有一式不能取等号, 故 $S > 2\sqrt{e^2 + d^2}$. 所以当 P 是外接球的球心时, S 取最小值.

现在再给出本题的另一种证法, 为此先证明两个引理.

引理 1 设 P 是正四面体 $A'B'C'D'$ 内部的任意一点, 则自点 P 到各侧面的垂线长的和等于这四面体的高 h.

引理 1 的证明 四个四面体 $A'B'C'P$, $A'B'D'P$, $A'C'D'P$ 及 $B'C'D'P$ 的体积的和等于四面体 $A'B'C'D'$ 的体积. 由于 $A'B'C'D'$ 是正四面体, 故四个小四面体的底面面积彼此相等, 由 G 表示它. 它们的高恰好是自 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 的这些面的垂线, 其长度分别用 h_1, h_2, h_3, h_4 表示. 于是由体积公式

$$\frac{1}{3}Gh_1 + \frac{1}{3}Gh_2 + \frac{1}{3}Gh_3 + \frac{1}{3}Gh_4 = \frac{1}{3}Gh$$

推得
$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$$

引理 2 设 P 为四面体 $A'B'C'D'$ 外部一点, 则自 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 各侧面的垂线长 h_1, h_2, h_3, h_4 与四面体的高 h 之间有如下关系, 即

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 > h$$

引理 2 的证明 四面体 $A'B'C'D'$ 的底面与四面体 $A'B'C'P$, $A'B'D'P$, $A'C'D'P$ 及 $B'C'D'P$ 的底面仍然相等, 但现在所取的这四个四面体的体积之和却大于四面体 $A'B'C'D'$ 的体积, 所以根据四面体体积公式就可得到

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 > h$$

现在我们来证明本题的结论.

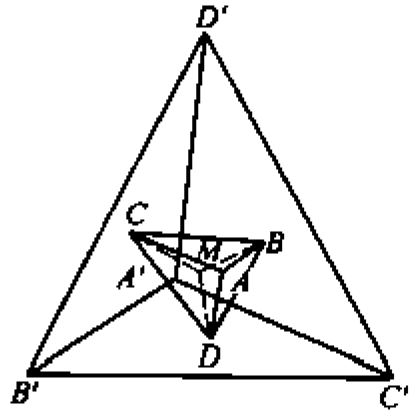


图8.5

证法2　如图8.5所示，设给定正四面体的顶点是 A,B,C 和 D，我们对它外接一个四面体 $A'B'C'D'$，使得 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 的彼此对应的面互相平行，且点 A,B,C,D 位于 $A'B'C'D'$ 的界面上，则这两个四面体是相似的，因而 $A'B'C'D'$ 也是正四面体.

由于四面体 $ABCD$ 的高交于一点，记它为 M，则 M 与外接球心重合，并且线段 MA,MB,MC 及 MD 恰好是自 M 到四面体 $A'B'C'D'$ 各面的垂线. 根据引理1，它们的长度之和等于四面体 $A'B'C'D'$ 的高 h. 即

$$MA + MB + MC + MD = h$$

现在，我们考虑在四面体 $A'B'C'D'$ 的内部或其面上的任意一点 P（异于点 M）. 对于此点，线段 PA,PB,PC 与 PD 中至少有三条比自 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 的对应面的垂线要长. 因此

$$PA + PB + PC + PD > MA + MB + MC + MD$$

此外，根据引理2，对于所有位于四面体 $A'B'C'D'$ 外部的点 P，上述不等式显然也成立.

证法3　设正四面体 $ABCD$，过它的各顶点 A,B,C,D 分别作这个正四面体外接球的切平面，得到一个新的正四面体 $A'B'C'D'$. 正四面体 $A'B'C'D'$ 与已知正四面体 $ABCD$ 相位似，位似系数为 -3. 从正四面体 $A'B'C'D'$ 内部或各面上的任一点，到各面的距离之和是一个常数，它等于 $\frac{V}{S/3}$（V 为正四面体 $A'B'C'D'$ 的体积，S 为一个面的面积），即等于正四面体 $A'B'C'D'$ 的高. 这个常数也就是正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到各顶点 A,B,C,D 的距离之和. 根据"点到平面以垂线长为最短"的性质，它必定小于正四面体 $A'B'C'D'$ 内部其他点或面上的任一点到 A,B,C,D 各点的距离之和.

下面再证明正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到各顶点的距离之和（即正四面体 $A'B'C'D'$ 的高）小于四面体 $A'B'C'D'$ 外部任一点到 A,B,C,D 各点的距离之和. 设 M 是正四面体 $A'B'C'D'$ 外部的任一点，我们考察以点 M 为公共顶点，正四面体 $A'B'C'D'$ 的各面为底面的四个四面体分别为 $MA'B'C'$，$MA'B'D'$，$MA'C'D'$，$MB'C'D'$. 这四个四面体的全体必定包含四面体 $A'B'C'D'$，即四面体 $A'B'C'D'$ 内的任一点至少属于这四个四面体之一，并且存在着属于这四个四面体之一而不属于四面体 $A'B'C'D'$ 的点. 事实上，设 N 是正四面体 $A'B'C'D'$ 内部的任一点，过 M,N 两点作直线 MN，它至少与正四面体 $A'B'C'D'$ 的两个面相交，设交点分别为 P,Q，且 $MQ > MN > MP$，于是点 N 在线段 MQ 上，它必定在以 M 为顶点，点 Q 所在的面为底面的四面体内；并且在线段 MP 上的

任一点，也在这个四面体内，但在正四面体 $A'B'C'D'$ 外. 由此可见，这四个四面体的体积之和 V'' 要大于正四面体 $A'B'C'D'$ 的体积 V，所以

$$\frac{V''}{S/3} > \frac{V}{S/3}$$

（S 表示正四面体 $A'B'C'D'$ 一个面的面积）. 即正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到它的各顶点的距离之和 $\left(=\frac{V}{S/3}\right)$ 必定小于点 M 到正四面体 $A'B'C'D'$ 各面的距离之和 $\left(=\frac{V''}{S/3}\right)$，它当然更小于 MA，MB，MC，MD 之和（因为点到平面以垂线长为最短）.

综上所述，正四面体外接球球心到各顶点的距离之和小于其他任一点（不论是在正四面体内、外还是各面上）到各顶点的距离之和.

1 证明：对于任意一个自然数 n 和任意一个实数 $x \neq k\pi/2^t$（$t=0,1,\cdots,n$；k 是任意自然数）有

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^t x} = \cot x - \cot 2^n x$$

南斯拉夫命题

证明 因 $x \neq k\pi/2^t$，故 $\sin 2^t\pi \neq 0$

现在用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时

$$\cot x - \cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin 2x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x} \quad ①$$

故原式成立.

假设当 $n=m$ 时原式成立，即

$$\sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\sin 2^t x} = \cot x - \cot 2^m x$$

两边各加 $\frac{1}{\sin 2^{m+1} x}$，得

$$\sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\sin 2^t x} + \frac{1}{\sin 2^{m+1} x} = \cot x - \cot 2^m x + \frac{1}{\sin 2^{m+1} x} \quad ②$$

在 ① 中，以 $2^m x$ 代替 x，得

$$\frac{1}{\sin 2^{m+1} x} = \cot 2^m x - \cot 2^{m+1} x$$

代入 ②，可知原式当 $n=m+1$ 时也成立.

所以，原式对于任一自然数 n 和任一实数 $x \neq k\pi/2^t$ 都能成立.

捷克斯洛伐克命题

5 解方程组

$$\begin{cases}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1\\|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1\end{cases}$$

其中 a_1,a_2,a_3,a_4 是已知的互不相等的实数.

解 如果把 a_i,a_j 的下标调换,原方程组不变.故不妨设 $a_1>a_2>a_3>a_4$,于是得

$$\begin{cases}(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1 & ①\\(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1 & ②\\(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1 & ③\\(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1 & ④\end{cases}$$

① - ②,② - ③,③ - ④ 得

$$(a_1-a_2)(x_2+x_3+x_4-x_1)=0$$
$$(a_2-a_3)(x_3+x_4-x_1-x_2)=0$$
$$(a_3-a_4)(x_4-x_1-x_2-x_3)=0$$

因 $a_i\neq a_j(i\neq j)$,故有

$$x_2+x_3+x_4=x_1$$
$$-x_2+x_3+x_4=x_1$$
$$-x_2-x_3+x_4=x_1$$

由此得 $x_1=x_4,x_2=x_3=0$

由 ④ 得 $x_1=1/(a_1-a_4)$,故方程组 ①,②,③,④ 的解是

$$x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4},x_2=x_3=0$$

在一般情况下,若 $i,j,k,l=1,2,3,4,a_i>a_j>a_k>a_l$,则原方程组的解是

$$x_i=x_l=\frac{1}{a_i-a_l},x_j=x_k=0$$

推广 用同样方法可解 n 个方程

$$\sum|a_i-a_j|x_j=1,i,j=1,2,\cdots$$

的方程组.若 $a_1>a_2>\cdots>a_n$,则其解为

$$x_1=x_n=\frac{1}{a_1-a_n},x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$$

波兰命题

6 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上分别任取异于端点的点 K,L,M. 证明：$\triangle AML,\triangle BKM,\triangle CLK$ 中至少有一个三角形的面积小于或等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

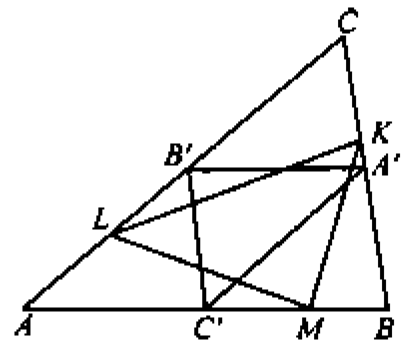


图8.6

证法1 如图8.6所示，设 A',B',C' 分别是 BC,CA,AB 的中点，各中点的连线把 $\triangle ABC$ 分成四个等积的三角形. 故

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

在三边上取异于 A,B,C 的点 K,L,M，若 $\triangle KLM$ 和 $\triangle A'B'C'$ 重合，则它的面积等于 $\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$. 否则有如下两种情形.

Ⅰ $\triangle KLM$ 有一边是 $\triangle AB'C'$ 或 $\triangle BA'C'$ 或 $\triangle CA'B'$ 内的线段. 例如，KL 是 $\triangle CA'B'$ 内的线段. 在这种情形下，显然

$$S_{\triangle CLK}<S_{\triangle CA'B'}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

Ⅱ KL 和 $A'B',B'C'$ 相交，LM 和 $B'C',C'A'$ 相交，MK 和 $C'A',A'B'$ 相交. 如图8.6所示，因 $A'B'\ /\!/\ AB$，故

$$S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle A'B'M} \quad ①$$

以 $A'M$ 为底，$\triangle A'B'M$ 的高小于 $\triangle A'LM$ 的高，故

$$S_{\triangle A'B'M}<S_{\triangle A'LM} \quad ②$$

以 ML 为底，$\triangle A'LM$ 的高小于 $\triangle KLM$ 的高，故

$$S_{\triangle A'LM}<S_{\triangle KLM} \quad ③$$

由①，②，③，得

$$S_{\triangle KLM}>S_{\triangle A'B'C'}$$

所以 $S_{\triangle AML}+S_{\triangle BKM}+S_{\triangle CLK}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle KLM}<$

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle A'B'C'}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$$

故 $\triangle AML,\triangle BKM,\triangle CLK$ 中至少有一个三角形，它的面积小于 $\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

证法2 仍用证法1的图，并以 a,b,c 表示 $\triangle ABC$ 三边的长度，以 p,q,r 表示 $C'M,A'K,B'L$ 的长度，则

$$S_{\triangle AML}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}+p\right)\left(\frac{b}{2}-r\right)\sin A$$

$$S_{\triangle BKM}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+q\right)\left(\frac{c}{2}-p\right)\sin B$$

$$S_{\triangle CKL}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-q\right)\left(\frac{b}{2}+r\right)\sin C$$

以上三式相乘得

$$S_{\triangle AML}\cdot S_{\triangle BKM}\cdot S_{\triangle CKL}=\frac{1}{8}\left(\frac{c^2}{4}-p^2\right)\left(\frac{a^2}{4}-q^2\right)\left(\frac{b^2}{4}-r^2\right)\cdot \sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \qquad ④$$

又因 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ca\cdot\sin B=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$

得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{8}a^2b^2c^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \qquad ⑤$$

因 $0\leqslant p<\frac{c}{2},0\leqslant q<\frac{a}{2},0\leqslant r<\frac{b}{2}$,可知 $\frac{p^2}{c^2},\frac{q^2}{a^2},\frac{r^2}{b^2}$ 皆为小于 $\frac{1}{4}$ 的正数.故④的右边适合如下的不等式,即

$$\frac{1}{8}a^2b^2c^2\left(\frac{1}{4}-\frac{p^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{q^2}{a^2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{r^2}{b^2}\right)\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leqslant$$
$$\frac{1}{8}a^2b^2c^2\left(\frac{1}{4}\right)^3\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \qquad ⑥$$

自④,⑤,⑥得

$$S_{\triangle AML}\cdot S_{\triangle BKM}\cdot S_{\triangle CKL}\leqslant\left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right)^3$$

若 K,L,M 是三边的中点,则 $p=q=r=0$,上面的等号成立,这时每个 $S_{\triangle AML}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,否则必有一个 $S_{\triangle AML}<\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

证法3　应用仿射变换,把 $\triangle ABC$ 映成正 $\triangle A'B'C'$.如图8.7所示,经变换后面积的比值不变,例如

$$S_{\triangle AML}:S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'M'L'}:S_{\triangle A'B'C'}$$

所以,如果命题经过仿射变换以后是正确的,那么原命题也是正确的.

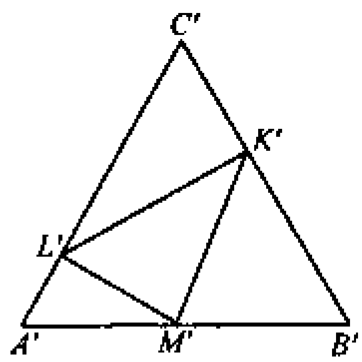


图 8.7

K',L',M' 把正三角形分成六条线段.不妨设 $A'L'$ 是其中最短的线段.于是

$$A'L'\leqslant B'M',A'M'\cdot A'L'\leqslant A'M'\cdot M'B'$$

由于几何中项不大于算术中项,所以

$$A'M'\cdot M'B'\leqslant\left(\frac{A'M'+M'B'}{2}\right)^2=\frac{(A'B')^2}{4}$$

因而
$$S_{\triangle A'M'L'}=\frac{1}{2}A'M'\cdot A'L'\cdot\sin 60^\circ\leqslant$$
$$\frac{1}{8}(A'B')^2\sin 60^\circ=\frac{1}{4}S_{\triangle A'B'C'}$$

所以
$$S_{\triangle AML}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

第 9 届国际数学奥林匹克

南斯拉夫,1967

1 在 ▱$ABCD$ 中,已知 $\triangle ABD$ 是锐角三角形,$AB = a$, $AD = 1$, $\angle BAD = \alpha$. 证明:以 A, B, C, D 为圆心,半径为 1 的圆 K_A, K_B, K_C, K_D 能覆盖 ▱$ABCD$ 的充要条件是

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

捷克斯洛伐克命题

证法 1 如图 9.1 所示,作 $\triangle ABD$ 的外接圆. 因为这是锐角三角形,故圆心 O 在三角形内. 易知 C 是圆外的点.

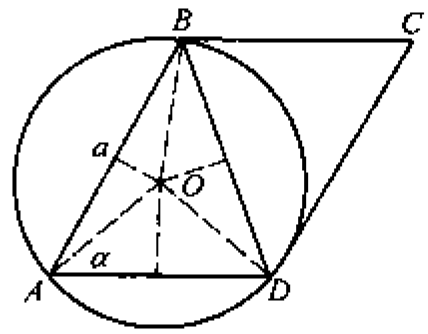


图 9.1

设外接圆的半径 $R \leqslant 1$,则连结 AO, BO, DO 的线段和过 O 而垂直于三边的线段把 $\triangle ABD$ 分成六个直角三角形. 于是,$\triangle ABD$ 中的任一点 M 必在某一个直角三角形中,它和相应顶点的距离小于等于 $R \leqslant 1$. 故 $\triangle ABD$ 能被 K_A, K_B, K_D 所覆盖. 利用对称性,$\triangle BCD$ 能被 K_B, K_C, K_D 所覆盖.

反之,若 $R > 1$,则 K_A, K_B, K_C 不能盖住点 O. 又因为 $OC > R > 1$, K_C 也盖不住点 O. 可知 $R \leqslant 1$ 是 K_A, K_B, K_C, K_D 能覆盖 ▱$ABCD$ 的充要条件. 因此我们只要证明

$$R \leqslant 1 \Leftrightarrow a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

事实上,根据余弦定理,在 $\triangle ABD$ 中有

$$BD = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cdot \cos\alpha}$$

因 $BD = 2R \cdot \sin\alpha$,代入上式得

$$\sqrt{1 + a^2 - 2a \cdot \cos\alpha} = 2R \cdot \sin\alpha$$

所以

$$R \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 + a^2 - 2a \cdot \cos\alpha \leqslant 4\sin\alpha = 3\sin^2\alpha + (1 - \cos^2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 2a \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha \leqslant 3\sin^2\alpha \Leftrightarrow \quad ①$$

$$(a - \cos\alpha)^2 \leqslant 3\sin^2\alpha \quad ②$$

由 ② 解得

$$\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha \leqslant a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

因为

$$a = AB > AD \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$$

故 ① 恒成立. 所以

$$R \leqslant 1 \Leftrightarrow a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

证法2　作$\triangle ABD$的外接圆，如图9.2所示，因为$\triangle ABD$是锐角三角形，所以外接圆圆心 O 必在 $\triangle ABD$ 内.

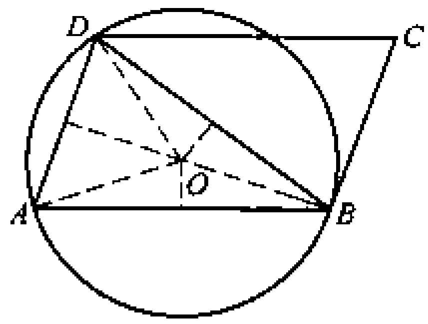


图 9.2

先证明 $\square ABCD$ 的第四个顶点 C 必在圆 O 的外部.

用反证法. 若点 C 在圆 O 上，则因 C 与 A 分布在 BD 的两侧，故

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD > 90^\circ$$

但已知 $\angle BCD = \angle BAD < 90^\circ$，所以两者矛盾；

若 C 在圆 O 内，则

$$\angle BCD > 180^\circ - \angle BAD > 90^\circ$$

也与 $\angle BCD = \angle BAD < 90^\circ$ 矛盾. 因而点 C 不可能在圆 O 上，也不可能在圆 O 内，必定在圆 O 外.

其次，设 $\triangle ABD$ 的外接圆半径为 R，我们来证明：$\square ABCD$ 被四个圆 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖的充分必要条件为 $R \leqslant 1$.

先证必要性. 设 $\square ABCD$ 被 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖，要证明 $R \leqslant 1$. 用反证法，设 $R > 1$，即 $OA = OB = OD > 1$，那么圆 K_A, K_B, K_C 不可能覆盖点 O. 又因点 C 在圆 O 外，所以 $OC > R > 1$，圆 K_C 也不可能覆盖点 O. 但点 O 在 $\triangle ABD$ 内，因而在 $\square ABCD$ 内. 这就是说，$\square ABCD$ 内至少有一点 O 不能被 K_A, K_B, K_C, K_D 所覆盖，与假设矛盾. 因此 $R > 1$ 为不可能，即有 $R \leqslant 1$.

再证充分性. 设 $R \leqslant 1$，要证明 $\square ABCD$ 被 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖. 从点 O 向 $\triangle ABD$ 的三边作垂线，虽然，这些垂线分别将对应的各边平分. 这三条垂线与三条半径 OA, OB, OD 将 $\triangle ABD$ 分成六个直角三角形，并且每个直角三角形的斜边等于半径 R. 由于直角三角形的任一顶点到该直角三角形的任一点的距离不大于斜边，所以 $\triangle ABD$ 内任一点 M，必定与某一个顶点的距离不大于 R，于是以对应的这个顶点为圆心，以 1 为半径的圆就覆盖点 M. 因此，当 $R \leqslant 1$ 时，$\triangle ABD$ 被 K_A, K_B, K_D 覆盖. 由对称性可得，$\triangle CDB$ 被 K_C, K_D, K_B 覆盖. 所以，$\square ABCD$ 被 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖.

最后，我们来证明 $R \leqslant 1$ 的充分必要条件是

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

在 $\triangle ABD$ 中，由 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD} = 2R$，可得

$$R = \frac{BD}{2\sin\angle BAD}$$

又已知 $AD = 1, AB = a, \angle BAD = \alpha$，可得

$$BD = \sqrt{1 + a^2 - 2a\cdot\cos\alpha}$$

从而得

$$R = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cdot\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$$

因此，$R \leqslant 1$ 的充分必要条件是

$$\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cdot\cos\alpha}}{2\sin\alpha}\leqslant 1$$

解这个关于 a 的不等式，得

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

因为 $$a=AB>AD\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

所以 $$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a$$

总是成立的.

这就证明了

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

是 $R\leqslant 1$ 的充分必要条件，从而也就是 $\square ABCD$ 被圆 K_A,K_B,K_C,K_D 覆盖的充分必要条件.

证法3 圆 K_B,K_C 可以看做是从圆 K_A,K_D 的位置向右平行移动距离 a 得到. 如图 9.3(b) 所示，在 AB 与 DC 之间且平行于它们的直线 l 交 K_A,K_D 的"外缘"于 M,N. 不同的直线 l 截得不同的线段 MN，其中必有最短的，如线段 M_0N_0(或 $M'_0N'_0$). 显然，当且仅当平移的距离 a 不大于 M_0N_0 时，K_A,K_B,K_C,K_D 才能覆盖平行四边形 $ABCD$.

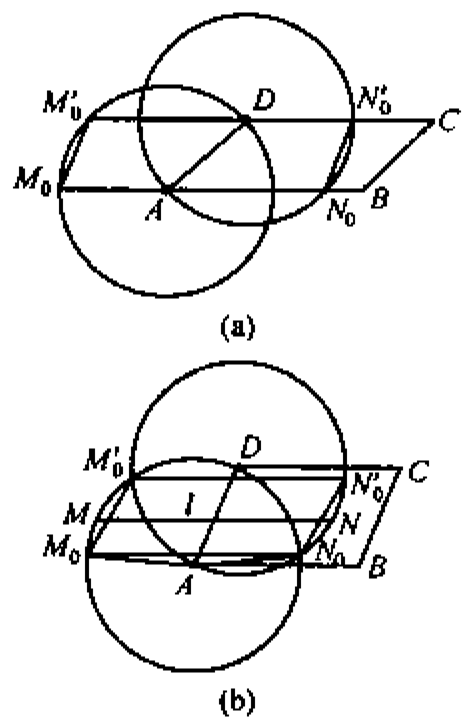


图 9.3

当 $\alpha>60°$ 时，K_A,K_D 的交点在 AB 与 DC 之间. 如图 9.3(a) 所示，$M_0N_0N'_0M'_0$ 是平行四边形，故 M_0N_0(或 $M'_0N'_0$) 是 MN 中的最短者. 因为

$$\angle M_0N_0A=\angle N_0AB=\alpha-60°$$

故 $$M_0N_0=2\cos(\alpha-60°)=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

当 $\alpha=60°$ 时，K_A,K_D 的交点在 AB 或 DC 上，同样可知 M_0N_0(或 $M'_0N'_0$) 是 MN 中的最短者，这时

$$M_0N_0=2=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

所以，当 $\alpha\geqslant 60°$ 时，当且仅当

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

平行四边形 $ABCD$ 被圆 K_A,K_B,K_C,K_D 覆盖.

当 $\alpha<60°$ 时，圆 K_A,K_D 的交点在 AB 与 CD 之外，这时 MN 中之最短者为延长 BA,CD 在 K_A,K_D 内所截得的线段 M_0N_0(或 $M'_0N'_0$)，因为

$$\angle M'_0DA=\angle N_0AD=\alpha$$

故 $$M_0N_0=1+2\cos\alpha\geqslant 1+2\cos 60°=2$$

而 $$2\geqslant 2\cos(60°-\alpha)=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

所以 $$M_0N_0\geqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

因此，当 $a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ 时，$a\leqslant M_0N_0$，故平行四边形 $ABCD$

被圆 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖.

若 ▱$ABCD$ 被 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖，根据题设 $\triangle ABD$ 是锐角三角形，所以 $\angle ADB < 90°$，因此 $\angle ABD > 30°$，从而

$$\cot \angle ABD = \frac{a - \cos \alpha}{\sin \alpha} < \sqrt{3}$$

故
$$a < \cos \alpha + \sqrt{3}\sin \alpha$$

于是，问题得证.

❷ 若一个四面体恰有一棱之长大于 1，求这四面体的体积 $V \leqslant \frac{1}{8}$.

波兰命题

解法 1 如图 9.4 所示. 设 AB 是这个四面体的最长的棱，则 $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ 的边长不大于 1. $\triangle BCD$ 的高 BE 和 $\triangle ACD$ 的高 AF 不大于 $\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$，其中，$a(a < 1)$ 表示 CD 的长度.

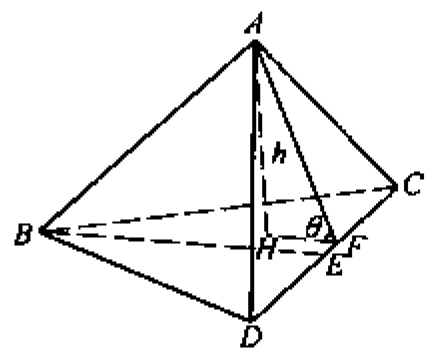


图 9.4

四面体的高

$$h \leqslant AF \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

所以
$$V = \frac{1}{3}hS_{\triangle BCD} \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{24}a(4 - a^2)$$

当 a 在区间 $[0,1]$ 内变动时，有

$$a(4 - a^2) = 3 - (1 - a) - (2 + a)(1 - a)^2 \leqslant 3$$

当 $a = 1$ 时，$a(4 - a^2)$ 取最大值 3. 所以

$$V \leqslant \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

解法 2 如图 9.4 所示，四面体 $ABCD$ 的体积

$$V = \frac{1}{3}AH \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3}AF \cdot \sin \theta \cdot S_{\triangle BCD}$$

ⅰ 当 $AF \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，由于在每边长不超过 1 的三角形中，以每边长为 1 的等边三角形的面积最大，所以

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot BE \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$$

故
$$V = \frac{1}{3}AF \cdot \sin \theta \cdot S_{\triangle BCD} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{8}$$

ⅱ 当 $AF > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，注意到 $S_{\triangle ACD} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$，而 $AF > \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $CD < 1$.

又因在每边长不超过 1 的同底三角形中，以腰长为 1 的等腰三角形的面积最大，高也最大，因此只须考虑当

$$CD < 1, AC = AD = BC = BD = 1$$

时，该四面体的体积是否超过$\frac{1}{8}$.

设 $\angle ACD = \alpha > 60°$，则

$$AF = \sin\alpha, CD = 2\cos\alpha$$

$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

所以 $V = \frac{1}{3}AF \cdot \sin\theta \cdot S_{\triangle BCD} \leqslant \frac{1}{3}\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha =$

$\frac{1}{6}\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{1}{12}(\cos\alpha - \cos 3\alpha) <$

$\frac{1}{12}(\cos 60° - \cos 180°)$(因 $180° < 3\alpha < 270°$) $=$

$\frac{1}{12}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{8}$

综合上述两种情形的证明即得 $V \leqslant \frac{1}{8}$.

3 设 k, m, n 是正整数，$m + k + 1$ 是大于 $n + 1$ 的素数. 令 $C_s = s(s + 1)$. 求证：乘积

$$(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k)\cdots(C_{m+n} - C_k)$$

能被乘积 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

英国命题

证法 1 首先由

$$C_r - C_s = r^2 + r - s^2 - s = (r - s)(r + s + 1)$$

可得 $(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k)\cdots(C_{m+n} - C_k) =$

$((m - k + 1)(m - k + 2)\cdots(m - k + n)) \cdot$

$((m + k + 2)(m + k + 3)\cdots(m + k + n + 1)) =$

$A \cdot B$

其中，A 表示第一个外括号内的乘积，B 表示第二个外括号内的乘积. 由组合公式可知

$$\frac{A}{n!} = \binom{m - k + n}{n}$$

是整数.

$$\frac{(m + k + 1)B}{(m + 1)!} = \binom{m + k + n + 1}{n + 1}$$

也是整数. 由于 $m + k + 1$ 是大于 $n + 1$ 的素数，故

$$\frac{B}{(n + 1)!}$$

也是整数.

所以, $A \cdot B$ 可被 $n!(n+1)! = C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

证法 2 (1) 当 $m+1 \leqslant k \leqslant m+n$ 时,必有一正整数 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$,使 $m+i=k$,则乘积

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$

中有一个因子为零,即 $(C_{m+i}-C_k)=0$,此时结论显然成立.

(2) 当 $m+1>k$ 时,乘积中所有的因子都是正数. 由已知条件有

$$C_p-C_q=p(p+1)-q(q+1)=(p-q)(p+q+1)$$

下面我们分别给予证明.

一方面,因为 $(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)$ 是 n 个连续整数的积,所以它必能被 $n!$ 整除*. 因此

$$\frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)}{n!}$$

是整数.

另一方面,因为从 $(m+k+n+1)$ 个不同元素中取 $(n+1)$ 个不同元素的组合数

$$C_{m+k+n+1}^{n+1}=\frac{(m+k+1)(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

是整数,而已知 $m+k+1$ 是一个大于 $n+1$ 的素数,所以 $m+k+1$ 不能被分母 $(n+1)!$ 中的任一因数整除,因此 $(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)$ 能被 $(n+1)!$ 整除,即

$$\frac{(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

是整数.

综上所述,即得 $(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 能被 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

* "n 个连续整数的积必能被 $n!$ 整除"这个结论可以证明如下:若 n 个连续整数中有一个为零,则其积为零,显然能被 $n!$ 整除;若 n 个连续整数全为正,设其最大数为 $p(p \geqslant n)$,则从 p 个不同元素中取 n 个不同元素的组合数 $C_p^n=(p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1))/n!$ 是整数,即 n 个连续正整数 $p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)$ 能被 $n!$ 整除;若 n 个连续整数全为负,则将每个因数变号就可转化为上述情况得以证明.

4 给出两个锐角 $\triangle A_0B_0C_0$ 和 $\triangle A'B'C'$,求作 $\triangle ABC$ 使它与 $\triangle A'B'C'$ 相似(A,B,C 依次和 A',B',C' 相对应),且外接于 $\triangle A_0B_0C_0$(这里 AB 过 C_0,BC 过 A_0,CA 过 B_0). 再求作这一类三角形中面积最大的一个三角形.

意大利命题

解法 1 以 α,β,γ 表示 $\triangle A'B'C'$ 三内角,在 $\triangle A_0B_0C_0$ 的边 A_0C_0,A_0B_0 上分别向外作圆弧,使其所含的圆周角分别为 β,γ,显然我们只要在 A_0C_0 和 A_0B_0 上作底角分别为 $90°-\beta$ 和 $90°-\gamma$ 的等腰 $\triangle A_0C_0O_1$ 和 $\triangle A_0B_0O_2$,并以 O_1,O_2 为圆心,O_1A_0,O_2A_0 为半径,即可画出上述的两个圆弧.

如图 9.5 所示，过 A_0 作直线交两圆弧于 B,C. 连 BC_0, CB_0 并延长使交于点 A. 由于 $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$, 故 $\angle CAB=\alpha$. 所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$, 而且 $\triangle A_0B_0C_0$ 是 $\triangle ABC$ 的内接三角形，即 $\triangle ABC$ 是适合所给条件的三角形.

若过 A_0 所作的诸线段中使 $B_1C_1 /\!/ O_1O_2$, 则

$$B_1C_1=2(N_1A_0+A_0N_2)=2O_1O_2$$

而其他的过 A_0 的线段

$$BC=2(M_1A_0+A_0M_2)<2O_1O_2$$

由于相似三角形面积的比等于对应边长度平方的比. 故

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle A_1B_1C_1}=BC^2:B_1C_1^2<1$$

所以，$\triangle A_1B_1C_1$ 是所求作的这类三角形中面积最大的一个.

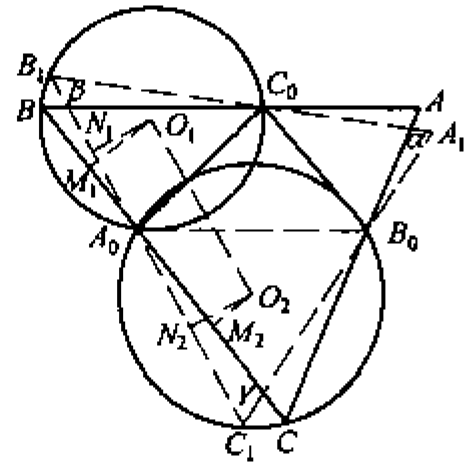


图 9.5

解法 2

分析 如图 9.6 所示，设 $\triangle ABC$ 外接于 $\triangle A_0B_0C_0$, 且 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$, 即有 $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. 所以点 A 必在以 B_0C_0 为弦、圆周角等于 $\angle A_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 上，点 C 必在以 A_0B_0 为弦、圆周角等于 $\angle C_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 上 ($\overset{\frown}{A_0mB_0}$, $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 都在 $\triangle A_0B_0C_0$ 外). 这时，过点 B_0 任意作一条直线，与弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$, $\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 分别相交于点 A,C, 再作直线 AC_0 与 CA_0, 设它们相交于点 B, 所得的 $\triangle ABC$ 便满足题给的前两个条件.

为使作出的 $\triangle ABC$ 是面积最大的一个，关键在于确定 AC 的位置. 因为上面作出的任意三角形都是相似的（均相似于 $\triangle A_1B_1C_1$），所以只要使作出的三角形的一条对应边长最大就可以了. 设弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 的圆心为 O_1, $\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 的圆心为 O_3, 作 $O_1H_1\perp AB_0$, $O_3H_3\perp CB_0$, 垂足分别为 H_1,H_3. 因为 H_1H_3 是 O_1O_3 在 AC 上的射影，显然有 $H_1H_3\leqslant O_1O_3$, 当且仅当

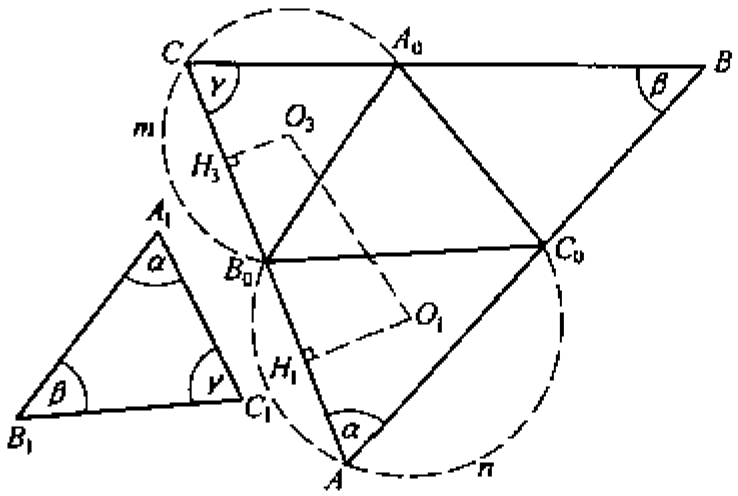


图 9.6

作法(图 9.7)

1) 在 $\triangle A_0B_0C_0$ 外部，在 B_0C_0 上作圆周角为 $\angle A_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$, 设圆心为 O_1; 在 A_0B_0 上作圆周角为 $\angle C_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{A_0mB_0}$, 设圆心为 O_3.

2) 过 B_0 作 $AC /\!/ O_1O_3$, 与弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$, $\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 分别交于点 A,C;

3) 连结 CA_0, AC_0 并延长相交于点 B. 则 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.

证明 略.

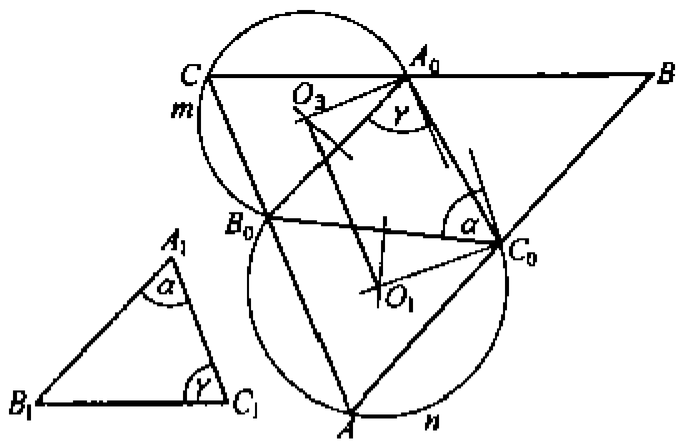


图 9.7

$AC \parallel O_1O_3$ 时，$H_1H_3 = O_1O_3$ 为最大．又因 $B_0C = 2B_0H_3$，$AB_0 = 2H_1B_0$，故 $AC = AB_0 + B_0C = 2(H_1B_0 + B_0H_3) = 2H_1H_3$．所以要使 AC 最大，必须且只须 H_1H_3 最大，也就是必须且只须 $AC \parallel O_1O_3$．由此可得作法．

5 设

$$C_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8$$
$$C_2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2$$
$$\vdots$$
$$C_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 是不全为 0 的实数，如果数列 $C_1, C_2, \cdots$ 中有无限多项 $C_n = 0$，试求所有能使 $C_n = 0$ 的 n．

苏联命题

解法 1　已知至少有一个 $a_i \neq 0$，故 $C_{2m} = \sum_{i=1}^{8} a_i^{2m} > 0$，可知 n 只能是奇数．

若 $C_{2m+1} = 0$，则在不等于 0 的各项中，有些是正项，有些是负项．在删去每一对绝对值相同而符号相反的项后，假如还剩下 $b_1, b_2, \cdots, b_r (0 < r \leqslant 8)$，则 $\sum_{i=1}^{r} b_i^{2m+1} = 0$．不妨设 b_1 是正数而且是 b_i 中绝对值最大的项，并以 $b'_1, b'_2, \cdots, b'_t (0 < t \leqslant r-1)$ 表示所有负项，其中 b'_j 是绝对值最大的．令 $|b'_j| = M$．由于 $b_1 > M$，必有正整数 N 使

$$(b_1/M)^N > t$$

这时只要取 $N > \log_{b_1/M}^{t}$，就有

$$b_1^N + b_1'^N + \cdots + b_t'^N \geqslant b_1^N - tM^N > 0$$

因此当 $n > N$ 时就有

$$b_1^n + b_2^n + \cdots + b_r^n > b_1'^N + b_2'^N + \cdots + b_t'^N > 0$$

这和数列 $C_1, C_2, \cdots$ 有无限多项为 0 的原设矛盾．所以，在 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 中，除 0 项外，余下的都是一对一对的绝对值相等而符号相反的项．所以

$$C_{2m+1} = 0, m = 0, 1, 2, \cdots$$

即所有能使 $C_n = 0$ 的 n 是所有正奇数．

推广 若所给的 n 个式是 $C_k = a_1^k + a_2^k + \cdots + a_t^k$，$t$ 是任意正整数，本题的解仍是所有正奇数，且其解法也是一样.

解法 2 因为对于任意正偶数 n 有

$$a_i^n \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,8$$

等号当且仅当 $a_i = 0$ 时成立. 所以对于不全为零的实数 $a_i(i = 1, 2,\cdots,8)$，必有

$$c_n = \sum_{i=1}^{8} a_i^n > 0, n \text{ 为任意正偶数}$$

因此由题给条件可知，能使 $c_n = 0$ 的正整数 n 不可能为偶数，而只可能为奇数.

由已知，$\{c_n\}$ 中有无限多项等于零，而对于任意正偶数 n，对应的 $c_n \neq 0$，所以必有无限多个正奇数 n，对应的 $c_n = \sum\limits_{i=1}^{8} a_i^n$ 等于零. 在此基础上，我们可以进一步证明：八个数 $a_1, a_2,\cdots, a_8$ 能分成四对，每一对是互为相反的数.

用反证法. 假定 $a_1, a_2,\cdots, a_8$ 中存在着不成这种对的某些 a_i，设这些 a_i 中最大的绝对值为 $b(b > 0)$，并设有 p 个为 b，q 个为 $-b$，$p \neq q$. 从而 $|p - q| \geqslant 1$. 这时，八个数 $a_1, a_2,\cdots, a_8$ 可以分为三类，第一类是绝对值大于 b 的数(如果存在的话)，由假设可知，它们是成对出现的(每一对互为相反的数)，因而它们的奇次幂之和等于零；第二类是绝对值等于 b 的数，它们的奇次幂之和为 $(p - q)b^n$，其绝对值等于 $|p - q| b^n$；第三类是绝对值小于 b 的数，设其绝对值最大为 d，显然 $b > d > 0$，且其个数小于 8，它们的奇次幂之和必定大于 $-8d^n$. 所以可得

$$|c_n| = |\sum_{i=1}^{8} a_i^n| > |p - q| b^n - 8d^n$$

对于充分大的奇数 n，必有 $|c_n| > 0$. 事实上，若取 $n > \frac{\lg 16}{\lg b - \lg d}$，即有

$$n\lg \frac{b}{d} > \lg 16$$

即

$$\left(\frac{b}{d}\right)^n > 16$$

由 $|p - q| \geqslant 1$ 可知 $|p - q| - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$，即

$$16 = \frac{8}{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{8}{|p - q| - \frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{b}{d}\right)^n \geqslant \frac{8}{|p-q|-\frac{1}{2}}$$

$$\left(|p-q|-\frac{1}{2}\right)b^n \geqslant 8d^n$$

即
$$|c_n| > |p-q|b^n - 8d^n \geqslant \frac{1}{2}b^n > 0$$

这就是说,从 $n = \left[\frac{\lg 16}{\lg b - \lg d}\right] + 1$ 以后的全部奇次幂之和 C_n 均不等于零,与已知矛盾.

这就证明了 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 这八个数可以分成四对,每一对互为相反的数.从而对于任意正奇数 n,对应的 $C_n = \sum_{i=1}^{8} a_i^n$ 都等于零.由此即得所求的正整数 n 为一切正奇数.

解法 3 (1) 根据题设,不失一般性,我们可以对数 a_i 作如下限制:$a_i = 0$ 或 $|a_i| > 1(i = 1,2,\cdots,8)$,且其中至少有一个 $|a_i| > 1$.

若 $|a_i| \leqslant 1(i = 1,2,\cdots,8)$,我们对所有的 a_i 同乘以因子 $\gamma \neq 0$,使得对所有的 $a_i \neq 0$,有 $|\gamma a_i| > 1$,然后都相加起来,考查

$$C'_k = \sum_{i=1}^{8}(\gamma a_i)^k = \gamma^k C_k$$

由于 $\gamma \neq 0$,所以 C'_k 当且仅当 $C_k = 0$ 时才为零,于是只须考查数列 $\{C'_k\}$ 就可得到同样的结果.

(2) 显然,对于所有的自然数 m,有 $C_{2m} > 0$.因为

$$a_i^{2m} \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,8$$

且至少有一个 $a_i^{2m} > 0$,所以

$$C_{2m} = \sum_{i=1}^{8} a_i^{2m} > 0$$

因此,我们将只限于考查其中 n 为奇数的各项.

(3) 由(1),不妨设

$$|a_1| \geqslant |a_2| \geqslant \cdots \geqslant |a_8|,且 |a_1| > 1 \quad ①$$

我们考查

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} a_1^n\left(1 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \cdots + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_8}{a_1}\right)^n\right) \quad ②$$

当 $|a_2| < |a_1|$ 时,由于①有 $|a_i| < |a_1|$ $(i = 2,3,4,\cdots,8)$,因而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n = 0, i = 2,3,4,\cdots,8$$

也就是 $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} a_1^n = \infty$,因此必有这样的 N 存在,使得对于所

有的 $n > N$,有 $C_n \neq 0$.但这表示不能有无穷多个 $C_n = 0$,与题设矛盾.由此得 $|a_2| = |a_1|$,并且由 ① 可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n, i = 2,3,\cdots,8$$

可能趋于极限 +1, -1 或 0.

(4) 由于数列 $\{C_n\}$ 中存在无穷多个 $C_n = 0$,因此在表达式 ② 的外括号中至少有一个极限值为 -1,即在 $a_2, a_3, \cdots, a_8$ 中有一个 a_j,使得 $-a_j = a_1$,这样由于 a_1, a_j 有同次幂,当 n 为奇数时,有

$$a_1^n + a_j^n = 0$$

在 $a_i(i = 1,2,3,\cdots,8)$ 中并不一定只有一对 a_1 与 $a_j(a_1 = -a_j)$.用完全类似的方法,将余下的 a_i 中绝对值最大的当做前面讨论时的 a_1,一定又可以找到另一对 a_x, a_y,使得 $a_x = -a_y$.再继续两次,我们就得到结果:a_i 中有四对,每对中的两个数绝对值相等,符号相反.

因此,当且仅当 n 为奇数时,$C_n = 0$.

6 某次运动会相继开了 $n(n > 1)$ 天,共发出奖章 m 枚.第一天发出奖章一枚又余下的 $m-1$ 枚的 1/7,第二天发出两枚又余下的 1/7,依此类推,最后在第 n 天发出 n 枚而没有剩下奖章.问这次运动会共开了几天?共发了几枚奖章?

匈牙利命题

解法 1 设 u_k 是第 k 天未发奖章前所剩下的奖章数,则在第 k 天所发的奖章数为

$$k + \frac{1}{7}(u_k - k)$$

于是 $$u_{k+1} = u_k - \left(k + \frac{1}{7}(u_k - k)\right) = \frac{6}{7}(u_k - k)$$

所以 $$u_k - \frac{7}{6}u_{k+1} = k$$

已知 $u_1 = m, u_n = n$,故有

$$m - \frac{7}{6}u_2 = 1$$

$$u_2 - \frac{7}{6}u_3 = 2$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1} - \frac{7}{6}n = n - 1$$

用 $\left(\frac{7}{6}\right)^{k-1}$ 乘上面第 k 式并相加,得

$$m = 1 + 2\left(\frac{7}{6}\right) + 3\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} + n\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$$

$$\frac{7}{6}m=\frac{7}{6}+2\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+n\left(\frac{7}{6}\right)^n$$

以上两式相减,得

$$-\frac{1}{6}m=\left(1+\frac{7}{6}+\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\right)-n\left(\frac{7}{6}\right)^n=$$
$$6\left(\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right)-n\left(\frac{7}{6}\right)^n$$

所以

$$m=36+(n-6)\frac{7^n}{6^{n-1}}$$

当 $n>1$ 时,$|n-6|<6^{n-1}$,而且 7^n 和 6^{n-1} 互素.故 $n-6=0$.所以

$$n=6,m=36$$

解法2 设第 k 天发出的奖牌数为 $V(k)$,则

$$V(1)=1+\frac{1}{7}(m-1)$$

$$V(2)=2+\frac{1}{7}(m-V(1)-2)=\frac{6}{7}(1+V(1))$$

$$\vdots$$

$$V(k)=k+\frac{1}{7}(m-V(k-1)-k)=\frac{6}{7}(1+V(k-1))=$$
$$\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}V(1)+\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}+\left(\frac{6}{7}\right)^{k-2}+\cdots+\frac{6}{7}$$

$$\vdots$$

$$V(n)=\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}V(1)+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}+\cdots+\frac{6}{7}$$

将上面 n 个等式相加,得

$$m=\sum_{k=1}^{n}V(k)=\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2+\cdots+(\frac{6}{7})^{n-1}\right)V(1)+$$
$$\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2+\cdots+(\frac{6}{7})^{n-1}\right)+$$
$$\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2+\cdots+(\frac{6}{7})^{n-2}\right)+\cdots+$$
$$\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2\right)+\frac{6}{7}=$$
$$(6+m)\left(1-(\frac{6}{7})^n\right)+6\left(1-(\frac{6}{7})^{n-1}\right)+\cdots+6(1-\frac{6}{7})=$$
$$6n-6\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2+\cdots+(\frac{6}{7})^n\right)+m-m(\frac{6}{7})^n=$$
$$6n-6^2\left(1-(\frac{6}{7})^n\right)+m-m(\frac{6}{7})^n$$

经整理,得

$$m = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 36 \quad ①$$

对于 $n > 1$ 显然有

$$|n-6| < 6^{n-1}, (7^n, 6^{n-1}) = 1 \quad ②$$

由 ① 和 ②,再根据 m 和 n 是正整数,就得到 $n = 6$,从而得 $m = 36$.

因此,运动会共开了 6 天,共发出 36 个奖章,在这 6 天中每天都正好发出 6 个奖章.



贝尔格莱德风光

第 10 届国际数学奥林匹克

苏联，1968

罗马尼亚命题

1 证明：只有一个三角形，它三边的长度是连续正整数，而且一个角是另一个角的两倍.

证法 1　设三边的长度为 $b-1, b, b+1$，其对角依次为 α, β, γ，显然 $\alpha < \beta < \gamma$. 由于三角形两边长度的和必大于第三边的长度，故 $b \geqslant 3$.

应用余弦定理，得

$$\cos \alpha = \frac{b^2+(b+1)^2-(b-1)^2}{2b(b+1)} = \frac{b+4}{2(b+1)} \quad ①$$

$$\cos \beta = \frac{(b+1)^2+(b-1)^2-b^2}{2(b+1)(b-1)} = \frac{b^2+2}{2(b^2-1)} \quad ②$$

$$\cos \gamma = \frac{b^2+(b-1)^2-(b+1)^2}{2b(b-1)} = \frac{b-4}{2(b-1)} \quad ③$$

可知 $\cos \alpha, \cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 都是有理数.

若 $b \geqslant 7$，则 $\cos \alpha \leqslant \frac{11}{16} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 在这种情形下，$\beta > \alpha > 45°$，故 $\gamma < 90°$，不可能有一个角等于另一个角的两倍. 因此 b 的可能值限于 3,4,5,6 四个数.

若 $\beta = 2\alpha$，则

$$\cos \alpha = \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \beta}{2}} \quad ④$$

把 $b = 3,4,5,6$ 分别代入②，然后把所得的 $\cos \beta$ 的值分别代入④，结果都不是有理数. 故 $\beta \neq 2\alpha$.

若 $\gamma = 2\alpha$ 或 $\gamma = 2\beta$，则

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos \gamma}{2}} \text{ 或 } \cos \beta = \sqrt{\frac{1+\cos \gamma}{2}} \quad ⑤$$

把 $b = 3,4,5,6$ 分别代入③，然后把所得的 $\cos \gamma$ 的值分别代入⑤，只有当 $b = 5$ 时，结果是有理数 $\frac{3}{4}$.

当 $b = 5$ 时，自②得 $\cos \beta = \frac{9}{16} \neq \frac{3}{4}$，故 $\cos \alpha = \frac{3}{4}$，$\gamma = 2\alpha$，所以边长为 4,5,6 的三角形是本题的惟一解答.

证法 2 仍用 $b-1, b, b+1(b\geqslant 3)$ 表示三边的长度，$\alpha, \beta, \gamma(\alpha<\beta<\gamma)$ 表示其对角，由余弦定理得 ①,②,③.

若 $\beta=2\alpha$，则由正弦定理，得

$$\frac{b-1}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 2\alpha}=\frac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{b}{2(b-1)}\Rightarrow$$

$$\frac{b}{b-1}=\frac{b+4}{b+1}(\text{由 ①})\Rightarrow b^2+b=b^2+3b-4\Rightarrow b=2$$

不合.

若 $\gamma=2\beta$，则由正弦定理，得

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b+1}{\sin 2\beta}=\frac{b+1}{2\sin\beta\cdot\cos\beta}\Rightarrow\cos\beta=\frac{b+1}{2b}\Rightarrow$$

$$\frac{b+1}{b}=\frac{b^2+2}{b^2-1}\quad(\text{由 ②})\Rightarrow b^2-3b-1=0$$

没有有理数解，不合.

若 $\gamma=2\alpha$，则由正弦定理，得

$$\frac{b-1}{\sin\alpha}=\frac{b+1}{\sin 2\alpha}=\frac{b+1}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{b+1}{2(b-1)}\Rightarrow$$

$$\frac{b+1}{b-1}=\frac{b+4}{b+1}\quad(\text{由 ①})\Rightarrow b=5$$

故边长为 4,5,6 的三角形是具有题述性质的惟一三角形.

证法 3 设 $\triangle ABC$ 满足题设条件，即 $AB=n, AC=n-1, BC=n+1$（其中 n 是大于 1 的自然数），并且 $\triangle ABC$ 的内角分别为 $\alpha, 2\alpha$ 和 $\pi-3\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$.

由于在同一三角形中，较大的边所对的角也较大，因此可能出现的情况只有如图 10.1 所示的三种.

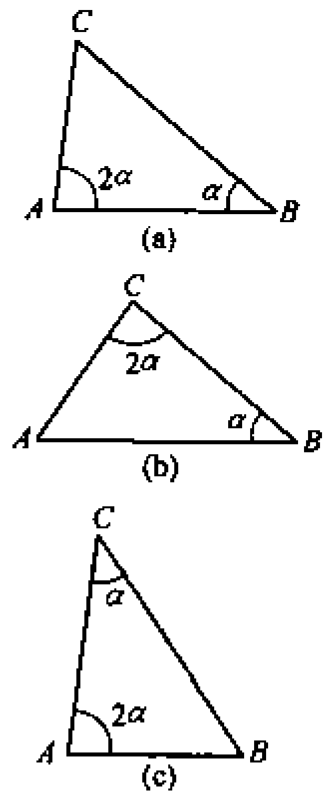


图 10.1

因为

$$\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$4\cos^2\alpha-1=(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha})^2-1$$

所以利用正弦定理可知在情况(a)中有

$$\frac{n}{n-1}=\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2-1$$

从而得到 $n^2-5n=0$，即 $n=5$.

同样，在情况(b)中有

$$\frac{n+1}{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1$$

从而得到，$n^2-2n=0$，即 $n=2$，这是不合要求的，因为长度分别为 1,2,3 的三条线段不能构成三角形。

在情况(c)中有

$$\frac{n-1}{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-1$$

从而得到
$$n^2-3n-1=0$$

但是这个方程没有整数解，因而也不存在满足题设条件的三角形.

综上所述，满足题设条件的三角形的三边长只有 4，5，6 三个自然数.

再来证明这样构成的三角形的三个内角中确有一个内角是另一个内角的两倍.

由余弦定理可得

$$\cos B=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times 5\times 6}=\frac{3}{4},0<\angle B<\frac{\pi}{2}$$

$$\cos A=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times 4\times 5}=\frac{1}{8}=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=$$

$$\cos 2B,0<\angle A<\frac{\pi}{2}$$

所以
$$A=2B$$

2 设 $p(x)$ 是十进制数各位数字的积，试求出所有能使 $p(x)=x^2-10x-22$ 成立的正数 x.

捷克斯洛伐克命题

解法 1 设 x 是一位数，则

$$p(x)=x=x^2-10x-22$$

即
$$x^2-11x-22=0$$

这个二次方程没有整数解.

设 x 是 $n(n>1)$ 位数，则

$$x\geqslant 10^{n-1}a_n>9^{n-1}a_n\geqslant p(x)$$

其中，a_n 是第 n 位数字. 所以

$$p(x)=x^2-10x-22<x\Rightarrow x^2-11x-22<0$$

由于 x 是正数，故由上面的不等式得

$$0<x<\frac{11+\sqrt{209}}{2}<13$$

若 $x=10$，则

$$p(x)=0,x^2-10x-22=-22\neq p(x)$$

若 $x=11$，则

$$p(x)=1,x^2-10x-22=-11\neq p(x)$$

若 $x=12$，则

$$p(x)=2,x^2-10x-22=2=p(x)$$

所以，$x=12$ 是本题的惟一解答.

解法2 设十进制自然数 x 的数字个数为 n，并且 x 满足题设条件，于是应有

$$p(x) \leqslant 9^n, x \geqslant 10^{n-1}$$

i 若 $n = 1$，则有 $p(x) = x$，即

$$x^2 - 10x - 22 = x$$

但是这个二次方程没有整数解，故知 n 不能为 1.

ii 若 $n = 2$，则有

$$x^2 - 10x - 22 = p(x) \leqslant 81$$

从而

$$x^2 - 10x + 25 = p(x) + 47 \leqslant 128$$

$$|x - 5| \leqslant \sqrt{128} < 12$$

$$-7 < x < 17$$

又因为 $x \geqslant 10$，所以

$$10 \leqslant x \leqslant 16$$

另一方面，由

$$p(x) + 47 = (x - 5)^2 \leqslant 128$$

可知，$p(x) + 47$ 是一个整数的平方，并且不大于 128，可以就 $x = 10,11,12,13,14,15,16$ 逐一检验如下.

x	10	11	12	13	14	15	16
$p(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$p(x) + 47$	47	48	49	50	51	52	53

由此可见，只有 $x = 12$ 符合要求. 不难验证，这个数满足题意.

iii 若 $n > 2$，则因 $x \geqslant 10^{n-1}$，故有

$$0 < 10^{n-1} - 5 \leqslant x - 5$$

$$(10^{n-1} - 5)^2 \leqslant (x - 5)^2$$

$$p(x) = (x - 5)^2 - 47 \geqslant 10^{2n-2} - 10^n - 22$$

另一方面，由 $n > 2$ 可知 $10^n \geqslant 1\,000, 10^{n-2} - 2 \geqslant 8$，因此

$$10^n(10^{n-2} - 2) \geqslant 8\,000$$

从而

$$p(x) \geqslant 10^{2n-2} - 10^n - 22 = 10^n(10^{n-2} - 2) + 10^n - 22 \geqslant$$
$$10^n + 8\,000 - 22 > 10^n$$

但是这与 $p(x) \leqslant 9^n$ 矛盾，所以 n 不能大于 2.

综上所述，满足题意的正整数只有 $x = 12$.

保加利亚命题

3 给出关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程组

$$\begin{cases}ax_1^2+bx_1+c=x_2\\ax_2^2+bx_2+c=x_3\\\vdots\\ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n\\ax_n^2+bx_n+c=x_1\end{cases}$$

其中 a,b,c 是实数,且 $a\neq0$.令 $\Delta=(b-1)^2-4ac$.

证明:该方程组在实数范围内

(1) 当 $\Delta<0$ 时,没有解;

(2) 当 $\Delta=0$ 时,只有一个解;

(3) 当 $\Delta>0$ 时,多于一个解.

证法 1 把原方程组的 n 个方程的两边分别相加得

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+nc=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

即

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+(b-1)\sum_{i=1}^{n}x_i+nc=0 \qquad ①$$

考查二次函数

$$Q(x)=ax^2+(b-1)x+c \qquad ②$$

它的判别式是 $\Delta=(b-1)^2-4ac$,它的图象是抛物线.若 r 是 $Q(x)=0$ 的解,则 $ar^2+br+c=r$,以 r 代入原方程组的 x_1 得

$$ar^2+br+c=x_2=r$$

从而得

$$x_3=x_4=\cdots=x_n=r$$

故 $x_1=x_2=\cdots=x_n=r$ 也是原方程组的解.

(1) 若 $\Delta<0$,则 $y=Q(x)$ 的图象和 x 轴不相交,即若 $a>0(a<0)$,不论 x_i 取何值,$Q(x_i)$ 都是 x 轴上方(或下方)的点.因此 $\sum Q_i\neq0$.在这种情形下,原方程组没有解.

(2) 若 $\Delta=0$,则 $y=Q(x)$ 的图象和 x 轴相切,$Q(x)=0$ 有惟一的根 $(1-b)/2a$.在这种情形下

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=(1-b)/2a$$

是原方程组的惟一解.

(3) 若 $\Delta>0$,则 $y=Q(x)$ 的图象和 x 轴相交于两点,即 $Q(x)=0$ 有两个根 r_1,r_2.故原方程组至少有两个解,即

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=r_1, x_1=x_2=\cdots=x_n=r_2$$

证法 2 令$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$,则证法 1 的 ① 可写成

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (b-1)x + nc = 0 \quad ③$$

根据平方平均值定理,有

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geqslant \frac{x}{n}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{n}x^2$$

等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立.

若等号成立,原方程组和方程

$$ay^n + (b-1)y + c = 0$$

并无区别,故依$\Delta = (b-1)^2 - 4ac < 0, = 0, > 0$,原方程组无解,或只有一个解,或有两个解.

若等号不成立,令

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}x^2 + k, k > 0$$

于是方程 ③ 变为

$$ax^2 + n(b-1)x + n^2c + ank = 0$$

解得

$$x = \frac{n(1-b) \pm \sqrt{\Delta - 4a^2k/n}}{2a}$$

由于$4a^2k/n > 0$,故当$\Delta \leqslant 0$时,③ 没有实数解,因而原方程组也没有实数解.

4 证明:任一个四面体总有一个顶点,由这顶点出发的三条棱可以构成一个三角形的三边.

波兰命题

证明 如图 10.2 所示,设 A,B,C,D 是任意一个四面体的顶点,并设 AB 是最长的棱.如果由任意一个顶点出发的三条棱都不能构成一个三角形,则由 A 出发的三棱有

$$AB \geqslant AC + AD$$

又由 B 出发的三条棱有

$$BA \geqslant BC + BD$$

所以

$$2AB \geqslant AC + AD + BC + BD \quad ①$$

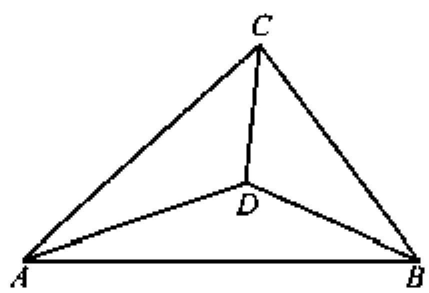


图 10.2

但在 $\triangle ABC$ 中,有 $AB < AC + BC$;在 $\triangle ABD$ 中,有 $AB < AD + BD$.故

$$2AB < AC + BC + AD + BD \quad ②$$

①,② 两不等式互相矛盾,故由 A 或由 B 出发的三条棱,必有

一组可以构成一个三角形.

5 设 f 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的一个实函数,对于每一个 $x \in \mathbf{R}$,下面的方程皆能成立

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2} \qquad ①$$

其中,常数 a 是正实数.

(1) 证明:f 是周期函数(即有这样的一个实数 $b>0$,使得对于每一个 x 都有 $f(x+b)=f(x)$);

(2) 当 $a=1$ 时,给出一个具有这样性质的函数 f,但 f 不是常值函数.

民主德国命题

解 (1) 因对于每一个 $x \in \mathbf{R}$,① 皆能成立,故在 ① 中,x 可用 $x+a$ 替换,于是有

$$f(x+2a)=f((x+a)+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-(f(x+a))^2}$$

上面根号内的式子等于

$$\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-\left(\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}+f(x)-(f(x))^2\right)=\frac{1}{4}-f(x)+(f(x))^2=\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2$$

所以

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-f(x))^2}=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-f(x)\right|$$

由于 $f(x+a)\geqslant\frac{1}{2}$,故对于每一个 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$.由此可推出

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+(f(x)-\frac{1}{2})=f(x)$$

即 f 是周期函数,它的周期是 $2a$.

(2) 当 $a=1$ 时,下面是一个具有题述性质的周期函数,即

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)$$

它的周期为 2.

因为

$$f(x+1)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)=$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|}{2}\cdot\frac{1-\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|}{2}}=$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)(1-f(x))}=$$
$$\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$$

推广

此推广属于朱恒丕

推广 1 已知 λ,μ 是不相等的常数, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数且满足

$$f(x+\lambda)=\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+af(x+\mu)-f^2(x+\mu)}$$

其中, $a\neq 0, a, b\in\mathbf{R}$. 求证: $f(x)$ 是周期函数.

推广 1 的证明 先证 $f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x+\mu)-f^2(x+\mu)}$$

的周期性.

显然, $f(x)\geqslant\frac{a}{2}$. 因为

$$f(x+\lambda-\mu)=f((x-\mu)+\lambda)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x)-f^2(x)}$$

所以 $f(x+2\lambda-2\mu)=f((x+\lambda-\mu)+\lambda-\mu)=$

$$\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x+\lambda-\mu)-f^2(x+\lambda-\mu)}=\frac{a}{2}+$$
$$(b+a(\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x)-f^2(x)})-$$
$$(\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x)-f^2(x)})^2)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-af(x)+f^2(x)}=\frac{a}{2}+\left|\frac{a}{2}-f(x)\right|=f(x)$$

故 $f(x)$ 是周期函数,并且 $2|\lambda-\mu|$ 是它一个周期.

同理可证, $f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda)=\frac{a}{2}-\sqrt{b+af(x+\mu)-f^2(x+\mu)}$$

时, $f(x)$ 也是周期函数且 $2|\lambda-\mu|$ 是它的一个周期.

当 $a=1, b=0, \mu=0$ 时,推广 1 即为原竞赛题.

推广 2 已知 $\{\lambda_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数且满足

$$f(x+\lambda_1)=\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+\sum_{i=2}^{n}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

其中, $a\neq 0, a, b\in\mathbf{R}$. 求证: $f(x)$ 是周期函数.

推广 2 的证明 先证 $f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda_1)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+\sum_{i=2}^{n}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

的周期性.

显然，$f(x)\geqslant\frac{a}{2}$. 因为

$$(f(x+\lambda_1)-\frac{a}{2})^2=b+\sum_{i=2}^{n}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))$$

$$f^2(x+\lambda_1)-af(x+\lambda_1)+\frac{a^2}{4}=b+\sum_{i=2}^{n-1}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))+af(x+\lambda_n)-f^2(x+\lambda_n)$$

所以

$$f^2(x+\lambda_n)-af(x+\lambda_n)+\frac{a^2}{4}=b+\sum_{i=1}^{n-1}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))$$

$$(f(x+\lambda_n)-\frac{a}{2})^2=b+\sum_{i=1}^{n-1}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))$$

即

$$f(x+\lambda_n)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+\sum_{i=1}^{n-1}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

设等差数列$\{\lambda_n\}$的公差为 d，则

$$f(x+d+\lambda_n)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+\sum_{i=2}^{n}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

于是

$$f(x+\lambda_1)=f(x+d+\lambda_n)$$

即

$$f(x)=f(x+d+\lambda_n-\lambda_1)$$

故 $f(x)$ 是周期函数且

$$|d+\lambda_n-\lambda_1|=|nd|=n|d|$$

是其一个周期.

同理可证，$f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda_1)=\frac{a}{2}-\sqrt{b+\sum_{i=2}^{n}(f(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

时，$f(x)$ 也是周期函数且 $n|d|$ 是其一个周期.

6 设$[x]$表示不超过x的最大整数，试求

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

的值，其中 n 是任意自然数.

英国命题

解法1 **引理** 对于任意实数 x，下式皆能成立，即

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]-\left[\frac{x}{2}\right] \qquad ①$$

引理的证明

若 $0\leqslant x<1$，则 $\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]=\left[\frac{x}{2}\right]=0$，故①成立；

若 $1\leqslant x<2$，则 $\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]=1$，$\left[\frac{x}{2}\right]=0$，故①也成立.

若 x 是任意实数，则 $x=2m+y$，m 是整数，$0\leqslant y<2$. 这时

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]=\left[m+\frac{y+1}{2}\right]=m+\left[\frac{y+1}{2}\right]=$$
$$m+[y]-\left[\frac{y}{2}\right]=$$
$$2m+[y]-\left(m+\left[\frac{y}{2}\right]\right)=[x]-\left[\frac{x}{2}\right]$$

引理得证.

下面证明本题.

设 $2^k\leqslant n\leqslant 2^{k+1}$，在①中分别以 $n,n/2,n/2^2,\cdots,n/2^k$ 代替 x，得

$$[n]-\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]$$
$$\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2^2}\right]=\left[\frac{n+2}{2^2}\right]$$
$$\left[\frac{n}{2^2}\right]-\left[\frac{n}{2^3}\right]=\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]$$
$$\vdots$$
$$\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

以上各式相加，得

$$[n]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

但是 $[n]=n$，$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$，$\left[\frac{n+2^{k+j-1}}{2^{k+j}}\right]=0$，$j=2,3,\cdots$

所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n \qquad ②$$

解法 2 应用初等集论的语言，本题可解答如下.

设 $N=\{1,2,3,\cdots,n\}$，$2^k\leqslant n<2^{k+1}$. 用 $S(2^j)$ 表示 N 中所有能被 2^j 整除但不能被 2^{j+1} 整除的自然数集. 则 $S(2^j)(0\leqslant j\leqslant k)$ 是 N 的子集. 若 $i\neq j$，则

$$S(2^i)\cap S(2^j)=\varnothing$$

而且

$$N=\bigcup_{0\leqslant j\leqslant k}S(2^j)$$

用$\overline{\overline{N}}$和$\overline{\overline{S}}(2^j)$分别表示$N$中和$S(2^j)$中元素的数目，则自解法1中引理得

$$\overline{\overline{S}}(2^j)=\left[\frac{n}{2^j}\right]-\left[\frac{n}{2^{j+1}}\right]=\left[\frac{n+2^j}{2^{j+1}}\right]$$

$$\overline{\overline{N}}=n$$

因$\overline{\overline{N}}=\sum_{j=0}^{k}\overline{\overline{S}}(2^j)$，$\overline{\overline{S}}(2^j)=0(j>k)$，故②成立.

解法3 首先，对于任何正整数n，当$2^k>n$时，必有

$$\frac{n}{2^{k+1}}<\frac{1}{2}$$

即
$$\frac{n+2^k}{2^{k+1}}<1$$

从而当$2^k>n$时

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$$

由此可知，对于任何正整数n，总可找到一个非负整数$l=[\log_2 n]$，使得当$k>l$时

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$$

当$k\leqslant l$时

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]\neq 0 \qquad ③$$

因而所求的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{l}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

令$C_k=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right](k=0,1,\cdots,l)$，则$C_k$是具有下列性质的正整数$m$中的最大者，即

$$m\leqslant\frac{n+2^k}{2^{k+1}}$$

即

$$2^{k+1}m-2^k\leqslant n \qquad ④$$

考虑下面的数列

$$\{2^{k+1}m-2^k\},k=0,1,\cdots,l;m=1,2,\cdots,C_k \qquad ⑤$$

由于每一个k对应数列⑤的C_k项，因而数列⑤的项数为$\sum_{k=0}^{l}C_k$，并且，由于

$$2^{k+1}m-2^k=2^k(2m-1)$$

所以，数列⑤的每一项都是形如$2^k(2m-1)$且不大于n的正整

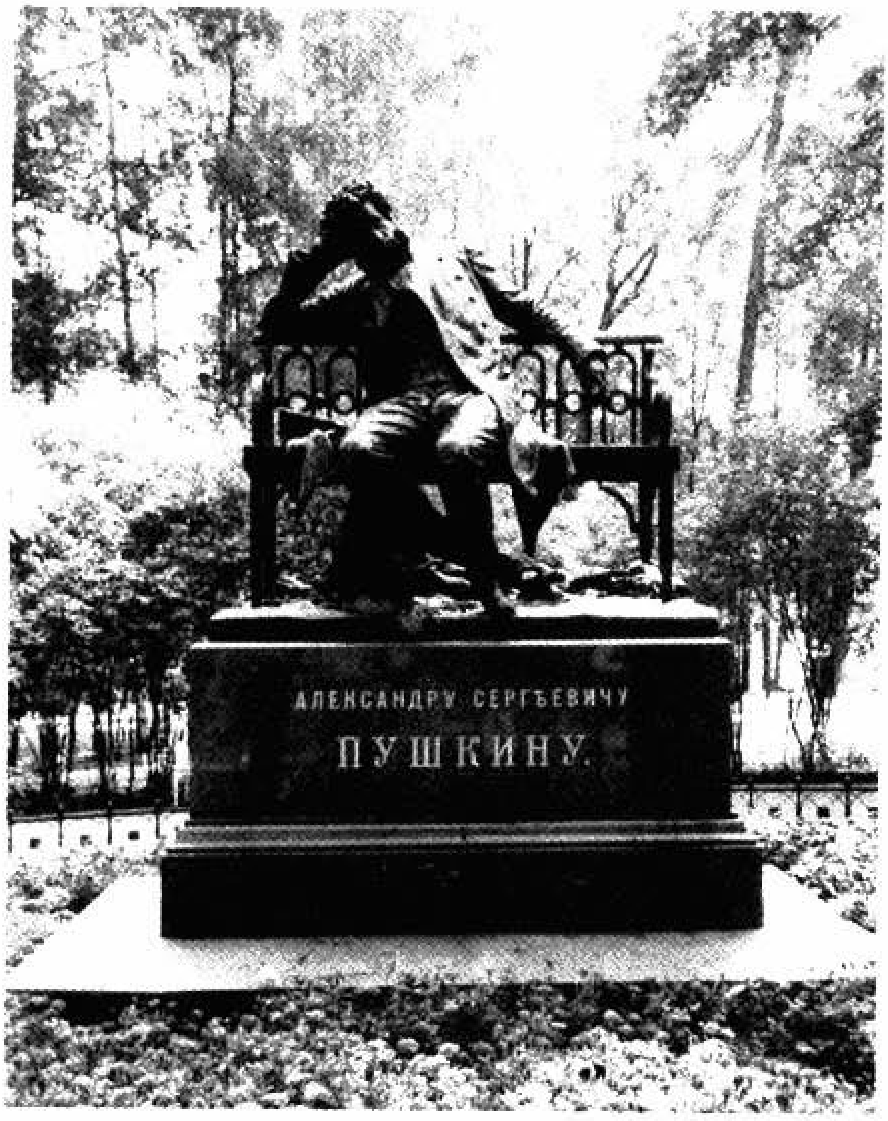
数.

另一方面,每个不大于 n 的正整数 S 都可以惟一地表示成 $S = 2^k(2m-1)$ 的形式,并且,在这个表示式中有 $0 \leqslant k \leqslant l, 1 \leqslant m \leqslant C_k$(因为由 $S \geqslant 1$ 可知 $m \geqslant 1$,又由于 $m = \frac{S+2^k}{2^{k+1}} \leqslant \frac{n+2^k}{2^{k+1}}$,所以由 ③ 可知 $0 \leqslant k \leqslant l$,并且 $m \leqslant \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = C_k$).这就表明,$1,2,\cdots,n$ 中的每个数都出现在数列 ⑤ 中,而且只出现一次,因此,数列 ⑤ 的项数为 n.于是

$$\sum_{k=0}^{l} C_k = n$$

从而所求的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = n$$



普希金雕像

第 11 届国际数学奥林匹克

罗马尼亚,1969

1 证明:具有如下性质的自然数 a 有无穷多个,即对于任意的自然数 n, $z = n^4 + a$ 都不是素数.

民主德国命题

证明 设 $a = 4k^4$,其中 k 是大于 1 的自然数,则有

$$z = n^4 + a = n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2 = (n^2 + 2k^2 + 2nk)(n^2 + 2k^2 - 2nk) = ((n + k)^2 + k^2)((n - k)^2 + k^2) \quad ①$$

今由 $k > 1$,对所有自然数 n,有

$$(n + k)^2 + k^2 > 1, (n - k)^2 + k^2 > 1$$

这样,① 右边的两个因子都大于 1,故当 $k > 1$ 时,z 是合数.今有无穷多个大于 1 的自然数 k,故有无穷多个自然数 $a = 4k^4$ 使得对于所有的自然数 n, $z = n^4 + a$ 都不是素数.

2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实常数,x 是实变数而且

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{4}\cos(a_3 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$$

已知 $f(x_1) = f(x_2) = 0$,求证:$x_2 - x_1 = m\pi$,其中 m 是整数.

匈牙利命题

证明 首先我们证明 $f(x)$ 不恒等于零.

由于对所有实数 x, $\cos(a_i + x) \geqslant -1$,故有

$$f(-a_1) = 1 + \frac{1}{2}\cos(a_2 - a_1) + \frac{1}{4}\cos(a_3 - a_1) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n - a_1) \geqslant 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$$

这样就证明了至少存在一个实数 $x = -a_1$ 使 $f(x) \neq 0$.

其次,我们利用加法定理得到

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}(\cos a_k\cdot\cos x-\sin a_k\cdot\sin x)=$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cos a_k\right)\cos x-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\sin a_k\right)\sin x=$$
$$A\cdot\cos x-B\cdot\sin x$$

其中 $$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cos a_k,B=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\sin a_k$$

它们不可能同时为零.否则 $f(x)$ 将会恒等于零,这和上面所证的结论矛盾.

若 $A\neq 0$,则从

$$f(x_1)=A\cdot\cos x_1-B\cdot\sin x_1=0$$
$$f(x_2)=A\cdot\cos x_2-B\cdot\sin x_2=0$$

得 $$\cot x_1=\cot x_2=\frac{B}{A}$$

若 $A=0$,则 $B\neq 0$,仍从 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 得

$$\sin x_1=\sin x_2=0$$

上面任一种情形,都有 $x_2-x_1=m\pi$,m 是整数.证毕.

3 求证:存在具有如下性质的四面体的充要条件,即对于每一个 k 值,$k=1,2,3,4,5$,四面体中有 k 条棱其长度为 $a(a>0)$,其余 $6-k$ 条棱其长度为 1.

波兰命题

证明 我们依照 $k=1,k=5,k=2,k=4$ 和 $k=3$ 的次序来处理.

(1)$k=1$.

设 $ABCD$ 是具有题述性质的四面体.不失一般性,我们可以假定 $AB=a,AC=BC=AD=BD=CD=1$.若 M 是棱 AB 的中点,则有

$$CM=DM=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

另外,在 $\triangle CMD$ 中,有不等式

$$CM+DM>CD$$

这样,就有 $$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>1,a^2<3$$

故得必要条件 $$a<\sqrt{3}$$

今设这一条件满足,则还有

$$CM+CD>DM,DM+CD>CM$$

即存在一个 $\triangle CMD$ 具有上面给出的边长.由此推出在由 A,B,C 确定的平面之外有一点 D,使得

$$AD = BD = CD = 1$$

所以，$a < \sqrt{3}$ 也是存在四面体 $ABCD$ 的充分条件.

(2)$k = 5$.

这一情形可以由 $k = 1$ 推出，只要把棱长 a 和棱长 1 交换一下就行，我们得到的充要条件是 $a > \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

(3)$k = 2$.

ⅰ 设 $AC = BC = a$，C 是这两棱的公共顶点，则因 $AB = 1$，由三角形不等关系得到必要条件 $2a > 1$，即 $a > \frac{1}{2}$. 今仍设 M 是 AB 的中点，则有

$$CD + DM > CM$$

故

$$1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} > \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}, a^2 < 2 + \sqrt{3}$$

所以

$$a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

另一方面还有 $DM + CM > CD$. 这样

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} > 1, a^2 > 2 - \sqrt{3}$$

所以

$$a > \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

由此，我们得到必要条件

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

再则，若这一条件满足，则 $\triangle DMC$ 存在，于是四面体 $ABCD$ 也存在. 因此，这一条件也是充分的.

ⅱ 设 $AB = CD = a$，这两棱没有公共顶点. 由 $CM = DM = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$ 及 $\triangle DMC$ 中的不等关系，得

$$2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > a, 2a^2 < 4$$

所以

$$a < \sqrt{2}$$

因为具有所述性质的四面体总能够作出，所以这一条件也是充分的.

由 ⅰ 和 ⅱ 可知，在 $k = 2$ 时，存在具有题述性质的四面体的充要条件是 $a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

(4)$k = 4$.

这一情形也可归结为 $k = 2$ 的情形，只要把棱长 a 和棱长 1 交换一下即可，我们得到充要条件

$$\frac{1}{a} < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

即
$$a > \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

(5) $k = 3$.

i 设 $a > \frac{1}{3}\sqrt{3}$，则存在一个四面体 $ABCD$，使 $AB = BC = CA = 1$ 和 $DA = DB = DC = a$；若 S 是等边 $\triangle ABC$ 的重心，则由 $a > \frac{1}{3}\sqrt{3}$ 可知，我们总可以作出这个三角形所在平面的垂线 SD，且

$$SD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}$$

ii 设 $a < \sqrt{3}$，则存在一个四面体，有 $AB = BC = CA = a$，$DA = DB = DC = 1$；类似于上面 i 的情形，由 $a < \sqrt{3}$，我们总可以选择一点 D，使

$$SD = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2}$$

因为由 i 与 ii 所确定的两个区间是互相交错的，故证明了当 $k = 3$ 时，对于所有正实数 a，都存在具有题述性质的四面体.

综上得到，存在具有题述性质的四面体的充要条件如下.

k	1	2	3	4	5
a	$0 < a < \sqrt{3}$	$0 < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$	$a > 0$	$a > \sqrt{2-\sqrt{3}}$	$a > \frac{1}{3}\sqrt{3}$

荷兰命题

4 在以 AB 为直径的半圆周 Γ 上，C 是异于 A，B 的任一点，D 是自 C 至 AB 的垂线足，今有三圆各和 AB 相切. Γ_1 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，Γ_2 和 Γ_3 切 CD 于两侧并与 Γ_1 相切. 求证：$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 另有一条公切线.

证法 1 设 O_i 和 r_i 是圆 Γ_i ($i = 1,2,3$) 的圆心和半径. 我们只要证明 O_1, O_2, O_3 三点共线即可，因为若这三点在同一直线上，则 AB 关于这直线的对称线显然是三圆的另一条公切线.

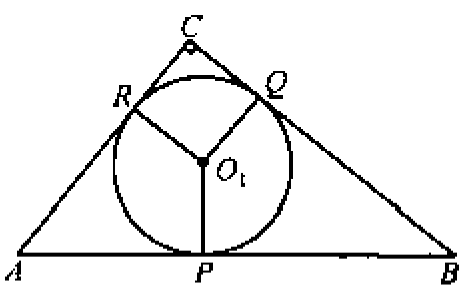


图 11.1

如图 11.1 所示，设 $\triangle ABC$ 的内切圆 Γ_1 和三边 AB，BC，CA 的切点分别为 P，Q，R，则

$$AR = AP, BQ = BP, CR = CQ$$

以 a，b，c 及 s 分别表示 $\triangle ABC$ 三边 BC，CA，AB 的长度及其半周界，则

$$s - a = AP + BQ + CQ - (BQ + CQ) = AP$$

同理
$$s - b = BP, s - c = CQ = CR$$

由于 $\angle ACB = 90°$，CQO_1R 是一个边长为 $s - c$ 的正方形，故

$$r_1 = s - c \quad ①$$

设 O 是半圆 Γ 的圆心，H_2,H_3 是自 O_2,O_3 至 AB 的垂线足，如图 11.2 所示.

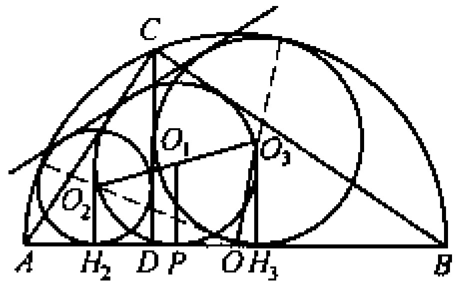


图 11.2

由于 $\triangle ABC \backsim \triangle CBD \backsim \triangle ACD$，故有

$$AC^2 = AB \cdot AD, BC^2 = AB \cdot BD$$

所以

$$AD = \frac{b^2}{c}, BD = \frac{a^2}{c} \quad ②$$

在 $\text{Rt}\triangle O_2H_2O$ 中，有

$$H_2O = r_2 + DO, O_2O = r - r_2$$

于是由勾股定理得

$$r_2^2 + (r_2 + DO)^2 = (r - r_2)^2$$

即 $\quad r_2^2 + 2r_2(r + DO) = r^2 - DO^2 = (r + DO)(r - DO)$

或 $\quad r_2^2 + 2r_2 \cdot BD = BD \cdot AD$

将 ② 代入得

$$r_2^2 + 2r_2 \cdot \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} \Rightarrow \left(r_2 + \frac{a^2}{c}\right)^2 = \frac{a^4}{c^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} = a^2 \Rightarrow$$

$$r_2 + \frac{a^2}{c} = H_2B = a \quad ③$$

同样可得

$$r_3 + \frac{b^2}{c} = AH_3 = b \quad ④$$

③ + ④ 得 $\quad r_2 + r_3 + \dfrac{a^2 + b^2}{c} = a + b$

即

$$r_2 + r_3 = a + b - c = 2(s - c) \quad ⑤$$

设 P 是自 O_1 至 AB 的垂线足，则

$$H_2P = H_2B - PB = a - (s - b) = a + b - s = s - c$$

$$H_3P = H_3A - AP = b - (s - a) = a + b - s = s - c$$

所以

$$H_2P = H_3P = s - c = r_1 = \frac{1}{2}(r_2 + r_3) \quad ⑥$$

由此可知，O_1P 是梯形 $H_2H_3O_3O_2$ 的中位线，从而可知 O_1 是 O_2O_3 的中点. 这就证明了 O_1,O_2,O_3 三点共线. 由此可得公切线 H_2H_3 关于连心线 O_2O_3 的对称线也为三圆的公切线. 因此本题得证.

证法 2 如图 11.3 所示，设圆 γ_i 的圆心为 M_i，半径为 r_i，点 M_i 在 AB 上的正射影为 N_i，$i = 1,2,3$，圆 γ 的圆心为 O，并记

$$BC = a, CA = b, AB = c, AD = p$$

$$DB = q = c - p, \frac{a+b+c}{2} = s$$

又设点 N_2 在线段 AD 内，点 N_3 在线段 BD 内.

首先计算半径 r_2, r_3 和 r_1.

因为 N_2 是圆 γ_2 在 AB 上的切点，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle OM_2N_2$ 中

$$N_2O = N_2D + DB - OB = r_2 + q - \frac{c}{2}, M_2N_2 = r_2$$

同样，因为圆 γ_2 和半径为 $\frac{c}{2}$ 的圆 γ 内切，所以

$$OM_2 = \frac{c}{2} - r_2$$

从而由勾股定理可得

$$\left(r^2 + q - \frac{c}{2}\right)^2 + r_2^2 = \left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2$$

即 $$(r_2 + q)^2 - cq - cr_2 + \frac{c^2}{4} + r_2^2 = \frac{c^2}{4} - cr_2 + r_2^2$$

由此可知 $$(r_2 + q)^2 = cq$$

又因为 $AB \cdot DB = CB^2$，即 $cq = a^2$，所以

$$(r_2 + q)^2 = a^2$$

由于 $r_2 + q > 0, a > 0$，故有

$$r_2 + q = a$$

即

$$r_2 = a - q \quad ⑦$$

类似地，由 $\mathrm{Rt}\triangle ON_3M_3$ 可得

$$r_3 = b - p \quad ⑧$$

因为圆 γ_1 与 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC, BC 分别切于点 T_1 和 T_2，所以四边形 $CT_1M_1T_2$ 是正方形，从而 $M_1T_1 = CT_1$；又因为 $CT_1 + AN_1 + BT_2 = s, AN_1 + BT_2 = c$，所以，$CT_1 = s - c$，即

$$r_1 = s - c \quad ⑨$$

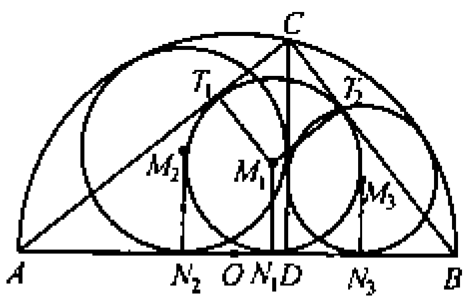


图 11.3

其次，由 ⑦、⑧ 和 ⑨ 可得

$$\frac{1}{2}(M_2N_2 + M_3N_3) = \frac{1}{2}(r_2 + r_3) = \frac{1}{2}(a - q + b - p) =$$

$$\frac{1}{2}(a + b - c) = s - c = M_1N_1 \quad ⑩$$

$$\frac{1}{2}(BN_2 + BN_3) = \frac{1}{2}(q + r_2 + q - r_3) =$$

$$\frac{1}{2}(2q + a - q - b + p) =$$

$$\frac{1}{2}(a + c - b) = BN_1 \quad ⑪$$

由 ⑪ 可知，N_1 是线段 N_2N_3 的中点，从而由 ⑩ 可知，M_1 是线

段 M_2M_3 的中点，也就是说，三点 M_1,M_2,M_3 在同一条直线上. 由此可见，直线 AB 关于直线 M_2M_3 的对称直线也与三个圆 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 相切. 这就证明了，这三个圆除了公切线 AB 外，还有第二条公切线.

证法 3

此证法属于王凤春

引理　如图 11.4 所示，设 C 是以 AB 为直径的半圆 O 上的任意一点，$CD \perp AB$ 于 D，圆 O' 分别切 AB,CD，圆 O 于 E,F,G，则 $AC = AE$.

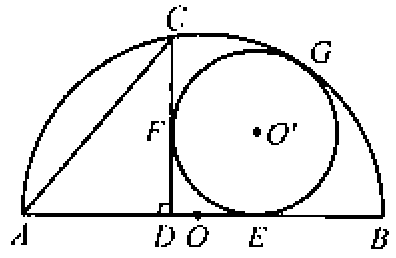


图 11.4

这是一道常见的平几习题，证明留给读者，下面对上述试题进行论证.

如图 11.5 所示，令 Y_1,Y_2,Y_3 的中心分别为 O_1,O_2,O_3，且 Y_1,Y_2,Y_3 分别切 AB 于 P,M,N，则有

$$MN = MD + ND = O_2M + O_3N$$

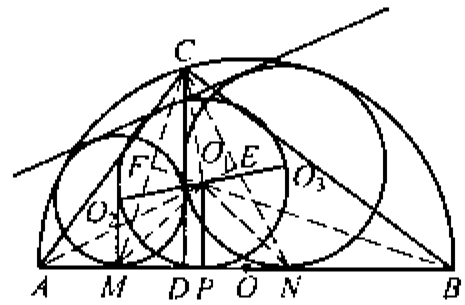


图 11.5

由引理知 $AC = AN, BC = BM$.

连 CM,CN,O_1C,O_1M,O_1N，设直线 AO_1,BO_1 分别交 CN,CM 于 E,F，则 $\angle CAE = \angle NAE, \angle CBF = \angle MBF$，故 AE,BF 分别垂直平分 CN,CM，从而有 $O_1M = O_1N = O_1C = \sqrt{2}O_1P$，于是

$$PM = PN = O_1P = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}(O_2M + O_3N)$$

由此可推得 O_1 是 O_2O_3 的中点，即 O_1,O_2,O_3 三点共线，再由对称性即知圆 Y_1,Y_2,Y_3 还有第二条公切线.

5 给定平面上 $n(n > 4)$ 点，其中没有三点在同一直线上. 求证：至少存在 $\binom{n-3}{2}$ 个凸四边形，其顶点是所给定的 n 点中的四点.

蒙古命题

证法 1　首先考虑 $n = 5$ 的情形.

如图 11.6 所示，若所给的五点中至少有四点是一个凸四边形的顶点，则结论已成立，因为当 $n = 5$ 时，$\binom{n-3}{2} = 1$.

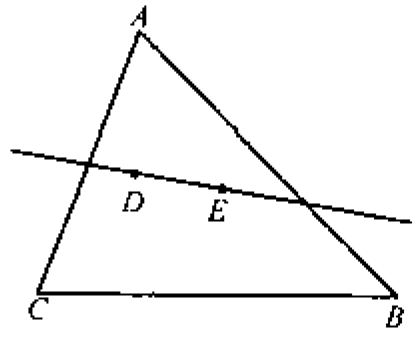


图 11.6

若所给的五点中，有三点 A,B,C 构成一个三角形，其他两点 D,E 在这个三角形内部，则通过 D,E 两点的直线必和 $\triangle ABC$ 的两边相交，而且这两交点是这两边的内点，因为根据假设，DE 不通过 $\triangle ABC$ 的顶点. 于是 B,C,D,E 四点就构成一个凸四边形，因此两对角线 BD,CE 在这一四边形的内部.

这样，$n = 5$ 的情形就解决了.

现在假设所给的点多于五点，即 $n > 5$. 从这些点所组成的点

集中，任取五点可以构成$\binom{n}{5}$个不同的子集. 据上所证，在每一个子集中，存在四个点构成一个凸四边形. 另一方面，这样的一个凸四边形，至多只能属于 $n-4$ 个子集. 因而所有这种四边形的总数大于或等于$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$. 但是

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!(n-4)}=$$
$$\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}\right)\left(\frac{(n-3)(n-4)}{2}\right)=$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}\binom{n-3}{2}$$

当 $n=6$ 时

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}=1$$

当 $n>6$ 时

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}>1$$

所以
$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}\geqslant\binom{n-3}{2},n>5$$

这样，$n>5$ 的情形也解决了.

证法2 设 S 是所给定的 n 个点的点集. 在 S 的凸包的边界上取 A,B,C 三点，并在 S 中另取 D,E 二点，则 A,B,C 三点中至少有二点在 DE 的同一侧，不妨假定这二点是 A 和 B. 于是 A,B,D,E 四点就必定构成一个凸四边形，否则这四点的凸包就会是含点 A 或点 B 在其内部的三角形，如图 11.7 所示，这和 A,B,C 三点皆在 S 的凸包的边界上的原设矛盾.

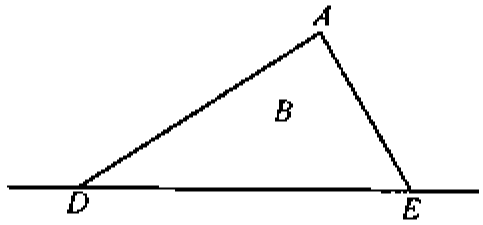


图 11.7

因为选取 D,E 二点的方法共有$\binom{n-3}{2}$种，故存在$\binom{n-3}{2}$个凸四边形，其顶点是所给定的 n 个点中的四个点.

证法3 由于 n 个点中无三点共线. 所以以 n 点中任意三点为顶点可作 C_n^3 个三角形，其中面积最大者设为 $\triangle ABC$，如图 11.8 所示. 过 A,B,C 分别作对边的平行线相交得 $\triangle A'B'C'$.

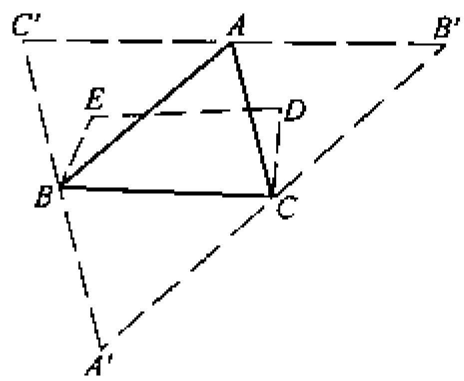


图 11.8

因为 $\triangle ABC$ 的面积最大，所以其余 $n-3$ 个点均在 $\triangle A'B'C'$ 中(用反证法证明). 过其中任意两点 D,E 的直线与 $\triangle ABC$ 的两条边相交，不妨设直线 DE 与边 BC 不相交，则 B,C 在直线 DE 同侧，D,E 在 BC 同侧. 从而四边形 $DEBC$ 为凸四边形，因此，$n-3$ 个

点中任两点与 A,B,C 中某两个点可作出一个凸四边形. 所以至少可以作出 C_{n-3}^2 个凸四边形.

证法 4 首先讨论 $n=5$ 的情形,这时 $C_{n-3}^2=C_2^2=1$,故只要找出一个凸四边形就行了. 可以分三种情况讨论如下.

ⅰ 给定的五点就是一个凸五边形的顶点. 显然,这五点中任意四点都是凸四边形的顶点,故此时命题成立.

ⅱ 给定的五点中,有四点是一个凸四边形的顶点,另外一点在此四边形内部. 显然,此时命题也成立.

ⅲ 给定的五点中,有二点(点 D 和点 E)在另外三点(点 A,点 B 和点 C)所构成的三角形内部,如图 11.9 所示. 此时由题意知,直线 DE 不会通过点 A,B,C,即直线 DE 必与 $\triangle ABC$ 的两条边分别相交于点 P 和 Q,不妨假设点 P 在线段 AB 内,点 Q 在线段 AC 内. 由此可知,四边形 $BCED$ 的对角线 BE 和 CD 都在它的内部,所以,$BCED$ 是凸四边形.

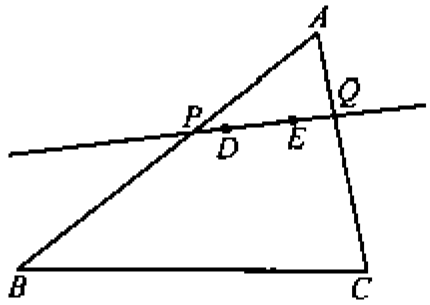


图 11.9

这就证明了:已知一平面内有五点,并且其中没有三点在一直线上,则至少可以找到一个以给定的点为顶点的凸四边形.

再来讨论 $n>4$ 的情形. 这时给定的 n 个点的集合有 C_n^5 个不同的五个点的子集合,由上面的讨论可知,每个子集合至少有一个以该子集合的点为顶点的凸四边形,因而可得出 C_n^5 个凸四边形. 然而,这些凸四边形中可能有些是相同的,因为对其中每个凸四边形来说,它的四个顶点与另外 $n-4$ 个点中的某一点可构成一个五个点的子集合,因而每个凸四边形的顶点至多属于 $n-4$ 个五个点的子集合,由此可知,这种凸四边形的总数大于或等于 $\frac{1}{n-4}C_n^5$.

设

$$f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5,g(n)=C_{n-3}^2$$

我们证明,当 $n>4$ 时,有

$$f(n)\geqslant g(n)$$

首先,不难验证

$$f(5)=g(5),f(6)=g(6)$$

其次,由于

$$f(n)-g(n)=\frac{1}{5!}n(n-1)(n-2)(n-3)-\frac{1}{2!}(n-3)(n-4)=$$

$$\frac{1}{5!}(n-3)(n(n-1)(n-2)-60(n-4))$$

并且,当 $n\geqslant 7$ 时

$$n(n-1)(n-2)=n^3-3n^2+2n=$$
$$(n^2+n+6)(n-4)+24=$$
$$(n(n+1)+6)(n-4)+24>$$
$$60(n-4)+24$$

故知当 $n\geqslant 7$ 时

$$f(n)>g(n)$$

这就证明了，至少存在 C_{n-3}^2 个以给定点为顶点的凸四边形.

注 实际上，我们证明了更强的结论：当 $n>6$ 时，至少存在 $\frac{1}{n-4}C_n^5$ 个凸四边形.

苏联命题

6 求证：对于所有实数 x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2，其中 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_1y_1-z_1^2>0$，$x_2y_2-z_2^2>0$，下面的不等式成立：

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2} \quad ①$$

并求等号成立的充要条件.

证明 令

$$D_1=x_1y_1-z_1^2,D_2=x_2y_2-z_2^2$$
$$D=(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$$

因 $D_i>0,x_i>0$，可知

$$y_i=\frac{D_i+z_i^2}{x_i}>0,i=1,2$$

于是不等式 ① 可写成

$$\frac{8}{D}\leqslant\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}$$

或

$$8D_1D_2\leqslant(D_1+D_2)D \quad ②$$

D 可用 D_i，z_i 或 y_i 表示，即

$$D=D_1+D_2+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2=$$
$$D_1+D_2+y_2(D_1+z_1^2)/y_1+$$
$$y_1(D_2+z_2^2)/y_2-2z_1z_2=$$
$$D_1+D_2+D_1y_2/y_1+D_2y_1/y_2+$$
$$(z_1/y_1-z_2/y_2)^2y_1y_2>0$$

代入 ② 得

$$8D_1D_2\leqslant(D_1+D_2)^2+(D_1+D_2)\left(\frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2}\right)+$$

$$(D_1+D_2)\left(\frac{z_1}{y_1}-\frac{z_2}{y_2}\right)^2 y_1y_2$$

两边各减去 $4D_1D_2$,得

$$4D_1D_2 \leqslant (D_1-D_2)^2+(D_1+D_2)\left(\frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2}\right)+ (D_1+D_2)\left(\frac{z_1}{y_1}-\frac{z_2}{y_2}\right)^2 y_1y_2 \quad ③$$

③ 右边的第一项和第三项皆大于等于 0,而中项则由于算术平均值大于或等于几何平均值,有

$$D_1+D_2 \geqslant 2\sqrt{D_1D_2}$$

$$\frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2} \geqslant 2\sqrt{\frac{D_1D_2y_1y_2}{y_1y_2}} = 2\sqrt{D_1D_2}$$

故中项大于等于 $2\sqrt{D_1D_2}\cdot 2\sqrt{D_1D_2}=4D_1D_2$,从而证得不等式 ① 成立,并且易见,等号成立的充要条件是 $x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2$.

推广 题中 D_1, D_2, D 可用下列矩阵 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}$ 的行列式表示,即

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ z_1 & y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix} x_2 & z_2 \\ z_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2$$

而求证的不等式则可写成

$$\frac{8}{\det(\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2)} \leqslant \frac{1}{\det\boldsymbol{M}_1}+\frac{1}{\det\boldsymbol{M}_2}$$

如果 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ 是 n 阶正定矩阵,上面的不等式仍能成立.证明要用线性代数的方法,这里从略.



摩尔达维亚教堂

第 12 届国际数学奥林匹克

匈牙利，1970

1 设 M 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上任一点，r_1, r_2 和 r 分别是 $\triangle AMC$，$\triangle BMC$ 和 $\triangle ABC$ 内切圆的半径，q_1, q_2 和 q 是含在 $\angle ACB$ 内这些三角形的旁切圆的半径.求证

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$$

波兰命题

证法 1 如图 12.1 所示，设 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心为 I，半径为 r，又 $\angle ACB$ 所含旁切圆的圆心为 E，半径为 q. U 和 V 是内切圆 I 和旁切圆 E 切于边 AB 的点.设 $\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$AB=c$，则

$$AU+BU=c, AV+BV=c$$

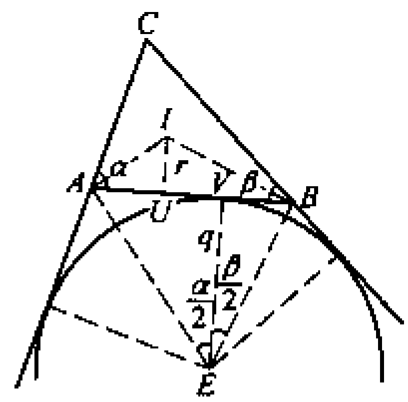


图 12.1

因为

$$AU=r\cdot\cot\frac{\alpha}{2}, BU=r\cdot\cot\frac{\beta}{2}$$

所以

$$c=r\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right) \quad ①$$

因从 E 垂直于 AB 和 BC 的半径成一角，其边垂直于 $\angle ABC$ 的两边，故 $\angle BEV=\beta/2$. 同理，$\angle AEV=\alpha/2$. 从而得

$$AV=q\cdot\tan\frac{\alpha}{2}, BV=q\cdot\tan\frac{\beta}{2}$$

所以

$$c=q\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right) \quad ②$$

自 ①，② 得

$$\frac{r}{q}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}} \quad ③$$

若上式右边分母分子各乘以 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}$，然后除以公因子 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}$ 便得

$$\frac{r}{q}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} \quad ④$$

其次我们应用这结果于相邻的 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BMC$，如图 12.2 所示，便得

$$\frac{r_1}{q_1}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\angle AMC}{2},\frac{r_2}{q_2}=\tan\frac{\angle BMC}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} \quad ⑤$$

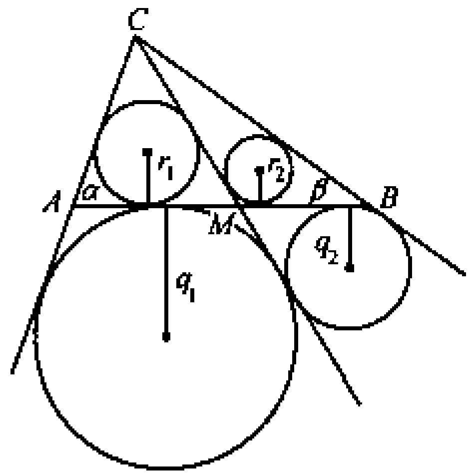


图 12.2

因为 $\angle AMC+\angle BMC=180^\circ$，故

$$\frac{1}{2}\angle BMC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle AMC$$

$$\tan\frac{\angle BMC}{2}=\cot\frac{\angle AMC}{2} \quad ⑥$$

于是由 ⑤ 和 ⑥ 得

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\left(\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\angle AMC}{2}\right)\left(\cot\frac{\angle AMC}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{q}$$

证法2　设圆 R 和圆 Q 分别是 $\triangle ABC$ 的内切圆和 AB 边上的旁切圆，并且分别与边 AB,BC,CA 切于点 P,S,T 和点 P',S',T'，如图 12.3 所示.

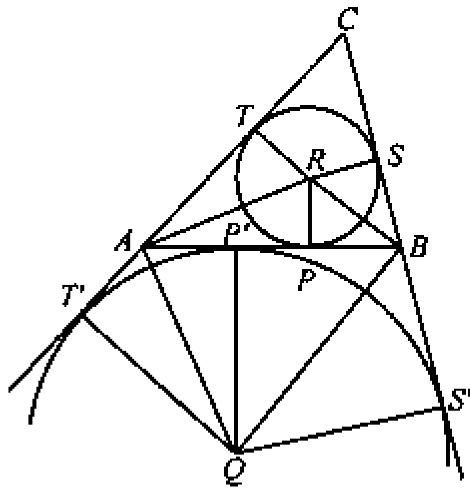


图 12.3

因为 $\triangle ARP\backsim\triangle AQP'$，所以

$$rq=AP\cdot AP'$$

因为

$$AP'=\frac{1}{2}(AP'+AT')=\frac{1}{2}(AB-P'B)+\frac{1}{2}(CT'-AC)=$$

$$\frac{1}{2}(AB-BS')+\frac{1}{2}(CS'-AC)=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)-AC$$

$$BP=\frac{1}{2}(BP+BS)=\frac{1}{2}(AB-AP)+\frac{1}{2}(BC-CS)=$$

$$\frac{1}{2}(AB-AT)+\frac{1}{2}(BC-CT)=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)-AC$$

所以
$$AP'=BP$$

所以
$$rq=AP\cdot BP$$

即
$$\frac{r}{q}=\frac{r^2}{rq}=\frac{r^2}{AP\cdot BP}$$

同理，设圆 R_1 和圆 R_2 分别是 $\triangle AMC$ 和 $\triangle MBC$ 的内切圆，并且分别与 AM 和 MB 相切于 P_1 和 P_2，如图 12.4 所示，则有

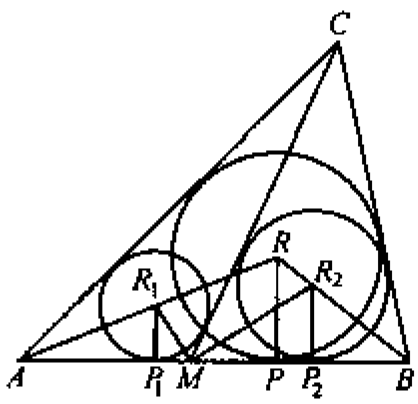


图 12.4

$$\frac{r_1}{q_1}=\frac{r_1^2}{AP_1\cdot MP_1},\frac{r_2}{q_2}=\frac{r_2^2}{MP_2\cdot BP_2}$$

所以
$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r_1}{AP_1}\cdot\frac{r_1}{MP_1}\cdot\frac{r_2}{MP_2}\cdot\frac{r_2}{BP_2}$$

因为
$$\triangle AR_1P_1\backsim\triangle ARP$$

其中，$P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}x_kt^k$. 则所给出的问题等于求证

$$f(a)<f(b)\Leftrightarrow a>b$$

这样，我们只要证明 $f(t)$ 是严格单调递减的函数，问题也就解决了.

根据初等微分学定理，若 $t>0$ 时，$f(t)$ 的导数小于 0，则 $y=f(t)$ 是严格单调递减函数. 现在

$$f'(t)=\frac{P'(t)(P(t)+x_nt^n)-P(t)(P'(t)+nx_nt^{n-1})}{(P(t)+x_nt^n)^2}=$$

$$\frac{x_nt^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(k-n)x_kt^k-nx_0\right)}{(P(t)+x_nt^n)^2}$$

显然 $$x_nt^{n-1}/(P(t)+x_nt^n)^2>0$$

又由于 $n>1,0\leqslant k\leqslant n-1$，可知 $k-n<0$，故当至少有一个 $x_k>0$ 时，有 $f'(t)<0$. 证毕.

证法 3 先用数学归纳法证一个引理.

引理 对于任意自然数 n，有

$$a^nB_n-b^nA_n>0,a>b$$

引理的证明 事实上，当 $n=1$ 时，$n-1=0$，则 $x_1>0$，$x_0>0$，且因为 $a>b$ 有

$$a^1B_1-b^1A_1=a(x_1b+x_0)-b(x_1a+x_0)=x_0(a-b)>0$$

引理成立.

假定当 $n=k$ 时引理成立，即

$$a^kB_k-b^kA_k>0,a^kB_k>b^kA_k$$

因为 $a>b$，所以

$$a^{k+1}B_k>b^{k+1}A_k,a^{k+1}B_k-b^{k+1}A_k>0$$

于是当 $n=k+1$ 时，有

$$a^{k+1}B_{k+1}-b^{k+1}A_{k+1}=a^{k+1}(b^{k+1}x_{k+1}+B_k)-b^{k+1}(a^{k+1}x_{k+1}+A_k)=a^{k+1}B_k-b^{k+1}A_k>0$$

引理仍成立. 至此引理证毕.

于是

$$\frac{B_{n-1}}{B_n}-\frac{A_{n-1}}{A_n}=\frac{1}{A_nB_n}(A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n)=$$

$$\frac{1}{A_nB_n}(A_n(B_n-b^nx_n)-B_n(A_n-a^nx_n))=$$

$$\frac{x_n}{A_nB_n}(a^nB_n-b^nA_n)>0$$

所以
$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$$

瑞典命题

3 设$\{a_n\}$是具有下列性质的实数列,即
$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \quad ①$$
数列$\{b_n\}$定义为
$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}, n = 1,2,3,\cdots \quad ②$$
证明:(1) 对所有的 $n = 1,2,3,\cdots$,有 $0 \leqslant b_n < 2$.

(2) 对满足 $0 \leqslant c < 2$ 的任意实数 c,总存在着一个满足 ① 的数列$\{a_n\}$使得由 ② 导出的数列$\{b_n\}$中有无穷多个下标 n,使 $b_n > c$.

证明 (1) 我们注意到$\frac{a_{k-1}}{a_k} \leqslant 1$,故对于一切 n 有 $b_n \geqslant 0$. 以 α_k 表示$\sqrt{a_k}$,则 b_n 中的第 k 项为
$$\left(1 - \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2}\right)\frac{1}{\alpha_k} = \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k}\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}^2} - \frac{1}{\alpha_k^2}\right) =$$
$$\frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k}\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\alpha_k}\right)\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) =$$
$$\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\left(1 + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) \leqslant$$
$$2\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right)$$
其中,$k = 1,2,\cdots,n$,把诸不等式相加,我们即可看到右式成一叠进和式,故对于一切自然数 n,有
$$0 \leqslant b_n \leqslant 2\left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_n}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2$$

(2) 已知 $0 \leqslant c < 2$,我们来证明存在适当的 a_i 使得由它导出的数列$\{b_n\}$具有题中所要求的性质. 现在我们从比较简单的等比数列入手.

令$\frac{1}{\sqrt{a_k}} = d^k$,则 b_n 中的第 k 项为
$$\left(1 - \frac{d^{-2(k-1)}}{d^{-2k}}\right)d^k - (1 - d^2)d^k$$
从而
$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(1 - d^2)d^k = (1 - d^2)\sum_{k=1}^{n}d^k =$$
$$(1 - d^2)\frac{d - d^{n+1}}{1 - d} = d(1 + d)(1 - d^n)$$

我们选取 0 与 1 之间的数 d，使得当 n 足够大时

$$b_n = d(1+d)(1-d^n) > c$$

根据给定的条件，这是容易做到的．首先，对于任何 $c < 2$，只须取 $d = \sqrt{\frac{c}{2}}$，就有 $d(1+d) > c$；其次，既然 $d < 1$，对于一切充分大的 n，可得到尽量接近于 1 的 $1 - d^n$，特别地有

$$1 - d^n > \frac{c}{d(1+d)}$$

这样，对于一切充分大的 n，恒有

$$d(1+d)(1-d^n) > c$$

（我们建议读者依照所给的 c 求出 N，使得对于一切 $n > N$ 有 $b_n > c$）

4 求具有下述性质的一切正整数 n：数集 $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ 可以划分为两个不相交的非空子集，使得两子集中各数的积相等．

捷克斯洛伐克命题

解法 1 设六个连续正整数的数集 S 被划分为具有指定性质的非空子集 S_1 和 S_2，则一子集中的一元素的任一素因子 p 也必是另一子集中的一元素的一个因子．无论如何，若 p 是 S 中二元素的公因子，设这二元素是 a 和 b，则

$$|a - b| = kp \leqslant 5$$

故对于 p 可选者只有 2，3 和 5．再则六个连续整数中，至少有一个数可被 5 整除，所以从上面的论断可知，S 必含有 n 和 $n+5$ 这两个元素．其余的元素 $n+1, n+2, n+3$ 和 $n+4$ 只能有 2 和 3 为其素因子，所以它们必是形如 $2^\alpha, 3^\beta$ 的数．又这四个元素中恰有两个奇数，它们必是 3^γ 和 3^δ，其中，$\gamma, \delta > 0$，而且 $|3^\gamma - 3^\delta| = 2$．但这是不可能的，因此我们看出没有整数 n 具有指定的性质．

解法 2 假定数集 $S = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ 可以划分为子集 S_1 和 S_2，使 S_1 中各元素的积 a_1 等于 S_2 中各元素的积 a_2，则 a_1 和 a_2 对模 7 必定同余，即

$$a_1 \equiv a_2 \pmod 7 \quad ①$$

S 中不可能有一数可被 7 整除，因为六个连续整数中至多有一数可被 7 整除，若一个子集含它，则另一个就不会含它，否则 ① 不成立．所以 S 中的数是对模 7 同余于 1，2，3，4，5，6．从而得出

$$a_1 a_2 \equiv 6! \pmod 7$$

根据威尔逊定理有

$$6! \equiv -1 \pmod 7$$

所以

$$a_1a_2 \equiv -1 \pmod 7) \quad ②$$

今因 $a_1 \equiv a_2 \pmod 7$,故

$$a_1a_2 \equiv a_1^2 \pmod 7$$

代入②得

$$a_1^2 \equiv -1 \pmod 7 \quad ③$$

但③不可能成立,因为根据二次同余式定理,对于形如 $4m+3$ 的素数 p,同余式没有解.故 S 不能划分为 S_1 和 S_2 使具有指定的性质.

解法 3 我们证明:具有题中所述性质的正整数 n 是不存在的.

用反证法.假设正整数 n 具有所述性质.于是六个自然数

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$$

中,某个数的素因数也一定是其余五个数中某个数的素因数.

由于这是六个连续的自然数,因而这六个数中至少有两个数含有素因数 2,也至少有两个数含有素因数 3.又由于六个连续的自然数中至少有一个能被 5 整除,因而由题意可知,这六个数中至少有两个数含有素因数 5.进而又可知,含有素因数 5 的两个数只能是 n 和 $n+5$,因为,不然的话,例如,设 5 是 $n+1$ 的因数,于是

$$n \equiv 4 \pmod 5, n+2 \equiv 1 \pmod 5, n+3 \equiv 2 \pmod 5$$

$$n+4 \equiv 3 \pmod 5, n+5 \equiv 4 \pmod 5$$

这样,这六个数中就只能有一个数被 5 整除.

再来证明:除素数 2,3,5 外,这六个数不能再含有其他的素因数.因为,如果素数 $p(p \geqslant 7)$ 是这六个数中某一个的因数,例如,设 p 是 $n+1$ 的因数,于是

$$n \equiv p-1 \pmod p, n+2 \equiv 1 \pmod p, n+3 \equiv 2 \pmod p$$

$$n+4 \equiv 3 \pmod p, n+5 \equiv 4 \pmod p$$

这样,这六个数中就只能有一个被 p 整除,此与题设矛盾.

由此可知,数 $n+1, n+2, n+3, n+4$ 的素因数只能是 2 和 3.由于这是四个连续的自然数,因而其中只能有两个奇数,并且它们一定是 3 的幂.然而这是不可能的,因为一方面四个连续自然数中两个奇数的差应该等于 2(或 -2),另一方面两个 3 的幂之差

$$3^k - 3^m, k > 1, m > 1$$

决不会等于 2(或 -2).这就证明了我们的论断.

> **5** 在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BDC$ 是直角，由 D 到 $\triangle ABC$ 所在的平面的垂线的垂足 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，证明
> $$(AB+BC+CA)^2 \leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2)$$
> 并指出对于哪一种四面体，上面的等号成立？

保加利亚命题

证法 1 首先我们来证明顶点 D 的各面角均为直角. 已知 $\angle BDC$ 为直角. 如图 12.5 所示，平面 $CDH \perp$ 平面 ABC，故 $AB \perp$ 平面 CDH，因而 $AB \perp DE$. 我们记四面体各棱的长为

$$a = BC, b = CA, c = AB, p = AD, q = BD, r = CD$$

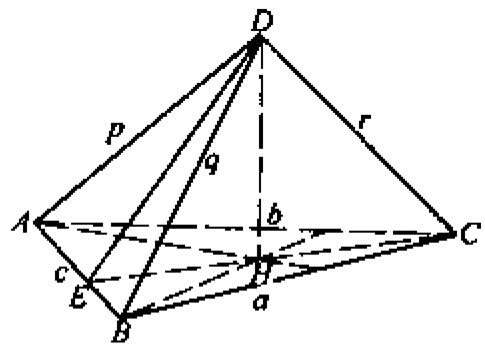


图 12.5

根据勾股定理得

$$DE^2 + EB^2 = DB^2 = q^2 \quad ①$$

$$CE^2 + EB^2 = BC^2 = a^2 = q^2 + r^2 \quad ②$$

由 ② - ① 得

$$CE^2 - DE^2 = r^2$$

或

$$r^2 + DE^2 = CE^2$$

根据勾股定理的逆定理，可知 $CD \perp DE$. 又 $CD \perp BD$，故 $CD \perp$ 平面 ADB. 因而 $CD \perp AD$，即 $\angle ADC = 90°$. 对于平面 DHB，同理可证得 $\angle ADB = 90°$. 因此，面角为直角的三个面交于 D，并且有

$$q^2 + r^2 = a^2, p^2 + r^2 = b^2, p^2 + q^2 = c^2$$

因此有

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 + q^2 + r^2) \quad ③$$

今再证

$$(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad ④$$

此与 ③ 结合起来，就得所需的结果

$$(a + b + c)^2 \leqslant 6(p^2 + q^2 + r^2)$$

但不等式 ④ 是柯西不等式，即

$$(\alpha a + \beta b + \gamma c)^2 \leqslant (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a^2 + b^2 + c^2) \quad ⑤$$

在 $\alpha = \beta = \gamma = 1$ 时的特例. 为证明 ⑤，我们可考虑 x 的二次函数

$$q(x) = (ax + \alpha)^2 + (bx + \beta)^2 + (cx + \gamma)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(\alpha a + \beta b + \gamma c)x + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

由于对一切 x 都有 $q(x) \geqslant 0$，所以其判别式恒为

$$(2(\alpha a + \beta b + \gamma c))^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \leqslant 0$$

这就是不等式 ⑤.

此外，$q(x) = 0$ 仅在 $x = -\frac{\alpha}{a} = -\frac{\beta}{b} = -\frac{\gamma}{c}$ 时成立，这结合条件 $\alpha = \beta = \gamma = 1$，包含了 $a = b = c$. 故 ④ 的等号成立，仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时.

证法 2 在以 H 为原点的坐标系中，把点 A,B,C,D 的位置向量分别记做 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$. 依照题目给出的条件显然可得

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})=0 \quad ⑥$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0,\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})=0$$

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=0 \quad ⑦$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}=0 \quad ⑧$$

由 ⑥ 和 ⑧ 得

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}=0 \quad ⑨$$

由 ⑦ 得

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \quad ⑩$$

由 ⑨ 和 ⑩ 得

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}=0,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}=0 \quad ⑪$$

于是由 ⑧ 还有

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D})\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D})=0,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})=0 \quad ⑫$$

故 $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 也是直角.

以下的证明和证法 1 相同.

6 在一个平面上有 100 点，其中任意三点均不共线. 我们考虑以这些点为顶点的所有可能的三角形. 证明：其中至多有 70% 的三角形是锐角三角形.

苏联命题

证法 1 我们将用归纳法证明. 设 $A(n)$ 为由 n 点构成的锐角三角形的最大个数，$T(n)=\binom{n}{3}$ 为三角形的总数，则比值 $A(n)/T(n)$ 成一不增序列. 我们将指出 $A(5)/T(5)=0.7$. 故对于 $n>5$，且特别对于 $n=100$，$A(n)/T(n)\leqslant 0.7$.

今讨论 $n=5$ 的情形. 我们首先要知道 $n=4$ 的情况.

(1) $n=4$.

ⅰ 设其一点 P_4 在其他三点所成的三角形的内部. 关于 P_4 的三个角加起来为 $360°$，由于每个角小于 $180°$，故至少有两个角大于 $90°$. 所以，在这种情形下，至少有两个钝角三角形，即至多有两个锐角三角形.

ⅱ 四点成一凸四边形. 因其内角和为 $360°$，故至少有一内角大于等于 $90°$，这样就产生至少一个非锐角三角形. 所以在这情形下，四个三角形中可以有三个为锐角三角形，即 $A(4)/T(4)=0.75$.

(2) $n=5$.

ⅰ 五点 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 的凸包是一个三角形，设它为

$\triangle P_1P_2P_3$，则 P_4,P_5 均在它的内部，于是在 $\angle P_1P_4P_2$，$\angle P_2P_4P_3$，$\angle P_3P_4P_1$ 中至少有两个非锐角，同理在 $\angle P_1P_5P_2$，$\angle P_2P_5P_3$，$\angle P_3P_5P_1$ 中也至少有两个非锐角. 这样，我们至少得到四个非锐角三角形.

ⅱ 五点 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 的凸包是一个四边形，如 $P_1P_2P_3P_4$，而 P_5 在其内部，如图 12.6(a) 所示. 则 P_5 是在 $\binom{4}{3}=4$ 个三角形中由 P_1,P_2,P_3,P_4 四点所成的两个三角形的内部(如图 12.6(a) 中的 $\triangle P_1P_2P_3$ 与 $\triangle P_2P_3P_4$ 的内部). 我们联系 $n=4$ 的情形 ⅰ 便得关于顶点 P_5 的两对非锐角 $\triangle P_1P_3P_5$，$\triangle P_2P_3P_5$ 和 $\triangle P_2P_3P_5$，$\triangle P_2P_4P_5$(如图 12.6(a) 所示)；但在这两对中有一个共同的 $\triangle P_2P_3P_5$，故在顶点 P_5 至少有三个非锐角三角形，又以 P_1,P_2,P_3,P_4 为顶点的角至少有一个大于等于 90°，还给出了其他的非锐角三角形.

ⅲ 五点成一凸五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 的诸内角和为 540°，故至少有两个非锐角. 给出两个非锐角三角形如 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$. 若其余的三内角全为锐角，它们两个必相邻，设在 P_2 与 P_3. 则将 $n=4$ 的情形 ⅱ 用于四边形 $P_1P_2P_3P_4$，其一角 $\angle P_1P_4P_3$ 或 $\angle P_4P_1P_2$ 非锐角，如图 12.6(b) 所示，给出非锐角三角形的总数为三个.

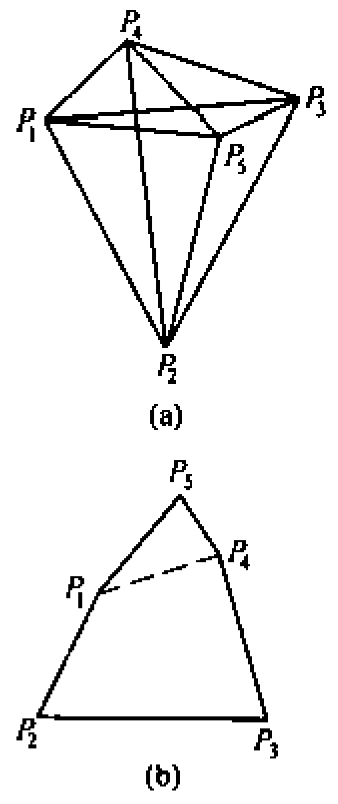


图 12.6

如此，在五点的任何构形中，至少三个三角形是非锐角的，但这时三角形的总数是 $\binom{5}{3}=10$，故至多 7 个是锐角三角形，即 $A(5)\leqslant 7$，而且在图 12.6(b) 情形会出现 $A(5)=7$，从而 $A(5)/T(5)=7/10=0.7$.

设 $A(n)\leqslant CT(n)$ 对从 5 到 n 的一切整数均成立，我们将证明 $A(n+1)\leqslant CT(n+1)$ 也成立. 为证明这个式子，我们将含有 $n+1$ 点的集 S 接连地略去第一点，第二点，……，第 $n+1$ 点，便得 $n+1$ 个 n 点组，以 B_k 表示略去第 k 点的 n 点组所成的所有的三角形中锐角三角形的个数. 由归纳假设知，$B_k\leqslant A(n)\leqslant CT(n)$ 对每一个 k 成立. 现在我们用和 $B_1+B_2+\cdots+B_{n+1}$ 来计算原集合 S 中锐角三角形的总数 B. 我们知道，某一锐角三角形要在和式中出现，它除了其顶点被略去的那个 n 点组中不出现外，其余的均出现，所以在原集合 S 中的每一个锐角三角形在和式中计算 $(n+1)-3=n-2$ 次，因此

$$B=\frac{1}{n-2}(B_1+B_2+\cdots+B_{n+1})\leqslant C\frac{n+1}{n-2}T(n)=CT(n+1)$$

其中用到关系式 $\frac{n+1}{n-2}\binom{n}{3}=\binom{n+1}{3}$. 由于这个不等式对于任何含有 $n+1$ 点的集均成立，所以有 $A(n+1)\leqslant CT(n+1)$. 这就完

成了归纳法的证明.

证法2 设 $S(M)$ 与 $g(M)$ 分别是锐角三角形的个数与三角形的总数,它们是由平面上的有限点集 M 的点所构成的,则有

$$\frac{S(M)}{g(M)} \leqslant a \Rightarrow \frac{S(M^*)}{g(M^*)} \leqslant a$$

其中,M^* 表示由 M 加上一个点所构成的集合,证明如下.

设 M^* 由 $n+1$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ 构成,M_i 表示从 M^* 中略去点 A_i 的点集,则

$$S(M^*) = \frac{S(M_1) + S(M_2) + \cdots + S(M_{n+1})}{n-2}$$

$$g(M^*) = \frac{g(M_1) + g(M_2) + \cdots + g(M_{n+1})}{n-2}$$

因为,例如在和 $g(M_1) + \cdots + g(M_{n+1})$ 中,每个三角形出现 $n-2$ 次.按假定 $S(M_j) \leqslant ag(M_i)$,则由上面所述关系,可得 $S(M^*) \leqslant ag(M^*)$.

对于四点的集合 N,有

$$g(N) = \binom{4}{3} = 4, S(M) \leqslant 3$$

故 $\frac{S(N)}{g(N)} \leqslant 0.75$,而对于五点的集合 N^*,有

$$\frac{S(N^*)}{g(N^*)} \leqslant \frac{S(N^*)}{10} \leqslant 0.75$$

即 $S(N^*) \leqslant 7.5$,亦即 $S(N^*) \leqslant 7$.题述结论现在可由完全归纳法推出.

证法3 首先我们证明:任意五个点,其中没有三点共线,则一定可以找到以这五个点中的点为顶点的三个非锐角三角形.

ⅰ 若这五个点是一凸五边形的顶点,则这个五边形中至少有两个内角为钝角,它们可能相邻(例如 $\angle A, \angle B$),如图12.7所示,也可能不相邻(例如 $\angle A, \angle C$),如图12.8所示.再注意四边形 $ACDE$ 中至少有一个内角非锐角,这样就找到了三个不同的非锐角,相应地得到三个非锐角三角形.

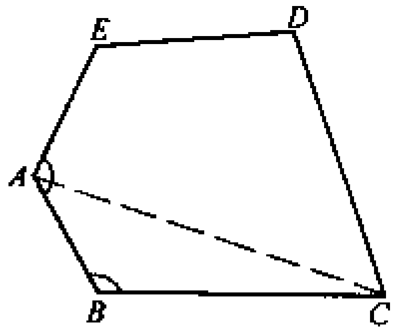


图12.7

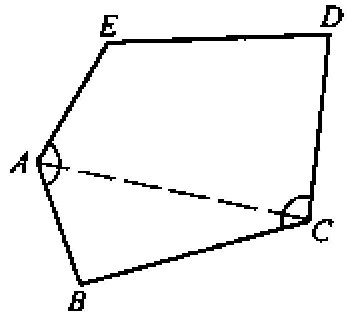


图12.8

ⅱ 若五个点中有四个点组成一凸四边形 $ABCD$,另一点 E 在 $ABCD$ 内部,如图12.9所示.则 EA, EB, EC, ED 相互间的夹角至少有两个钝角,再加上 $ABCD$ 中的非锐内角,至少也可找到三个非锐角三角形.

ⅲ 若五个点中有三点组成一个 $\triangle ABC$,另两点 D, E 均在 $\triangle ABC$ 内,如图12.10所示.由于 $\angle ADB, \angle BDC, \angle CDA$ 中至少有

两个钝角,所以我们可以找到四个钝角三角形.

综合 i, ii, iii 可得,任意给五个点,其中没有三点共线,一定可以找到至少三个以它们为顶点的非锐角三角形.

下面转入本题的 100 个点,其中每五个点一定可以找到至少三个以它们为顶点的非锐角三角形,由于每个非锐角三角形至多属于 C_{100-3}^2 个五点组,而五点组共有 C_{100}^5 个,所以 100 个点组成的非锐角三角形至少有 $\frac{3\times C_{100}^5}{C_{97}^2}$ 个,它占三角形总数的

$$\frac{3C_{100}^5}{C_{97}^2C_{100}^3}=\frac{3\times\frac{100\times99\times98\times97\times96}{120}}{\frac{97\times96}{2}\times\frac{100\times99\times98}{6}}=\frac{3}{10}$$

因此,锐角三角形不多于三角形总数的 $1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}=70\%$.

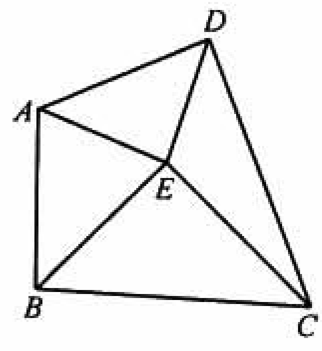


图 12.9

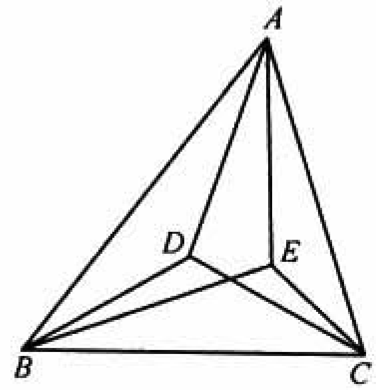


图 12.10



布达佩斯英雄广场

第 13 届国际数学奥林匹克

捷克斯洛伐克,1971

匈牙利命题

1 证明下述命题仅当 $n=3$ 和 $n=5$ 时是正确的,对于其他任何 $n>2$ 的自然数皆不成立.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意实数,则

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0$$

证法 1 用 A_n 表示求证的左式,对于 $n=3$ 我们可得两种证法.

(1) 由于对称性,我们可假定 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$,则

$$\begin{aligned}A_3=&(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+\\&(a_3-a_1)(a_3-a_2)=\\&(a_1-a_2)((a_1-a_3)-(a_2-a_3))+\\&(a_3-a_1)+(a_3-a_2)=\\&(a_1-a_2)^2+(a_3-a_1)(a_3-a_2)\geqslant 0\end{aligned}$$

(2) 也有

$$\begin{aligned}A_3=&(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+\\&(a_3-a_1)(a_3-a_2)=\\&a_1^2-a_1a_3-a_1a_2+a_2^2-a_2a_3+a_3^2=\\&(\frac{1}{2}a_1^2-a_1a_2+\frac{1}{2}a_2^2)+(\frac{1}{2}a_2^2-a_2a_3+\frac{1}{2}a_2^3)+\\&(\frac{1}{2}a_3^2-a_3a_1+\frac{1}{2}a_1^2)=\\&\frac{1}{2}(a_1-a_2)^2+\frac{1}{2}(a_2-a_3)^2+\frac{1}{2}(a_3-a_1)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

要证 $A_5\geqslant 0$,我们可用上面关于证明 $A_3\geqslant 0$ 的方法(1),可假定 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant a_5$.从 A_5 的首二项取出公因子 $a_1-a_2\geqslant 0$,并把和式写成

$$(a_1-a_2)((a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)-(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5))$$

外括号内的差式是非负的,因第一项的每一因子至少比第二项的

对应因子大.

同样地,我们改写 A_5 的后二项的和为

$$(a_4-a_5)((a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)+(a_1-a_5)(a_2-a_5)(a_3-a_5))=(a_4-a_5)((a_1-a_5)(a_2-a_5)(a_3-a_5)-(a_1-a_4)(a_2-a_4)(a_3-a_4))$$

可见这个式子是非负的.

至于 A_5 的第三项

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)$$

它的首二项是非负的,末二项是非正的,因而这项是非负的.

综上就证明了 $A_5\geqslant 0$.

要证明所给的关系式对其他的一切 $n>2$ 的自然数不成立,只要选取 n 个自然数使该不等式不成立就够了.对于 $n=4$,我们可取 $a_1=-1,a_2=a_3=a_4=0$. 对于 $n>5$, 可取 $a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}=0,a_i=1,a_{i+1}=\cdots=a_n=2$,其中 $i(3\leqslant i\leqslant n-2)$ 是使 $n-i$ 为奇数的一个数,这个数显然对于每个大于 5 的数 n 都存在,这样所给的关系式的左边就变为

$$(-1)^{n-i}=-1$$

而得出矛盾.

证法 2 分 n 为偶数和奇数两种情形讨论.

ⅰ 当 $n=2m(m\geqslant 2)$ 时.

取 $a_1=-1,a_2=a_3=\cdots=a_{2m}=0$,则不等式的左边等于 $(-1)^{2m-1}<0$,题设不等式不成立.

ⅱ 当 $n=2m+1(m\geqslant 1)$ 时.

若 $m=1,2$,即 $n=3,5$ 时,由证法 1 知不等式恒成立.

若 $m\geqslant 3$,即 n 为不小于 7 的奇数时,取 $a_1=0,a_2=a_3=a_4=1,a_5=a_6=\cdots=a_{2m+1}=-1$, 则不等式的左边等于 $(-1)^3<0$,题设不等式不成立.

综上所述,题设不等式仅当 $n=3$ 和 $n=5$ 时恒成立.

2 设 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 是凸多面体 P_1 的九个顶点,P_i 是由 P_1 平移而得的多面体,即移动 $A_1\to A_i(i=2,3,\cdots,9)$. 求证:在 $P_1,P_2,\cdots,P_9$ 中至少有两个多面体有一公共内点.

苏联命题

证法 1 以 A_1 作为三维坐标系的原点,并以 A_i 表示向量 $\overrightarrow{A_1A_i}$. 把这些向量扩展成二倍;即以 $2A_i$ 替换A_i,就得到另一个多面体 D,它包含 P_1 在其内部.

现在我们证明经平移后所得的每一个 $P_i(i = 2,3,\cdots,9)$ 也都包含在 D 的内部.

设 X_i 是自 A_1 至 P_i 上任一点 X_i 的向量, X_1 是 P_1 上对应点 X_1 的向量,则

$$X_i = A_i + X_1 = 2(\frac{1}{2}A_j + \frac{1}{2}X_1)$$

因 A_i 和 X_1 是 P_1 上的点,且由 P_1 是凸的假设,线段 A_iX_1 的中点 $\frac{1}{2}(A_i + X_1)$ 也落在 P_1 内.这就证明了 X_i 是 D 内的点.

今 D 的体积是 P_1 体积的 8 倍,而多面体 $P_1,P_2,\cdots,P_9$ 的体积和则是 P_1 体积的 9 倍.所以至少有两个多面体有一公共内点.

证法 2 设在以 A_1 为相似中心,相似比为 2 的位似变换下多面体 P_1 变换成多面体 P'.

首先证明 $P_i \subset P'(i = 1,2,\cdots,9)$.

设 X 是多面体 $P_i(2 \leqslant i \leqslant 9)$ 的任意一点,并且 X 在平移 $A_i \to A_1$ 下的象是 Y.于是线段 A_1X 和线段 A_iY 的中点重合,记为 Z,如图 13.1 所示.易知, $Y \in P_1, A_i \in P_1$,由于 P_1 是凸多面体,故 $Z \in P_1$.另一方面,在上述位似变换下, Z 的象是 X,因而 $X \in P'$.这就证明了 $P_i \subset P'(i = 2,3,\cdots,9)$,而 $P_1 \subset P'$ 是显然的.

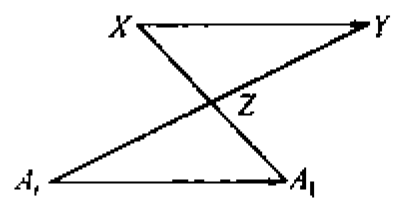


图 13.1

将多面体 P_i 和 P' 的体积分别记为 $\overline{P}_i(i = 1,2,\cdots,9)$ 和 $\overline{P'}$.于是有

$$\overline{P}_1 = \overline{P}_2 = \cdots = \overline{P}_9$$

并且
$$\overline{P'} = 2^3\overline{P}_1 = 8\overline{P}_1$$

如果多面体 $P_1,P_2,\cdots,P_9$ 任何两个都没有公共内点,那么,一方面由 $P_i \subset P'(i = 1,2,\cdots,9)$ 可知,诸 P_i 的体积之和应不大于 P' 的体积,即

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \cdots + \overline{P}_9 = 9\overline{P}_1 \leqslant \overline{P'}$$

另一方面,又有 $\overline{P'} = 8\overline{P}_1$.这就得出了矛盾.因此, $P_1,P_2,\cdots,P_9$ 中至少有两个多面体有公共的内点.

> **3** 证明序列 $\{2^k - 3\}(k = 2,3,\cdots)$ 至少含有一个无穷子序列,其元素两两互素.

波兰命题

证法 1 我们将实际作出一个无穷序列 $\{a_i\}$, $a_i = 2^{k_i} - 3$, $i = 1,2,\cdots$,使序列中的数两两互素,这序列显然是 $\{2^k - 3\}$ 的子序列.

假定我们已作出 n 个两两互素的数列

$$a_1 = 2^{k_1} - 3, a_2 = 2^{k_2} - 3, \cdots, a_n = 2^{k_n} - 3 \quad ①$$

则这 n 个数的积

$$S = \prod_{i=1}^{n} a_i = (2^{k_1} - 3)(2^{k_2} - 3)\cdots(2^{k_n} - 3) \quad ②$$

是奇数，因为每一个因子都是奇数（例如当 $n = 2$ 时，$a_1 = 2^3 - 3 = 5$ 和 $a_2 = 2^4 - 3 = 13$ 就是这样的一个数列，这里 $k_1 = 3, k_2 = 4$，这两数的积则为 $S = 5 \times 13 = 65$）.

考虑一组 $s + 1$ 个数 $2^0, 2^1, \cdots, 2^s$，因为对于模 s，任一整数的最小剩余只能是 $0, 1, 2, \cdots, s - 1$ 这 s 个数中的一个数，故这组 $s + 1$ 个数中，至少有二数对于模 s 同余. 设 2^α 与 $2^\beta(\alpha > \beta)$ 对于模 s 同余，即

$$2^\alpha \equiv 2^\beta (\bmod s)$$

则
$$2^\beta(2^{\alpha-\beta} - 1) = ms, m \in \mathbf{Z}$$

因奇数 s 不能除尽 2^β，故

$$2^{\alpha-\beta} - 1 = ls, l \in \mathbf{Z}$$

这样，$2^{\alpha-\beta} - 3 = l_{s-2}$ 就必和 S 互素. 令 $a_{n+1} = 2^{\alpha-\beta} - 3$. 就得到数列 ① 中的另一项. 继续用同样的方法就可以作出一个无穷序列 $\{a_i\}$，其中的数两两互素.

证法 2 我们假定下述欧拉定理是已知的：对每个整数 $n > 1$ 和一切与 n 互素的正整数 a，存在一个正整数 $\varphi(n)$，使

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(\bmod n)$$

利用欧拉函数 $\varphi(n)$，我们将所求的子数列 $\{2^{n_i} - 3\}$ 归纳定义于下.

ⅰ $n_0 = 3, n_1 = \varphi(2^{n_0} - 3) = \varphi(5) = 4$；

ⅱ $n_{k+1} = \varphi(2^{n_0} - 3)\varphi(2^{n_1} - 3)\cdots\varphi(2^{n_k} - 3) = n_k\varphi(2^{n_k} - 3), k \geqslant 1$.

首先证明

$$(2^{n_{k+1}} - 3, 2^{n_i} - 3) = 1, i = 0, 1, \cdots, k$$

根据欧拉定理，有

$$2^{\varphi(2^{n_i}-3)} \equiv 1(\bmod 2^{n_i} - 3), 0 \leqslant i \leqslant k$$

将上式两端分别乘方可得

$$2^{n_{k+1}} \equiv 1(\bmod 2^{n_i} - 3)$$

两端同加 -3 得

$$2^{n_{k+1}} - 3 \equiv -2(\bmod 2^{n_i} - 3)$$

设 t 为 $2^{n_{k+1}} - 3$ 和 $2^{n_i} - 3$ 的公因数. 则因

$$2^{n_{k+1}} - 3 = -2 + m(2^{n_i} - 3)$$

即
$$-2 = 2^{n_{k+1}} - 3 - m(2^{n_i} - 3)$$

故知 t 是2的因数.因此 $t=1$ 或 $t=2$.但是2不是 $2^{n_i}-3$ 的因数.所以必有 $t=1$,也就是说 $(2^{n_{k+1}}-3,2^{n_i}-3)=1$.

其次,证明数列 $\{2^{n_i}-3\}$ 是无穷数列.因为 $n_0=3,n_1=4$,并且当 $k\geqslant 1$ 时,$\varphi(2^{n_k}-3)>1$,所以

$$n_{k+1}=n_k\varphi(2^{n_k}-3)>n_k,k\geqslant 1$$

即 $\{2^{n_i}-3\}$ 是无穷数列.证毕.

4 四面体 $ABCD$ 的各面皆是锐角三角形,如图13.2所示.考虑所有如下的封闭折线 $XYZTX$:X,Y,Z,T 分别是 AB,BC,CD,DA 的内点.证明:

(1)若 $\angle DAB+\angle BCD\neq\angle CDA+\angle ABC$,则这些折线中没有最短的折线;

(2)若 $\angle DAB+\angle BCD=\angle CDA+\angle ABC$,则有无穷多条最短的折线,它们的共同长度是 $2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$,其中 $\alpha=\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB$.

荷兰命题

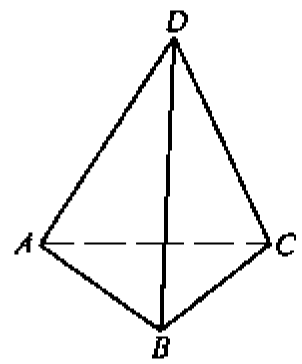


图13.2

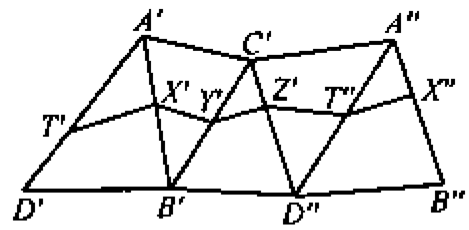


图13.3

证法1 如图13.3所示,设 A',D',B',A'',D'',B'',C' 是给定四面体的一个网,且侧面 $\triangle ADB\cong\triangle A''D''B''$.这两个三角形是在网的两旁的.所含的折线 $XYZTX$ 在网里就是折线 $T'X'Y'Z'T''$ 或 $X'Y'Z'T''X''$.要使所含的折线 $XYZTX$ 有最小长度,必须有下面的关系.

ⅰ $X'\in T'Y',Y'\in X'Z',Z'\in Y'T'',T''\in Z'X''$;

ⅱ $A'D'\ /\!/\ A''D''$.

在相反的情形下,可以缩短折线 $T'X'Y'Z'T''$.例如,对于 $T'X'Y'$,则点 X' 可用线段 $T'Y'$ 与 $A'B'$ 的交点代替.这里所说的交点是存在的.因为网的各部是锐角三角形,因而 $A'D'B'C'$ 是凸四边形.如ⅰ满足,则 T',X',Y',Z',T'',X'' 在一直线上.由于 $\triangle A'T'X'\cong\triangle A''T''X''$,故有

$$\angle A'T'X'=\angle A''T''X''$$

因而由同位角定理的逆定理,可知ⅱ成立.

在情形ⅱ中若对于每条折线 $T'X'Y'Z'T''$ 有 $A'T'=T''A''$,则有不等式

$$T'X'+X'Y'+Y'Z'+Z'T''\geqslant T'T''=$$
$$A'A''=2A'C'\cdot\sin\frac{1}{2}\angle A'C'A''=2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

现在证明条件ⅱ还是存在着最短的折线 $T'X'Y'Z'T''$ 的充分条件.

为此,我们只要证明存在点 $T'\in A'D',T''\in A''D''$,且有 $A'T'=A''T''$ 使得 $T'T''$ 交线段 $A'B',B'C',C'D''$ 于内点 X',Y',Z'.

在这一情形下，折线的长度取最小值 $2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$，且把折线 $T'T''$ 沿 $A'D'$ 方向平移（使得 T',X',Y',Z',T'' 保持是网的各棱的内点）. 就得到无穷多条最短的折线. 由于四边形 $A'D'B'C'$ 与 $A''C'B'D''$ 的各内角均小于 $180°$，故它们都是凸四边形. 由此得：若 $T'T''$ 交线段 $B'C'$ 于内点，则交点 X' 或 Z' 也在 $A'B'$ 或 $C'D''$ 的内部. 因为 T' 可在 $A'D'$ 上变化，所以只要有一点 $Y'\in B'C'$ 落在平行四边形 $A'D'D''A''$ 的内部就行了. 这样的一个点就是凸四边形 $A'B'D''C'$ 的对角线的交点.

这样，我们一方面证明了条件 ii 对于存在一条最短折线来说是必要的，另一方面也证明了条件 ii 对于存在长为 $2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ 的无限多条最短折线来说也是充分的.

最后，要证明条件 ii 等价于

$$\angle DAB+\angle BCD=\angle ABC+\angle CDA \quad ①$$

于是本题(1) 和(2) 就都解决了.

直线 $D'A',B'A',B'C',D''C',D''A''$ 可以与直线 $T'T''$ 相交，直线 $T'T''$ 可以依正方向旋转一个角 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 后，变到直线 $D'A',B'A',B'C',D''C',D''A''$.

所以，由三角形外角定理，有

$$\angle DAB=\beta_2-\beta_1,\angle ABC=\beta_2-\beta_3$$

$$\angle BCD=\beta_4-\beta_3,\angle CDA=\beta_4-\beta_5$$

因而，式 ① 变为等式 $\beta_1=\beta_5$. 由同位角定理及其逆定理可知，这与条件 ii 等价.

证法 2 如图 13.4 所示，将四面体 $ABCD$ 展开，A',A'' 是 A 的对应点，等等. 其中，$\triangle A'D'B'\cong\triangle A''D''B''$. 多边形 $xyzTx$ 在展开图中变成折线 $T'x'y'z'T''$ 或 $x'y'z'T''x''$.

若折线 $T'x'y'z'T''(x'y'z'T''x'')$ 有最小长度，那么

$$x'\in T'y',y'\in x'z',z'\in y'T'',T''\in z'x'' \quad ②$$

在相反的情况下，我们可以缩短折线 $T'x'y'z'T''(x'y'z'T''x'')$ 的长. 例如，当 $x'\notin T'y'$ 时，点 x' 可用线段 $T'y$ 和 $A'B'$ 的交点来代替（因各面都是锐角三角形，那么 $A'D'B'C'$ 是凸四边形，所以交点是存在的），此时所得折线的长将小于 $T'x'y'z'T''$ 的长.

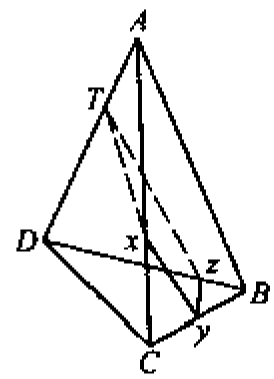
由 ② 成立，可推知 T',x',y',z',T'',x'' 在一直线上.

再由 $\triangle A'T'x'\cong\triangle A''T''x''$，$\angle A'T'x'=\angle A''T''x''$，又可推得

$$A'D'\parallel A''D'' \quad ③$$

这就是说，③ 是存在最短折线 $T'x'y'z'T''$ 的必要条件.

下面我们将进一步证明：③ 同时也是存在无限多个长度为



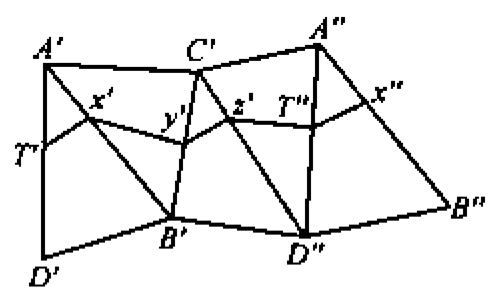


图 13.4

$2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ 的最短折线 $T'x'y'z'T''$ 的充分条件.

事实上,若 ③ 成立,再注意到 $A'T' = A''T''$,可得

$$T'x' + x'y' + y'z' + z'T'' \geqslant T'T'' = A'A'' =$$
$$2A'C'\cdot\cos\angle C'A'A'' =$$
$$2A'C'\cdot\cos\frac{1}{2}(180^\circ - \angle B'A'C' - \angle C'A''D'' - \angle D'A'B') =$$
$$2AC\cdot\sin\frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB) =$$
$$2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

而分别与 $A'B'$,$B'C'$,$C'D''$ 交于内点 x',y',z' 的线段 $T'T''$ 是存在的.这是由于只要 $T'T''$ 交线段 $B'C'$ 于某内点 y' 时,那么由于 $A'D'B'C'$ 和 $A''C'B'D''$ 都是凸四边形,因而也必将分别交 $A'B'$ 和 $C'D''$ 于内点 x' 和 z'.而 $B'C'$ 上这样的内点 y' 是存在的,如凸四边形 $A'B'D''C'$ 的对角线的交点即是(该交点在平行四边形 $A'D'D''A''$ 的对角线 $A'D''$ 上,故可作出 $T'T''$ 通过它).

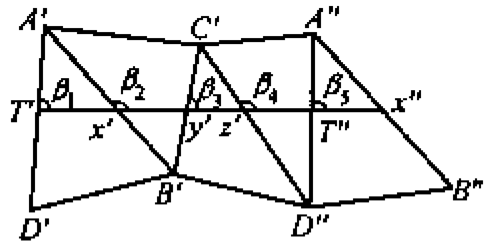


图 13.5

当我们沿 $A'D'$ 平行推移这样的线段 $T'T''$,不管推移的距离多么小,都可得到无限多的最短折线,其长度都为 $2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

最后,我们尚需证明 ③ 与下面的等式等价,即

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA \qquad ④$$

为此,设 $D'A'$,$B'A'$,$B'C'$,$D''C'$,$D''A''$ 顺时针旋转到 $T'T''$ 方向的角度分别为 β_1,β_2,β_3,β_4,β_5,如图 13.5 所示,则

$$\angle DAB = \beta_2 - \beta_1, \angle ABC = \beta_2 - \beta_3$$
$$\angle BCD = \beta_4 - \beta_3, \angle CDA = \beta_4 - \beta_5$$

若等式 ④ 成立,由上面一系列等式,可得

$$\beta_1 = \beta_5, A'D' /\!/ A''D''$$

反之由 $A'D' /\!/ A''D''$,可得 $\beta_1 = \beta_5$,又可推出等式 ④.

故等式 ④ 与 ③ 等价.至此,我们完全证明了题中的论断.

保加利亚命题

5 证明:对于每一个自然数 m,在平面上存在着一个有限的非空点集 S,具有如下的性质:对于 S 中的任一点 A,在 S 中恰好有 m 个点,它们和 A 的距离皆为 1.

证法 1 设 $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{u}_m$ 是平面上的 m 个单位向量,作出 2^m 个向量

$$\boldsymbol{V} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m \qquad ①$$

其中,每一系数 c_i 只可取 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ 二值之一.如果我们适当地选取 $\boldsymbol{u}_i$,则这 2^m 个向量就组成适合题述性质的点集 S.

现在,定义 m 个形如 ① 的向量为

$$V_i = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_{i-1}u_{i-1} - c_iu_i + c_{i+1}u_{i+1} + \cdots + c_mu_m \quad ②$$

这些向量和 V 的差异只是 u_i 的系数符号不同.因 $c_i = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$,故

$$V - V_i = u_i$$

从而

$$|V - V_i| = 1$$

即 V 和每一个 V_i,它们终点的距离为 1.

如果 V 固定了,我们需要证明

(1) 在 ② 中定义的 m 个向量是互异的;

(2) 在 S 中不能找到另一点,其相应向量 W 也满足 $|V - W| = 1$.

条件(1) 相当于 $V_i - V_j \neq 0, i \neq j$.自 ② 有

$$V_i - V_j = -2c_iu_i + 2c_ju_j$$

故只有当 $-c_iu_i + c_ju_j = 0$ 或 u_i, u_j 共线时,$u_i - u_j$ 才会等于 0.为了避免这种情形,我们所选取的单位向量要适合如下的条件,即

$$u_1, u_2, \cdots, u_m \quad ③$$

这 m 个向量两两不共线(适合上面条件的 u_i 可以归纳地选取,例如已取 $u_1, u_2, \cdots, u_k$,其中两两不共线,则可取 u_{k+1} 使其异于 $\pm u_1, \pm u_2, \cdots, \pm u_k$ 这 $2k$ 个向量中的任一个).

条件(2) 相当于 $|W - V| \neq 1$,其中 W 是任意的,不是由 ② 所定义的向量,但它的终点属于 S.因 V 和任一个 V_i 在表示式中只有一个相异的系数,所以 W 和 V 在表示式中至少要有两个相异的系数.于是这条件可写成

$$|W - V| = \left|\sum_{k=1}^{m} d_ku_k\right| \neq 1, d_k \in \{-1, 0, 1\} \quad ④$$

其中,至少有两个 d_k 不等于 0.

现在我们用归纳法说明怎样选取 m 个单位向量使满足 ③ 和 ④.

若 $m = 2$,我们任取一个单位向量 u_1,然后另取一个单位向量 u_2,使适合如下的限制.

(1) u_1 和 u_2 不共线;

(2) u_2 的终点,异于以 u_1, $-u_1$ 的终点为圆心的两个单位圆与以原点为圆心的单位圆的四个交点.

这样所取的 u_1 和 u_2 显然满足 ③ 和 ④.

设满足 ③ 和 ④ 的 $u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}$ 已选出.如果可以选出 u_m 使其异于任一个向量 $\sum_{i=1}^{m-1} d_iu_i, d_i \in \{-1, 0, 1\}$,则 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 满

足③.今由归纳假设

$$S=\sum_{i=j}^{m-1}d_iu_i\neq 0$$

如果向量 $S+u_m$ 的终点是以 S 的终点为圆心的单位圆和以原点为圆心的单位圆的交点之一,则 $|S-u_m|=1$.对于每个 S,我们可以适当地选取 u_m 使 $S+u_m$ 的终点不是上述两交点的任一点.同样避免使 $|S-u_m|=1$.由于终点在以原点为圆心的单位圆上的向量有无穷多个,而受到条件③和④所限制的 u_m 则是有限的,所以满足③和④的 u_m 必可选得.

证法2 我们将对给定的自然数 m 作出一个由 2^m 个点组成的集合 S.

为此,首先在平面上考虑具有以下两条性质的矢量集合 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$.

(1) $|u_i|=\frac{1}{2}(i=1,2,\cdots,m)$;

(2) 当 $c_i\in\{-1,0,1\}$ 并且至少有两个 c_i 不为0时 $(1\leqslant i\leqslant m)$

$$|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m|$$

既不等于0,又不等于$\frac{1}{2}$.其中 $|u|$ 表示矢量 u 的长度.

上述的矢量集合可以用递归定义给出.

首先考虑由下式确定的矢量

$$u_i=\left(x_i,\sqrt{\frac{1}{4}-x_i^2}\right),0\leqslant x_i\leqslant\frac{1}{2}$$

显然,这种矢量满足性质(1).

下面验证这种矢量是否满足性质(2).

设 $u_1=\left(x_1,\sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2}\right)$ 中的 x_1 已选定,并且 $0\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{2}$.

我们证明,在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 中一定存在这样的 x_2,使得 $u_2=\left(x_2,\sqrt{\frac{1}{4}-x_2^2}\right)$ 时,$|c_1u_1+c_2u_2|$(其中,$c_i\in\{-1,1\},i=1,2$)既不等于0,又不等于$\frac{1}{2}$.事实上,由于

$$|c_1u_1+c_2u_2|^2=(c_1x_1+c_2x_2)^2+\left(c_1\sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2}+c_2\sqrt{\frac{1}{4}-x_2^2}\right)^2$$

中 x_1 已给定,c_1,c_2 只能取 -1 或 $+1$,因而只有有限个 x_2,使得

$$|c_1u_1+c_2u_2|=0$$

或
$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|=\frac{1}{2}$$
因此可以断定必存在一矢量
$$\boldsymbol{u}_2=\left(x_2,\sqrt{\frac{1}{4}-x_2^2}\right),0\leqslant x_2\leqslant\frac{1}{2}$$
使得 $|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|$ 既不等于 0,又不等于$\frac{1}{2}$.

今设矢量 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 已经给定,并且满足性质(1) 和性质(2),我们说明,必存在一矢量
$$\boldsymbol{u}_{m+1}=\left(x_{m+1},\sqrt{\frac{1}{4}-x_{m+1}^2}\right),0\leqslant x_{m+1}\leqslant\frac{1}{2}$$
使得当 $c_i\in\{-1,0,1\}$,并且至少有两个 c_i 不为 0 时($1\leqslant i\leqslant m+1$)
$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m+c_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}|$$
既不等于 0,又不等于$\frac{1}{2}$.
$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m|$$
既不等于 0,又不等于$\frac{1}{2}$.其中,$|\boldsymbol{u}|$ 表示矢量 $\boldsymbol{u}$ 的长度.

上述矢量集合可以用归纳定义来作出.

首先,考虑由下式确定的矢量,即
$$\boldsymbol{u}_i=\left(\delta_i,\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_i^2}\right),0\leqslant\delta_i\leqslant\frac{1}{2}$$
显然,这种矢量满足性质(1).

设 $\boldsymbol{u}_1=\left(\delta_1,\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_1^2}\right)$ 中的 δ_1 已选定,并且 $0\leqslant\delta_1\leqslant\frac{1}{2}$.现在来说明,在区间 $0\leqslant\delta_2\leqslant\frac{1}{2}$ 内一定存在这样的 δ_2,使得当取 $\boldsymbol{u}_2=\left(\delta_2,\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_2^2}\right)$ 时,$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|$(其中,$c_i\in\{-1,1\}$,$i=1,2$)既不等于 0,又不等于$\frac{1}{2}$.事实上,由于
$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|^2=(c_1\delta_1+c_2\delta_2)^2+\left(c_1\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_1^2}+c_2\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_2^2}\right)^2$$
中 δ_1 已给定,c_1,c_2 只能取 -1 或 1,因而只有有限个 δ_2,使得
$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|=0$$
或
$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|=\frac{1}{2}$$
因此可以断定必存在一矢量
$$\boldsymbol{u}_2=\left(\delta_2,\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_2^2}\right),0\leqslant\delta_2\leqslant\frac{1}{2}$$

使得 $|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|$ 既不等于 0,又不等于$\frac{1}{2}$.

今设矢量 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 已经给定,并且满足性质(1) 和性质(2).我们来说明,必存在一矢量

$$\boldsymbol{u}_{m+1}=\left(\delta_{m+1},\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_{m+1}^2}\right),0\leqslant\delta_{m+1}\leqslant\frac{1}{2}$$

使得当 $c_i\in\{-1,0,1\}$,并且至少有两个 c_i 不为零时($1\leqslant i\leqslant m+1$)

$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m+c_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}|$$

既不等于 0,又不等于$\frac{1}{2}$.

因为 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 都是给定的矢量,并且 $c_i\in\{-1,0,1\}$,所以在区间 $0\leqslant\delta_{m+1}\leqslant\frac{1}{2}$ 内只有有限个 δ_{m+1} 使得

$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m+c_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}|=0$$

或 $$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m+c_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}|=\frac{1}{2}$$

由此可知,必存在满足性质(1) 和(2) 的矢量 $\boldsymbol{u}_{m+1}$.这样便给出了上面所述的矢量集合.

其次,设点 M_0 为平面上的任意一个固定点,该点的矢径为 $\boldsymbol{r}_0$,又设集合 S 由下述 2^m 个点组成,这些点的矢径为

$$\boldsymbol{r}_0+\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{u}_m,\alpha_i\in\{-1,1\},i=1,2,\cdots,m$$

于是,S 中的每一个点 A,对应一个 m 元有序数组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

进而来讨论集合 S 中的点 N 与点 A 间的距离.设点 N 的矢径为

$$\boldsymbol{r}_0+\beta_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\beta_m\boldsymbol{u}_m$$

下面分两种情况来讨论.

ⅰ 当 m 元数组$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$和$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$有两个或两个以上坐标不同时,则点 N 到点 A 的距离为

$$|(\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{u}_1+(\alpha_2-\beta_2)\boldsymbol{u}_2+\cdots+(\alpha_m-\beta_m)\boldsymbol{u}_m|=$$
$$2|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m|$$

其中,$c_i\in\{-1,0,1\}$,并且至少有两个不为零,故由性质(2) 可知,此时点 N 到点 A 的距离既不等于 0,又不等于 1.

ⅱ 当 m 元数组$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$和$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$仅有一个坐标不同时,则由性质(1) 和(2) 可知,点 N 到点 A 的距离为

$$|(\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{u}_1+(\alpha_2-\beta_2)\boldsymbol{u}_2+\cdots+(\alpha_m-\beta_m)\boldsymbol{u}_m|=$$
$$2|\boldsymbol{u}_i|=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

又易知这样的 m 元数组$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 仅有 m 个,从而矢径为 $\boldsymbol{r}_0+\beta_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\beta_m\boldsymbol{u}_m$ 的点 N 也仅有 m 个.

这样就证明了，在 S 中有且仅有 m 个点到点 A 的距离为 1.

6 设 $A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是以非负整数为元素的正方矩阵，又设对于任何一个 $a_{ij}=0$，其第 i 行与第 j 列诸元素的和大于等于 n. 求证：这正方矩阵的所有元素之和大于等于 $\frac{n^2}{2}$.

瑞典命题

证法1 以 R_i 与 C_j 分别表示正方矩阵 $A=(a_{ij})$ 中第 i 行与第 j 列诸元素之和，即

$$R_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij},i=1,2,\cdots,n$$

$$C_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij},j=1,2,\cdots,n$$

设 p 表示所有这些 R_i 与 C_j 的最小者，即

$$p=\min_{i,j}\{R_i,C_j\}$$

ⅰ 设 $p\geqslant\frac{n}{2}$，则正方矩阵中所有元素的和 S 至少是 $np\geqslant n\left(\frac{n}{2}\right)$，故 $S\geqslant n^2/2$，其论断是真的.

ⅱ 设 $p<\frac{n}{2}$. 如果必要的话，我们把行与列交换并重新排列诸行使第一行诸元素的和为 p，又如必要的话，我们重新排列诸列使第一行首 q 个元素均非零而其余 $n-q$ 个元素均为零. 在而后以零为首元素的 $n-q$ 列中，每一列诸元素的和加上第一行诸元素的和 p，根据假设它大于等于 n. 故每列诸元素的和大于等于 $n-p$. 由此可知，$n-q$ 列所有元素的和大于等于 $(n-p)(n-q)$. 又首 q 列各元素的和至少是 pq. 所以正方矩阵 A 所有元素的和满足

$$S\geqslant(n-p)(n-q)+pq=n^2-np-nq+2pq=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}(n-2p)(n-2q)$$

今从假设 $p<n/2$，得 $n-2p>0$. 又第一行中元素为正整数的个数不会多于 $n/2$，否则它们的和将会大于等于 $n/2$，与假设矛盾，这就是说 $q\leqslant n/2$，或 $n-2q\geqslant0$，于是得 $S\geqslant n^2/2$.

证法2 首先，同证法1一样，仍用 p 记所有行与列的元素和中最小的值，且不失一般性，设第一行的和为 p，且第一行恰有最前面的 q 个元素异于零.

如果 A 中所有元素的和

$$S < \frac{1}{2}n^2 = n \cdot \frac{n}{2}$$

那么必有 $p < \frac{n}{2}$. 由此, $q \leqslant p < \frac{n}{2}$.

但前面 q 列的所有元素的和至少是 pq, 故后面 $n - q$ 列的所有元素的和应小于 $\frac{1}{2}n^2 - pq$. 于是, 后面 $n - q$ 列元素中, 至少有一列(不妨设是 $q + k$ 列, $1 \leqslant k \leqslant n - q$) 的元素之和

$$a_{1,q+k} + a_{2,q+k} + \cdots + a_{n,q+k} < \frac{\frac{1}{2}n^2 - pq}{n - q}$$

而由 $p < \frac{n}{2}, q < \frac{n}{2}$ 可得

$$\frac{1}{2}n^2 - pq - (n - q)(n - p) = -\frac{1}{2}n^2 + np + nq - 2pq = -\frac{1}{2}(n - 2p)(n - 2q) < 0$$

所以

$$\frac{\frac{1}{2}n^2 - pq}{n - q} < n - p$$

于是

$$a_{1,q+k} + a_{2,q+k} + \cdots + a_{n,q+k} < n - p$$

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + a_{1,q+k} + a_{2,q+k} + \cdots + a_{n,q+k} < n$$

注意到 $a_{1,q+k} = 0$, 即知上述结果与题设矛盾. 这就是说, $S < \frac{1}{2}n^2$ 是不可能的, 故 $S \geqslant \frac{1}{2}n^2$.



布拉格市中心

第 14 届国际数学奥林匹克

波兰,1972

苏联命题

1 证明:从十进制的十个不同的二位数的集中恒可选出两个无共同元素的子集,使两子集中各数的和相等.

证明 设 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 为含 n 个元素的集,S 的子集的个数(包含空集与 S 本身)为 2^n. 设 T 为 S 的一子集,则对每一个 i 或 $a_i \in T$ 或 $a_i \notin T$. 故 T 的可能数为 $2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^n$. 特别地,含有十个数的已知集 S,其子集的个数是 $2^{10} = 1\ 024$.

S 中的各数均小于等于 99. 因此,S 的任何子集的各数的和小于等于 $10 \cdot 99 = 990$(事实上,因 S 有相异的元素,故最大的可能的和仅为 $99 + 98 + 97 + 96 + 95 + 94 + 93 + 92 + 91 + 90 = 945$). 故所有可能的和比其子集的数少,由抽屉原则得至少有两个相异子集,设为 S_1 与 S_2,必有同和. 若 S_1 与 S_2 是不相交的,则本题已解. 否则,从 S_1 与 S_2 中除去它们所有共同元素,得到 S 的不相交子集 S'_1 与 S'_2. 于是 S'_1 中各数的和仍等于 S'_2 中各数的和.

荷兰命题

2 证明:每一个有外接圆的四边形总可以分解为 $n(n \geq 4)$ 个都有外接圆的四边形.

证法 1 设四边形 $ABCD$ 为一圆内接四边形,且 $\angle A$ 为其最小的角.(若有数个最小的角,四边形 $ABCD$ 为一等腰梯形,且分成 n 个内接四边形仅由 $n-1$ 条线段平行于底而成). 如图 14.1 所示,设 P 为四边形内部的一点,引 $PE /\!/ AB$, $PF /\!/ AD$. 若 P 很靠近 A,则 E 将在 B 与 C 中间,而 F 在 C 与 D 之间. 又引 PG,使 $\angle PGD = \angle D$,引 PH,使 $\angle PHB = \angle B$. 既然 $\angle B > \angle A$,当 P 很靠近 A 时,H 将在 A 与 B 之间. 同理 G 将在 A 与 D 之间.

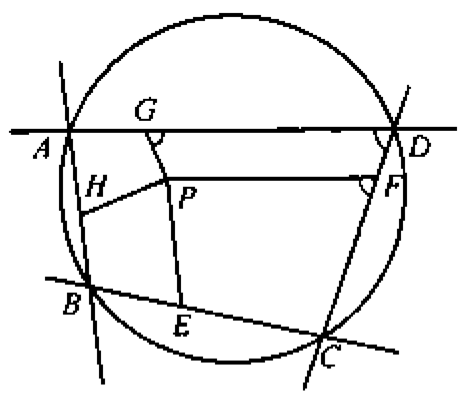


图 14.1

四边形 $PECF$ 可内接于圆,因它与四边形 $ABCD$ 有等角. 四边形 $AHPG$ 可内接于圆,因

$$\angle AHP + \angle AGP = (180° - \angle B) + (180° - \angle D) = 180°$$

所以四边形 $PHBE$ 与四边形 $PFDG$ 均为等腰梯形,故可内接于圆. 我们已把四边形 $ABCD$ 分成四个内接四边形. 如欲再细分之,只须

在一等腰梯形内引一些线平行其底即可.

证法 2 设四边形 $ABCD$ 有外接圆,如图 14.2 所示.

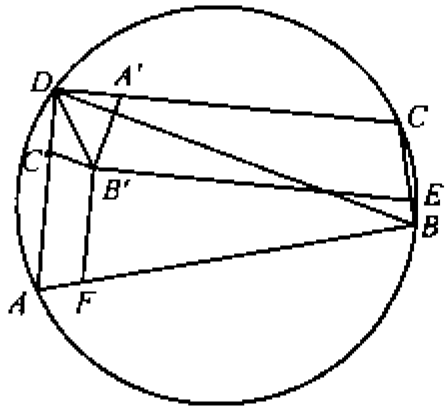


图 14.2

当 $n = 4$ 时,我们分别在线段 DC 内取一点 A',线段 AD 内取一点 C',作四边形 $A'B'C'D$,使点 B' 在 $\triangle ACD$ 内部,并且使

$$\angle DA'B' = \angle DAB, \angle DC'B' = \angle DCB$$

于是,四边形 $A'B'C'D$ 与四边形 $ABCD$ 的内角分别对应相等.由于点 B' 可以取得与点 D 充分靠近,因此,总可以过点 B' 作 DC 边的平行线交 BC 边于 E,过点 B' 作 DA 边的平行线交 AB 边于 F.于是四边形 $A'B'C'D$,$B'ECA'$,$FBEB'$ 和 $AFB'C'$ 就是所求的四个四边形.因为,由四边形 $A'B'C'D$ 和 $FBEB'$ 的内角分别与四边形 $ABCD$ 的内角对应相等可知,这两个四边形有外接圆;又由

$$\angle CA'B' = 180° - \angle DA'B' = 180° - \angle DAB = \angle BCD$$

和 $$\angle AC'B' = 180° - \angle DC'B' = 180° - \angle BCD = \angle DAB$$

可知,梯形 $B'ECA'$ 和梯形 $AFB'C'$ 都是等腰梯形,因而这两个四边形也有外接圆.

当 $n \geqslant 5$ 时,应用上述的结果,可以得出一般性的简单解法:将两个等腰梯形中的一个,用平行于底边的平行线分成 $n-3$ 个小的等腰梯形,每个小梯形都有外接圆,于是就将原来的四边形分成了 n 个四边形,并且每个四边形都有外接圆.

英国命题

3 设 m 与 n 为任意的非负整数,证明

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

为一整数.(假定 $0! = 1$)

证法 1 要证明所给的式子是一整数,我们可证明分母

$$D = m!n!(m+n)!$$

可除尽分子 $$N = (2m)!(2n)!$$

设素数 p 能除尽 D 者其最高次项为 p^a,而 p 能除尽 N 者其最高次项为 p^b,则对于每一素数 p,若 $a \leqslant b$,则 D 能除尽 N.

根据初等数论,$k!$ 中素数 p 的最高次乘幂是

$$a = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{k}{p_j}\right]$$

其中,$[x]$ 是 x 的整数部分.

设在 D 与 N 的分解因子中,素数 p 各出现 a 次与 b 次,则

$$a = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p_j}\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p_j}\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{m+n}{p_j}\right] =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{p_j}\right]+\left[\frac{n}{p_j}\right]+\left[\frac{m+n}{p_j}\right]\right) \quad ①$$

与

$$b=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{2m}{p_j}\right]+\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p_j}\right]=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2m}{p_j}\right]+\left[\frac{2n}{p_j}\right]\right) \quad ②$$

要证 $a \leqslant b$，只要指出式 ① 的每一项均小于或等于式 ② 的对应项，即

$$\left[\frac{m}{p_j}\right]+\left[\frac{n}{p_j}\right]+\left[\frac{m+n}{p_j}\right] \leqslant \left[\frac{2m}{p_j}\right]+\left[\frac{2n}{p_j}\right] \quad ③$$

我们将证明不等式

$$[r]+[s]+[r+s] \leqslant [2r]+[2s] \quad ④$$

对于任一非负实数 r 与 s 皆成立，然后令 $r=m/p^j$，$s=n/p^j$ 而导出 ③. 为此，我们只要证明 ④ 在 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 与 $0 \leqslant s < 1$ 时成立即可，因为若 r 或 s 增加 1，④ 的两边均增加 2.

当 $0 \leqslant r < 1$ 与 $0 \leqslant s < 1$ 时，便得 $[r]=[s]=0$，因此，我们证明 $[r+s] \leqslant [2r]+[2s]$ 在这范围内成立. 当 $r+s<1$ 时，这是明显的. 若 $r+s \geqslant 1$，则 $r \geqslant \frac{1}{2}$ 或 $s \geqslant \frac{1}{2}$. 在这种情形下，$[r+s]=1$，而 $[2r]+[2s] \geqslant 1$.

证法 2 设

$$f(m,n)=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

首先，证明当 $n \neq 0$ 时

$$f(m,n)=4f(m,n-1)-f(m+1,n-1) \quad ⑤$$

事实上

$$4f(m,n-1)-f(m+1,n-1)=$$

$$\frac{4(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)!}-\frac{(2m+2)!(2n-2)!}{(m+1)!(n-1)!(m+n)!}=$$

$$\frac{(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)!}\left(4-\frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)(m+n)}\right)=$$

$$\frac{(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)}\cdot\frac{4n-2}{m+n}=$$

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}=f(m,n)$$

其次，证明

$$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}C_kf(m+k,0) \quad ⑥$$

其中，C_k 是确定的整数.

对 n 用数学归纳法. 当 $n=0$ 时，$f(m,0)=f(m+0,0)$，当 $n=1$ 时，由 ⑤ 可知

$$f(m,1)=4f(m,0)+(-1)f(m+1,0)$$

故命题对 $n=0,n=1$ 为真;设命题对 $n-1$ 为真,于是由⑤可知

$$f(m,n)=4f(m,n-1)-f(m+1,n-1)=$$

$$4\sum_{k=0}^{n-1}C_kf(m+k,0)-\sum_{k=0}^{n-1}C_kf(m+1+k,0)=$$

$$4C_0f(m,0)+4\sum_{k=1}^{n-1}C_kf(m+k,0)-$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}C_{k-1}f(m+k,0)-C_{n-1}f(m+n,0)=$$

$$4C_0f(m,0)+\sum_{k=1}^{n-1}(4C_k-C_{k-1})f(m+k,0)-$$

$$C_{n-1}f(m+n,0)$$

令

$$4C_0=C'_0$$

$$4C_k-C_{k-1}=C'_k,1\leqslant k\leqslant n-1$$

$$-C_{n-1}=C'_n$$

即得

$$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}C'_kf(m+k,0)$$

故命题对 n 为真.

因为在⑥中

$$f(m+k,0)=\frac{(2(m+k))!(2\times 0)!}{(m+k)!0!(m+k)!}=$$

$$\frac{(2(m+k))!}{(m+k)!(m+k)!}=C_{2(m+k)}^{m+k}$$

是整数,并且 C_k 亦为整数,故 $f(m,n)$ 为整数,即

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

为整数.

4 求下列不等式组的一切正实数解 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5):

荷兰命题

$$\begin{cases}(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\leqslant 0 & ①\\(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\leqslant 0 & ②\\(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\leqslant 0 & ③\\(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\leqslant 0 & ④\\(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\leqslant 0 & ⑤\end{cases}$$

解法 1 每一个不等式可转化为

$$(x_i^2-x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2-x_{i+2}x_{i+4})\leqslant 0$$

其中各下标是模 5 的余数,即 $x_{j+5}=x_j$,若把各式左边相乘,然后把所有不等式加起来,便得 10 项 $x_i^2x_j^2$ 形,10 项"交叉项",5 项

$-x_i^2x_{i+1}x_{i+j}$ 形，5 项 $-x_i^2x_{i+2}x_{i+4}$ 形. 这便是一平方和形式 $\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2+\cdots+y_{10}^2)$，这里每一"交叉项"用一个 y 同它联系. 例如，对于"交叉项" $x_2^2x_3x_5$ 我们以 $y_1=x_2x_3-x_2x_5$ 同它联系，可知 $x_2^2x_3^2$，$x_2^2x_5^2$ 项出现在 y_1^2 中，也出现在我们的和式中. 于是我们的已知不等式的和式可表示成

$$0\geqslant\sum_{i=1}^{5}(x_i^2-x_ix_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2-x_{i+2}x_{i+4})=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}((x_ix_{i+1}-x_ix_{i+3})^2+(x_{i-1}x_{i+1}-x_{i-1}x_{i+3})^2)$$

既然这平方和不能为负，我们断言它是零，这意味着其各项消失，即 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$. 所以，每组五个相等的正实数是已知的不等式组的一解.

解法 2 设 x_i 是任意正实数. 若

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5 \qquad ⑥$$

则所给的不等式组显然能成立，所以 ⑥ 是所求的一解.

若不是所有 x_i 都彼此相等，则

$$x_1\neq x_3,x_3\neq x_5,x_5\neq x_2,x_2\neq x_4,x_4\neq x_1$$

至少有一个成立.

因为不等式组中各 x_i 的下标经循环调换后，即 $x_1\to x_2\to x_3\to x_4\to x_5\to x_1$，是重复的，且若 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 是解，则 $(x_1^{-1},x_2^{-1},x_3^{-1},x_4^{-1},x_5^{-1})$ 也是解，故不失一般性，首先假定 $x_3\neq x_5$，$x_3<x_5$.

ⅰ 若 $x_1\leqslant x_2$，则由 ① 得

$$x_1\leqslant\sqrt{x_3x_5}<x_5 \qquad ⑦$$

$$x_2\geqslant\sqrt{x_3x_5}>x_3 \qquad ⑧$$

在 ⑦ 中，由 $\sqrt{x_3x_5}<x_5$ 可得 $x_3x_5<x_5^2$，又由 $x_1<x_5$ 可得 $x_3x_1<x_3x_5$，即有 $x_5^2>x_3x_5>x_3x_1$. 由此可见，在 ④ 中有

$$x_4^2\leqslant x_1x_3<x_3x_5 \qquad ⑨$$

在 ⑧ 中，由 $\sqrt{x_3x_5}>x_3$ 可得 $x_3x_5>x_3^2$，又由 $x_3<x_2$ 可得 $x_3x_5<x_2x_5$，即有 $x_3^2<x_3x_5<x_2x_5$. 由此可见，在 ③ 中有

$$x_4^2>x_5x_2>x_3x_5 \qquad ⑩$$

这样就得出两个矛盾的式子 ⑨ 和 ⑩. 也就是说，$x_1\leqslant x_2$ 不可能.

ⅱ 若 $x_1>x_2$，则由不等式 ① 推出

$$x_1\geqslant\sqrt{x_3x_5}>x_3,x_2\leqslant\sqrt{x_3x_5}<x_5$$

由此，从不等式 ② 推得

$$x_4x_1 \leqslant \max(x_2^2, x_3^2) \leqslant x_3x_5 \quad ⑪$$

再利用不等式 ⑤ 得

$$x_2x_4 \geqslant \min(x_5^2, x_1^2) \geqslant x_3x_5 \quad ⑫$$

又由 ⑪,⑫ 可知 $x_4x_1 \leqslant x_2x_4, x_1 \leqslant x_2$,这与假定矛盾.所以所给的不等式组除 ⑥ 外没有其他解答.

5 设 f 与 g 是对于一切 x 与 y 的实值皆有定义的实函数,且一切 x 与 y 满足方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$$

证明:若 $f(x)$ 不恒等于零且对于一切 x 有 $|f(x)| \leqslant 1$,则对于一切 y 有 $|g(y)| \leqslant 1$.

保加利亚命题

证法 1 设 M 是 $f(x)$ 的最大值.假定存在一个 y_0,有

$$g(y_0)=1+r, r>0$$

则对于所有 x 有

$$2|f(x)||g(y_0)| = |f(x+y_0)+f(x-y_0)| \leqslant |f(x+y_0)|+|f(x-y_0)| \leqslant 2M$$

这样就有

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{|g(y_0)|} = \frac{M}{1+r} = M-\delta, \delta>0$$

这和 M 的定义矛盾,进而证明了结论.

证法 2 既然 f 不恒等于 0,便有一数 a 使 $f(a) \neq 0$.令 $x = a+ny$,并将它代入已知方程,经移项得

$$f(a+(n+1)y)-2f(a+ny)g(y)+f(a+(n-1)y)=0 \quad ①$$

设想 y 固定,我们简记 $f(a+ny)$ 为 f_n,则 ① 变成差分方程

$$f_{n+1}-2gf_n+f_{n-1}=0 \quad ②$$

并具有如下形式的解,即

$$f_n = b_1r_1^n+b_2r_2^n \quad ③$$

如果其有关二次方程

$$r^2-2gr+1=0$$

的二根 r_1, r_2 是相异的.令 $r_1 = g+\sqrt{g^2-1}, r_2 = g-\sqrt{g^2-1}$.若 $g \neq \pm 1$,则这二值是相异的.

设在某点 $y_0, g(y_0)>1$,则对于 $y=y_0, r_1>1$,且若 $b_1 \neq 0$,当 $n \to \infty$ 时变成无界的,这同假设矛盾.若 $b_1 = 0$,则 $b_2 \neq 0$(因 $f(a) = b_2 \neq 0$).因 $r_1r_2 = 1$,故 $0<r_2<1$.式 ③ 告诉我们当 $n \to -\infty$ 时 f_n 是无界的,这与对一切 x 有 $|f(x)| \leqslant 1$ 的事实矛

盾. 对于某点 y_0, 若 $g(y_0) < -1$, 可以类似地得出矛盾, 故得 $|g(y)| \leq 1$.

6 已知四个相异的平行平面,证明:存在着一个正四面体,它的顶点分别在这四个平面上.

英国命题

证明 设 E_1, E_2, E_3, E_4 是所考虑的平面,且编号的选择是:使 E_2, E_3, E_4 按这一次序位于 E_1 的法向量方向上,这里 d_i 是平面 E_{i+1} 到 E_i 的距离, $i = 1,2,3$. 设 E_i 上的点 P_i 已找到,它们构成正四面体, $i = 1,2,3,4$.

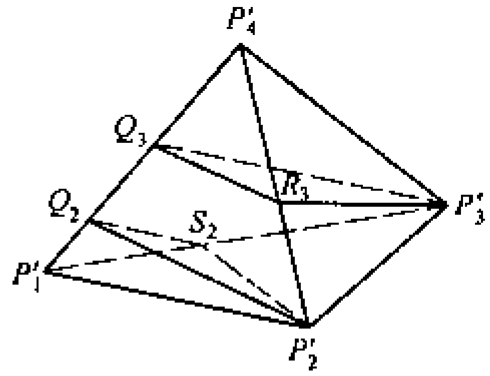


图 14.3

如图 14.3 所示,已知任一正四面体 $P'_1P'_2P'_3P'_4$,我们以比 $d_1 : d_2 : d_3$ 分线段 $P'_1P'_4$,且得到 $P'_1P'_4$ 上的分点 Q_2, Q_3,把线段 $P'_3P'_4$ 分为比 $d_2 : d_3$,把线段 $P'_1P'_3$ 分为比 $d_1 : d_2$,而得分点 R_3 与 S_2,则对于线段的长,有

$$P'_4Q_3 : P'_4Q_2 = P'_4Q_3 : P'_4P'_2$$

且由射线定理的逆定理有 $Q_3R_3 /\!/ Q_2P'_2$.类似地,由

$$P'_1Q_2 : P'_1Q_3 = P'_1S_2 : P'_1P'_3$$

可得 $Q_2S_2 /\!/ Q_3P'_3$.所以,过 Q_2, P'_2, S_2 的平面 E'_2 与过 Q_3, R_3, P'_3 的平面 E'_3 平行.

如图 14.4 所示,设 E'_1 与 E'_4 分别是过 P'_1 与 P'_4 而平行于 E'_2 的平面. 从 P'_4 引 E'_i 上的垂线交平面 E'_i 于 T_i, $i = 1,2,3$. 则由射线定理,对于距离 t_1, t_2, t_3 有

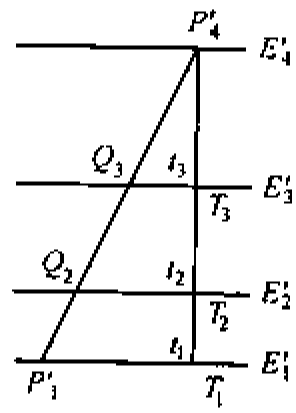


图 14.4

$$t_1 : t_2 : t_3 = P'_1Q_2 : Q_2Q_3 : Q_3P'_4 = d_1 : d_2 : d_3 \quad ①$$

在空间中扩展由 ① 确定的倍数,把平面 E'_1, E'_2, E'_3, E'_4 变到平面 $E''_1, E''_2, E''_3, E''_4$, 后者之间仍有原来的距离, 并把 $P'_1P'_2P'_3P'_4$ 仍变为正四面体 $P''_1P''_2P''_3P''_4$,这里 P''_i 在 E''_i 中, $i = 1,2,3,4$.

由此显然可得,对于空间中那些彼此间有原来距离的四个平行平面,可以确定一个正四面体,其顶点在每个平面上,这就解答了本题.

第 15 届国际数学奥林匹克

苏联，1973

捷克斯洛伐克命题

1 设点 O 在直线 g 上，$\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2},\cdots,\overrightarrow{OP_n}$ 是单位向量，其中，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 各点皆在含有直线 g 的同一平面上，且在 g 的同一侧。

证明：若 n 是奇数，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}\geqslant 1$，其中 $|\overrightarrow{OP_i}|$ 表示 $\overrightarrow{OP_i}$ 的长度。

证法 1 我们用归纳法证明本题。

对于 $n=1$，命题显然是正确的。

如图 15.1 所示，设 $n\geqslant 3$，n 是奇数，且 n 个位置向量的终点按 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的次序在以 O 为圆心，半径为 1 的半圆周上。

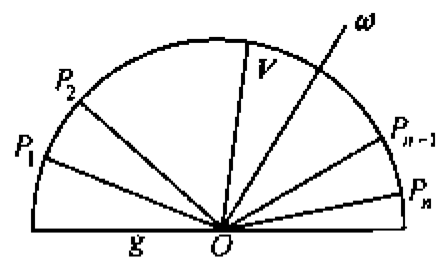


图 15.1

假定命题对于所有小于 n 的奇数是正确的，则对于 $\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}}$ 也正确。从 O 引向量

$$W=\sum_{i=2}^{n-1}\overrightarrow{OP_i}\quad |W|\geqslant 1$$

显然，W 和半圆周的交点是在 P_2 与 P_{n-1} 之间。向量 $V=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}$ 不是零向量，它落在 $\angle P_1OP_n$ 的平分线上，而且和 W 构成一个锐角 θ。因 $\cos\theta$ 取正值，故有

$$|W+V|^2=|W|^2+|V|^2+2|W||V|\cos\theta>|W|^2$$

所以
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}\right|=|W+V|>|W|\geqslant 1$$

因而命题对于 n 也是正确的。

证法 2 由证法 1 可知，只须证明 $n=3$ 时结论正确，即不难用数学归纳法证明对于任何奇数 n 结论都正确。

下面我们用复数证明。

设 $\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2}$ 和 $\overrightarrow{OP_3}$ 分别对应于复数

$$z_1=\cos\theta_1+\mathrm{i}\cdot\sin\theta_1$$

$$z_2=\cos\theta_2+\mathrm{i}\cdot\sin\theta_2$$

$$z_3 = \cos\theta_3 + i\cdot\sin\theta_3$$

其中，$0 \leqslant \theta_3 < \theta_2 < \theta_1 \leqslant \pi$．则

$$z_1 + z_3 = (\cos\theta_1 + \cos\theta_3) + i(\sin\theta_1 + \sin\theta_3) =$$
$$2\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cdot\cos\frac{\theta_1-\theta_3}{2} + 2i\cdot\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cdot\cos\frac{\theta_1-\theta_3}{2}$$

由此
$$\arg(z_1+z_3) = \frac{\theta_1+\theta_3}{2}$$

又设 $|z_1+z_3| = r \geqslant 0$，则

$$z_1+z_3 = r(\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} + i\cdot\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2})$$

于是
$$z_1+z_2+z_3 = (r\cdot\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+\cos\theta_2) + i(r\cdot\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+\sin\theta_2)$$

$$|z_1+z_2+z_3| = \left((r\cdot\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+\cos\theta_2)^2 + (r\cdot\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+\sin\theta_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+r^2+2r\cdot\cos\frac{\theta_1+\theta_3-2\theta_2}{2}}$$

但
$$\frac{\theta_1+\theta_3-2\theta_2}{2} = \frac{(\theta_1-\theta_2)-(\theta_2-\theta_3)}{2}$$

注意到 $0 \leqslant \theta_3 < \theta_2 < \theta_1 \leqslant \pi$，得

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta_1+\theta_3-2\theta_2}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 < \cos\frac{\theta_1+\theta_3-2\theta_2}{2} \leqslant 1$$

所以
$$|z_1+z_2+z_3| \geqslant 1$$

2 空间中是否存在着具有下述性质的有限点集 M：A，B 是 M 中任意两点，则我们可以在 M 中另取 C，D 两点，使直线 AB 和 CD 互相平行但不重合．

波兰命题

解法 1 我们将实际作出两个适合题意的点集 M_1 和 M_2，然后证明这样的点集存在．

M_1 是含有 10 个点的点集．它包括一立方体的 8 个顶点，及该立方体中心关于任一对平面的 2 个对称点，如图 15.2 所示，显然 M_1 满足本题的条件．

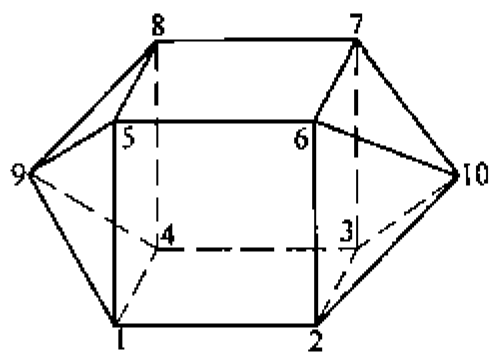


图 15.2

M_2 是含有 27 个点的点集．这 27 点是一个 $2\times2\times2$ 的立方体的中心，及该立方体各面上的 26 个格点，如图 15.3 所示．M_2 亦即是空间上坐标为 (x_1, x_2, x_3) 的 27个点，其中每个 x_i 的值可取 -1，0 或 1．容易验证，M_2 也满足本题的条件．

读者可试着找出一个少于 10 点，而满足本题条件的点集，或证明这样的点集至少含有 10 点.

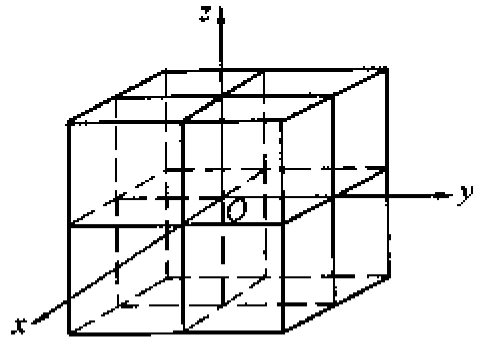


图 15.3

解法 2 为了证明这样一个点集存在，我们给出一个例子.

设 n 是偶数，$n \geqslant 4$，并设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 与 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 是两全等的 n 边形的对应顶点，它们在两个不同的平行平面上，且分别具有对称中心 P 与 Q，设 $P_iQ_i = PQ, i = 1, 2, \cdots, n$. 另外，在两平面的外侧，分别在 PQ 的延长线上，取 R, S 两点，使 $RO = OS = PQ$，这里 O 是 PQ 的中点. 这个含有 $2n + 2$ 个点的点集 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, R, S\}$ 满足本题的条件.

i 若 A, B 是 $P_i, P_j (i \neq j)$ 或 P_i, Q_i 或 R, S，则情形甚为明显，无须讨论.

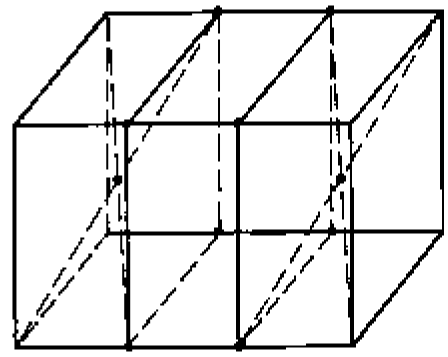
ii 若 A, B 是 $P_i, Q_j (i \neq j)$，P_iO_j 不通过 O，只要找出这两点关于 O 的对称点 C, D.

iii 若 A, B 是 $P_i, Q_j (i \neq j)$，P_iQ_j 通过 O，则可取 $C = R, D = P'_i$ 或 $C = Q'_j, D = S$，其中 P'_i 是 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 中和 P_i 相对的顶点，Q'_j 是 n 边形 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 中和 Q_i 相对的顶点.

iv 若 A, B 中有一点为 R 或 S，另一点为 P_i 或 Q_j，情形和 iii 类似.

解法 1 中的 M_1 是上面这个例子的特例.

解法 3 要说明这种集合的存在性，只要从所有可能的例子中举出其中一个就行了.


图 15.4

一种比较简单的解法如下：取三个相等的长方体，把它们一个挨着一个地排好，如图 15.4 所示. 这样当中一个长方体的八个顶点和两旁两个长方体的中心就组成了满足题设条件的集合. 这个集合由 10 点组成.

上述方法可以做如下的推广. 设 n 为不小于 4 的任意偶数. 在给定的两个平行平面上分别作两个 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$，使得 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有对称中心 P，n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 有对称中心 Q，并且

$$\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{PQ}, i = 1, 2, \cdots, n$$

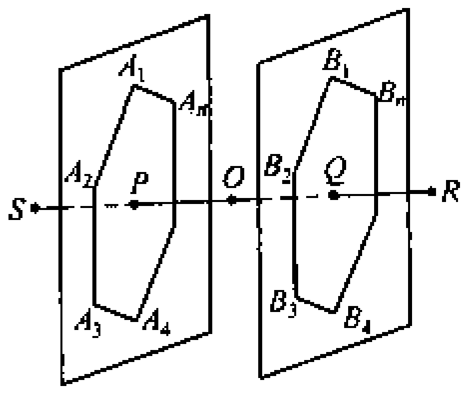


图 15.5

再取点 R 和点 S，使

$$\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ}$$

其中，O 是线段 PQ 的中点，如图 15.5 所示. 于是点集

$$M = \{A_1, A_2, \cdots, A_n; B_1, B_2, \cdots, B_n; R, S\}$$

关于点 O 对称.

设 A, B 是集合 M 中的两点. 如果线段 AB 不经过 O，那么分别

取点 A 和点 B 关于点 O 的对称点作为点 C 和点 D，显然必有 $AB // CD$. 如果线段 AB 经过点 O，这时只有下列两种可能情况.

ⅰ 点 A 和点 B 就是点 R 和点 S. 这时，取 $C = A_1, D = B_1$ 便有 $AB // CD$.

ⅱ 点 A 和点 B 分别属于集合 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 和 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$. 不妨假设

$$A \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}, B \in \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$$

在多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，设点 A 关于多边形中心 P 的对称点是 A'，于是有

$$\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AO}$$

由此可得 $$SA' // AO // AB$$

因此，取 $C = S, D = A'$ 便满足题意.

瑞典命题

3 设 a, b 是可使方程

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

至少有一实根的实数. 对于所有这样的数偶 (a, b)，求 $a^2 + b^2$ 的最小值.

解法 1　首先考虑方程

$$x + \frac{1}{x} = y$$

其中，y 是实数. 这方程可写成 x 的二次方程

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

它有实根的充要条件是其判别式大于或等于 0，即

$$y^2 - 4 \geqslant 0, \ |y| \geqslant 2 \quad ①$$

原方程可写成

$$(x + \frac{1}{x})^2 + a(x + \frac{1}{x}) + (b - 2) = 0$$

令 $y = x + \frac{1}{x}$，则得

$$y^2 + ay + (b - 2) = 0 \quad ②$$

解得

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b - 2)}}{2} \quad ③$$

因为原方程至少要有一个实根，由 ① 可知，③ 中至少有一个根的绝对值大于等于 2. 所以

$$|a| + \sqrt{a^2 - 4(b - 2)} \geqslant 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 - 4(b - 2)} \geqslant 4 - |a| \Rightarrow$$
$$8|a| \geqslant 8 + 4b \Rightarrow 4a^2 \geqslant b^2 + 4b + 4 \Rightarrow 4(a^2 + b^2) \geqslant$$

$5b^2+4b+4 \Rightarrow a^2+b^2 \geqslant \frac{5}{4}(b+\frac{2}{5})^2+\frac{5}{4}$

由此可知，当 $b=-\frac{2}{5}$，a^2+b^2 取最小值$\frac{4}{5}$.

解法2 设 S 表示所有使原方程至少有一实根的数偶集或点集 (a,b). 应用点集拓扑学知识，我们将在 S 中找出最接近于 O 的一点.

我们首先证明 S 是闭集，为此只要证明 S 的余集 T（即使原方程没有实根的数偶集或点集）是开集就可以了. 今若 $(a_0,b_0)\in T$，则 $P(x)=0$ 的根都不是实数. 当 $P(x)$ 的系数连续变动时，它的根也随着连续变动，故存在 (a_0,b_0) 的一个邻域，在这个邻域中 $P(x)=0$ 的根仍然都不是实数. 所以 T 是开集，从而 S 是闭集.

S 既然是闭集，它就必定含有一个最接近于 0 的点，而且这个点是在 S 的边界上. 但若 $(\overline{a},\overline{b})$ 是 S 边界上的任一点，相应地 $P(x)=0$ 必有重实根，因为如果所有根都是单根，就将存在 $(\overline{a},\overline{b})$ 的一个邻域，在其中 $P(x)=0$ 的实根都是单根，这样，$(\overline{a},\overline{b})$ 就将是内点而不是边界上的点，这和原设不合. 所以要找出 S 中最接近于 0 的点只须考虑那些可使 $P(x)=0$ 有重实根的 (a,b).

因为 $P(\frac{1}{r})=\frac{1}{r^4}P(r)$，故若 r 是 $P(x)=0$ 的根，则 $1/r$ 也是 $P(x)=0$ 的实根，即

$$P(r)=0 \Rightarrow P(\frac{1}{r})=0 \qquad ④$$

我们考虑两种情形.

i $P(x)=0$ 的重根 r 不等于 1 或 -1.

由 ④ 知 $1/r$ 也是 $P(x)=0$ 的根. 因为它的四根之积等于 1，故这些根是

$$r,r,1/r,1/r$$

于是有
$$P(x)=(x-r)^2(x-\frac{1}{r})^2=$$
$$x^4-2(1+\frac{1}{r})x^3+(r^2+2+\frac{1}{r^2}+2)\cdot$$
$$x^2-2(r+\frac{1}{r})x+1=0$$

令 $y=r+1/r$ 则得

$$a=-2y,b=y^2+2 \qquad ⑤$$

由解法 1 知 $|y|\geqslant 2$，故

$$|a|\geqslant 4,b\geqslant 6$$

由 ⑤ 中消去 y 得

$$b=\frac{a^2}{4}+2,\ |a|\geqslant 0 \quad ⑥$$

这样,我们看到 S 的边界是一抛物线的一部分.

ii $P(x)=0$ 的重根 r 为 1 或 -1,在这一情形下

$$P(1)=2a+b+2=0$$

或

$$P(-1)=-2a+b+2=0$$

这样,我们就有两条对称的直线

$$b=2a-2$$

或

$$b=-2a-2 \quad ⑦$$

如图 15.6 所示,这两直线上每一点 (a,b) 皆属于 S,因为 $P(x)=0$ 有一实根 1 或 -1 在其上,现在这两直线和 $(0,0)$ 的距离为

$$d=\frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

所以

$$a^2+b^2=4/5$$

在情形 i 中, $a^2+b^2\geqslant 4^2+6^2=52$,可知 a^2+b^2 的最小值为 4/5.

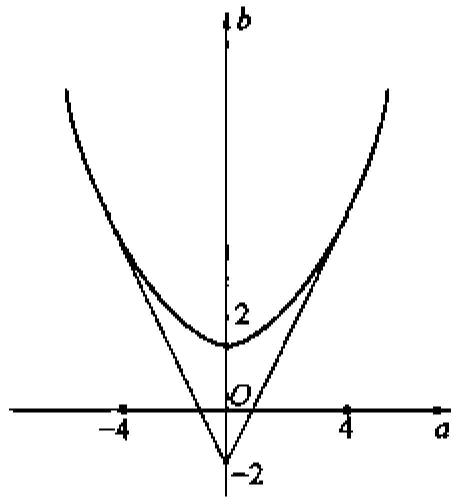


图 15.6

解法 3 由于方程

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \quad ⑧$$

由数对 (a,b) 所确定,我们把使方程 ⑧ 至少有一个实数解的数对 (a,b) 组成的集合记为 M,把使方程 ① 至少有一个正数解的数对 (a,b) 组成的集合记为 N,显然, $N\subset M$,并且设

$$d=\min_{(a,b)\in M}(a^2+b^2),\ g=\min_{(a,b)\in N}(a^2+b^2)$$

于是问题就转化成计算 d 的值.

由 $N\subset M$ 可知, $g\geqslant d$. 又因数 0 不是方程 ⑧ 的解,故方程 ⑧ 的解或者是正实数,或者是负实数. 如果 x_0 是方程 ⑧ 的一个负实数解,那么 $-x_0$ 便是方程

$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=0 \quad ⑨$$

的一个正实数解. 而方程 ⑨ 是将方程 ⑧ 中的 a 代换成 $-a$ 得到的,并且 $(-a)^2+b^2=a^2+b^2$,由此可知,若 $(a,b)\in M/N$,则 $(-a,b)\in N$,从而 $g=d$. 因此,我们只要讨论方程 ⑧ 的正实数解就行了.

利用代换

$$u=x+\frac{1}{x} \quad ⑩$$

可以把方程 ⑧ 变形为方程

$$u^2+au+b-2=0 \quad ⑪$$

如果 x_0 是方程 ⑧ 的一个正实数解,那么必有

$$u_0 = x_0 + \frac{1}{x_0} \geqslant 2 \qquad ⑫$$

反之,如果 u_0 是方程 ⑪ 的一个解,并且 u_0 满足条件 ⑫,那么方程

$$x + \frac{1}{x} = u_0$$

即方程

$$x^2 - u_0 x + 1 = 0 \qquad ⑬$$

其判别式 $$D = u_0^2 - 4 \geqslant 0$$

因此方程 ⑬ 有实数解,并且由于 $u_0 \geqslant 2$,故方程 ⑬ 至少有一个正实数解,从而方程 ⑧ 对应地至少有一个正实数解.这样一来,我们只要讨论方程 ⑪ 的不小于 2 的实数解就行了.

我们把使方程⑪至少有一个不小于2的实数解的数对(a,b)组成的集合记为 R,于是应有

$$d = \min_{(a,b)\in R}(a^2 + b^2)$$

下面分两种情形来讨论函数

$$f(u) = u^2 + au + b - 2$$

ⅰ $f(2) \leqslant 0$.

由于

$$\lim_{u\to+\infty} f(u) = +\infty$$

所以根据连续函数中值定理可知,存在一个实数 $u_0 \geqslant 2$,使得 $f(u_0) = 0$,也就是说,方程 ⑪ 有满足条件 ⑫ 的解.

我们知道,在笛卡儿坐标平面 O-ab 内,由条件$f(2) = 2a + b + 2 \leqslant 0$可确定一个半平面,如图 15.7所示,记为 H,这个半平面应位于直线

$$2a + b + 2 = 0$$

下侧.半平面 H 内的每一点 P 对应一个数对(a,b),并且,由这个数对确定方程

$$u^2 + au + b - 2 = 0$$

有不小于 2 的实数解.我们把所有这种数对的集合记为 R_1,显然,R_1 是 R 的一个子集合,即 $R_1 \subseteq R$.设

$$d_1 = \min_{(a,b)\in R_1}(a^2 + b^2)$$

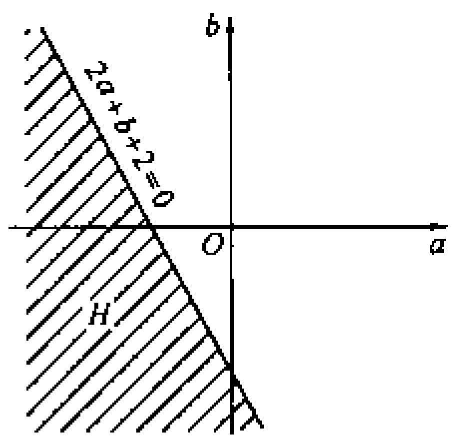


图 15.7

由于 d_1 就是半平面 H 中一切点(a,b)到坐标原点 O 的距离平方 $a^2 + b^2$ 的最小值,而半平面 H 中一切点到点 O 的距离,以点 O 到它在直线$2a + b + 2 = 0$上的垂足之间的距离为最短,根据点到直线的距离公式可知此时有

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|2\times 0 + 1\times 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

因此 $$d_1 = \min_{(a,b)\in R_1}(a^2+b^2) = \frac{4}{5}$$

ii $f(2) > 0$.

此时,如果实数 $u_0 \geqslant 2$ 使 $f(u_0)=0$,即

$$f(u_0) = u_0^2 + au_0 + b - 2 = 0$$

那么必有判别式

$$\Delta = a^2 - 4b + 8 \geqslant 0$$

从而 $f\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b - 2 = -\frac{1}{4}(a^2 - 4b + 8) \leqslant 0$

又因为 $f(2) > 0$,$f(u_0)=0$,并且 $u_0 \geqslant 2$,所以 $-\frac{a}{2} > 2$,即 $a < -4$,如图 15.8 所示.从而

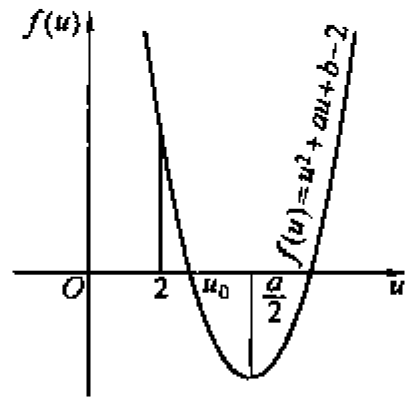


图 15.8

$$a^2 + b^2 \geqslant a^2 > 16 > \frac{4}{5} = d_1$$

由此可知,如果 $(a,b) \in R/R_1$,那么 $a^2+b^2 \geqslant d_1$.于是

$$d = \min_{(a,b)\in M}(a^2+b^2) = \min_{(a,b)\in R}(a^2+b^2) = \min_{(a,b)\in R_1}(a^2+b^2) = \frac{4}{5}$$

解法 4　由解法 2 知,只须研究方程

$$u^2 + au + b - 2 = 0 \quad ⑭$$

至少有一不小于 2 的实根的情况.

为此,应有

$$D = a^2 - 4b + 8 \geqslant 0 \quad ⑮$$

且

$$\frac{-a+\sqrt{a^2-4b+8}}{2} \geqslant 2 \quad ⑯$$

那么 $$\sqrt{a^2-4b+8} \geqslant a+4$$

$$a^2 - 4b + 8 \geqslant (a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$$

$$2a + b + 2 \leqslant 0 \quad ⑰$$

反之,若 a,b 满足 ⑰,也可推知 a,b 必满足 ⑮,⑯,从而方程 ⑭ 至少有一不小于 2 的实根.

令 $a = \rho\cdot\cos\theta$,$b = \rho\cdot\sin\theta(\rho \geqslant 0)$,则 ⑰ 化为

$$2\rho\cdot\cos\theta + \rho\cdot\sin\theta + 2 \leqslant 0$$

$$\sqrt{5}\rho\cdot\cos(\theta - \varphi) \leqslant -2 \quad ⑱$$

其中,$\varphi = \arctan\frac{1}{2}$.

显然,满足 ⑱ 的 ρ 的最小(正)值为 $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

又因

$$a^2 + b^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2$$

故得
$$\min(a^2+b^2)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}$$

注　令 $a=\rho\cdot\cos\theta,b=\rho\cdot\sin\theta$,实际上是把坐标平面 $O\text{-}ab$ 上的点 (a,b) 用极坐标表示.而 $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ 是点 (a,b) 的极径,故满足⑬的 ρ 的最小(正)值就是直线
$$\sqrt{5}\rho\cdot\cos(\theta-\varphi)=-2$$
下方(包括边界)的所有点的极径的最小值,显然它等于极点 O 与这条直线的距离 $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

南斯拉夫命题

4 一士兵要在一个正三角形形状的区域内检查是否埋有地雷,他所用的检查仪器的有效作用范围的半径等于该三角形的高的一半.现若该士兵自该三角形一顶点出发,问要完成这个使命,怎样行走所取的路径才是最短的.

解法1　如图15.9所示,设该士兵的出发点是 $\triangle ABC$ 的顶点 A,h 是 $\triangle ABC$ 的高.为了能检查 B,C 两点,他所走的路径,必与以 B 及 C 为圆心,$h/2$ 为半径的圆弧 O_B 及 O_C 相遇于某两点 P 及 Q.由于 O_B 的半径是固定的,若路径 $APQB$ 为最短,则路径 APQ 也为最短.此时由 A 至 P 与由 P 至 Q 这两部分的路径必定都是直线,若 P_O 是 O_C 和 AB 上的高 CH 的交点,Q_O 是 PB 与 O_B 的交点,我们将证明 AP_OQ_O 是所求的最短路径.

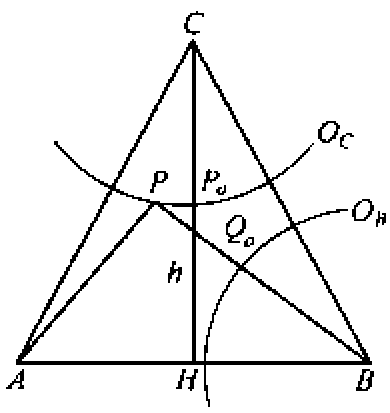


图 15.9

因为 O_C 的半径是 $h/2$,故 P_O 是 CH 的中点,它和 A 与 B 等距离,即 $\triangle AP_OB$ 是等腰三角形.过 P_O 作 O_C 的切线 t,如图15.10所示.若 P 是 O_C 上另一点,连 AP 交 t 于点 P',则
$$AP+PB>AP'+P'B$$
$\triangle AP'B$ 和 $\triangle AP_OB$ 同底等高.在所有同底等高的三角形中,等腰三角形的周界最短.所以
$$AP'+P'B+AB>AP_O+P_OB+AB$$
即
$$AP'+P'B>AP_O+P_OB$$
从而知 AP_OQ_O 是最短路径.

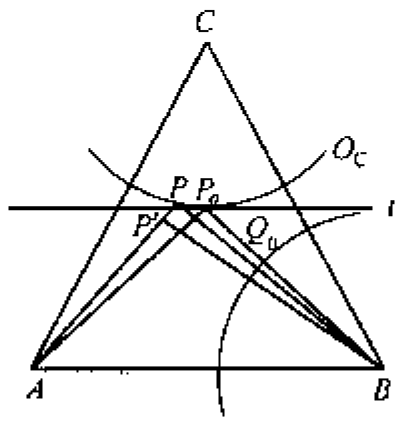


图 15.10

读者可以自己证明,该士兵只要沿着 AP_OQ_O 路径行走,就可以检查到 $\triangle ABC$ 内的每一点.

应用勾股定理,我们还可以算出路径 AP_OQ_O 的长度,由 $AP_O{}^2=7h^2/12$ 得
$$AP_O+P_OQ_O=AP_O+P_OB-\frac{h}{2}=\left(\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{1}{2}\right)h$$
若正 $\triangle ABC$ 的边长为 S,则最短路径的长度为

$$AP_O + P_OQ_O = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)S$$

推广　本题可以推广如下：设 K 是一光滑凸闭曲线，A,B 是在 K 所包围的区域之外的点，求最短路径 APB，P 是 K 上的点．我们要先证明在 K 上存在一点 P_O，使过 P_O 的法线和 AP_O 及 P_OB 所成的角相等．用本题的方法可证得 AP_OB 是最短路径．

解法 2　不妨假设这个战士从给定的正 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发，并设 $\triangle ABC$ 的高为 h．

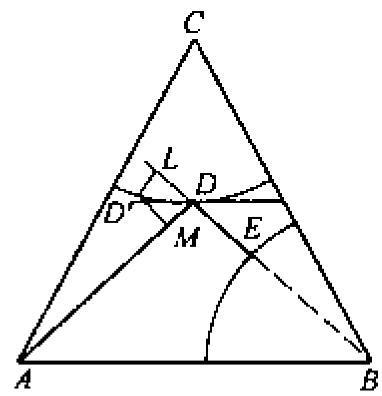


图 15.11

如图 15.11 所示，为了探测点 C 和点 B，探测路径必须经过以点 C 为圆心，以 $\frac{h}{2}$ 为半径的弧 α 上的点 D，以及以点 B 为圆心，以 $\frac{h}{2}$ 为半径的弧 β 上的点 E，因而探测路径为 ADE．因为 $BE = \frac{h}{2}$（定值），所以当路径 $ADEB$ 最短时，路径 ADE 也最短．在路径 $ADEB$ 中，从 A 至 D，从 D 至 E 应取直线，并且 E 应在 DB 上．这样，问题就归结为：在 $CD = \frac{h}{2}$ 的条件下，求 $AD + DB$ 的最小值．

我们来证明，当 D 为 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高的中点时，$AD + DB$ 最短．

证法 1　事实上，如果点 D' 是满足条件的另一点，即有 $CD' = \frac{h}{2}$，为确定起见，不妨设点 D' 离点 A 较近，离点 B 较远．过 D' 分别作 BD，AD 的垂线交 BD，AD 或其延长线于 L，M．由于过点 D 且平行 AB 的直线是 $\angle MDL$ 的平分线，又是弧 α 在点 D 处的切线，故弧 α 上的点 D' 与 BD 延长线上的点 L 必在 $\angle MDL$ 的平分线的同一侧，从而 $LD' < D'M$，又由勾股定理可知，$LD > MD$，即 $LD - MD > 0$．于是

$$AD' + D'B > AM + LB = (AD - MD) + (LD + DB) = (AD + DB) + (LD - MD) > AD + DB$$

这就证明了 $AD + DB$ 是最短线．

证法 2　设点 D' 是满足条件的另一点，即点 D' 在弧 α 上，如图 15.12 所示，连结 AD' 和 $D'B$．再以 A,B 为焦点，$\frac{h}{2}$ 为短半轴作椭圆 γ，交 AD' 于点 G．由于点 D' 到 AB 的距离大于 $\frac{h}{2}$，而椭圆的短半轴为 $\frac{h}{2}$，故知点 D' 必在椭圆的外部，即点 G 必在线段 AD' 内部．在 $\triangle D'GB$ 中有

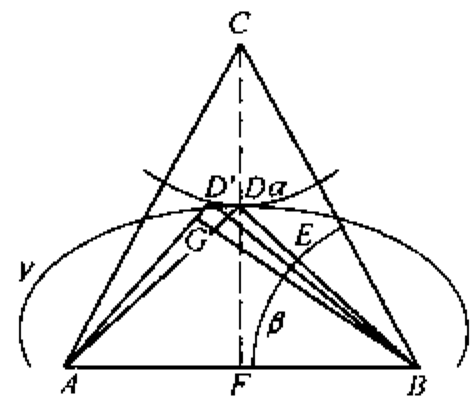


图 15.12

$$GD' + D'B > GB$$

于是
$$AG + GD' + D'B > AG + GB$$

即 $$AD' + D'B > AG + GB$$
又根据椭圆的性质可得
$$AG + GB = AD + DB$$
故 $$AD' + D'B > AD + DB$$
这就证明了 $AD + DB$ 是最短线.

下面来说明,沿着路径 ADE 可以探遍整个 $\triangle ABC$ 的内部及边界,设过点 E 且垂直 AB 的直线与 AB, BC 分别交于点 F, G,过路径 ADE 上的任意一点 P 且垂直 AB 的直线分别交 $\triangle ABC$ 的两边于 R, Q,如图 15.13 所示,显然
$$PR \leqslant CD = \frac{h}{2}, PQ \leqslant \frac{h}{2}$$
由此可见,当点 P 沿着路径 ADE 移动时,线段 RQ 将覆盖整个四边形 $AFGC$ 的内部及边界,即战士沿着路径 ADE 可以探遍整个四边形 $AFGC$ 的内部及边界.另一方面,余下的 $\triangle FBG$ 在以 E 为圆心,$\frac{h}{2}$ 为半径的圆内,故战士位于点 E 处可探遍整个 $\triangle FBG$ 的内部及边界.从而也就探遍整个 $\triangle ABC$ 的内部及边界.

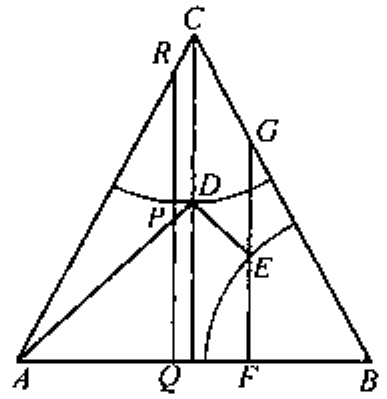


图 15.13

波兰命题

5 设 G 是形如 $f(x) = ax + b$ 的实变数函数的集合,其中 a, b 是实数,f 不是常函数,且 G 具有如下的性质:

(1) 若 $f, g \in G$, 则 $g \circ f \in G$(这里 $g \circ f(x) \triangleq g(f(x))$);

(2) 若 $f \in G$,则 $f^{-1} \in G$(这里 $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ 是 $f(x)$ 的反函数);

(3) 对于每一个 $f \in G$,存在着实数 x_f 使得 $f(x_f) = x_f$.

求证:存在着一个实数 k,使得对于所有 $f \in G$,有 $f(k) = k$.

证法 1 由(1),(2)可知,G 对于函数的复合运算"$\circ$"构成一个群.函数 $i(x) = x$ 是 G 的单位元,这是因为对于任意一个实变数 x 都有
$$(f \circ i)(x) = (i \circ f)(x) = f(x)$$
对于每个 $f(x) = ax + b \in G$,我们可以用系数 a 和它联系,这种联系是可乘的,意指若 $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$,则 $g \circ f$ 可和 ac 联系.

每一个线性函数 $ax + b$, $a \neq 1$,必有一个不动点 x_f.由 $f(x_f) = ax_f + b = x_f$ 得 $x_f = b/(1 - a)$.从几何观点看,x_f 就是 $y = ax + b$ 和 $y = x$ 这两直线的交点.当 $a = 1$ 时,$ax + b = x +$

b 有一个不动点的充要条件是 $b=0$. 这时的函数是 $i(x)=x$，而每一点都是不动点. 所以由(3)可知 G 除单位元外不能含有其他斜率为 1 的函数.

现在考虑复合函数 $m=f\circ g$ 与 $n=g\circ f$，其中

$$f(x)=ax+b,g(x)=cx+d$$

m 与 n 的斜率都是 ac，而 m^{-1} 在 n^{-1} 的斜率则都是 $1/ac$，故 $m^{-1}\circ n$ 的斜率为 1. 又因 $m^{-1}\circ n\in G$，它必是 G 的单位元，即

$$m^{-1}\circ n=i\Rightarrow m\circ m^{-1}\circ n=m\circ i\Rightarrow n=m\Rightarrow g\circ f=f\circ g$$

所以 G 中的函数，对于函数的复合运算"$\circ$"是可交换的.

如果 G 只含有单位元，则不必证明. 如果 G 含有 $f(x)=ax+b$，$a\neq 1$ 及 $g(x)=cx+d$，$c\neq 1$，则这两个函数的不动点分别为 $b/(1-a)$ 及 $d/(1-c)$. 现有 $f\circ g=g\circ f$，且

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(cx+d)=acx+ad+b$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)=acx+bc+d$$

故有 $$acx+ad+b=acx+bc+d$$

所以 $$\frac{b}{1-a}=\frac{d}{1-c}$$

即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有共同的不动点. 因为 f 和 g 是 G 中异于单位元的任意函数，只要令 $b/(1-a)=k$，则对于 G 中的所有函数，k 是它们的共同不动点.

证法 2　首先，证明

$$f(x)=x+b\in G\Rightarrow b=0 \quad ①$$

事实上，由(3)可知，有一 x_f 使 $f(x_f)=x_f+b=x_f$，于是 $b=0$.

其次，证明若 $f(x)=ax+b\in G$，则 b 由 a 惟一确定.

事实上，如果 $g_1(x)=ax+b_1$，$g_2(x)=ax+b_2$ 是 G 中的两个函数，由(1)，(2)可知

$$g_1^{-1}(g_2(x))=\frac{(ax+b_2)-b_1}{a}=x+\frac{b_2-b_1}{a}$$

也是 G 中的函数. 又由 ① 可知 $b_1=b_2$.

最后证明：存在一个数 k，使得对一切 $f(x)=ax+b\in G$ 恒有 $f(k)=k$. 事实上，由上面的讨论可知，当 $a=1$ 时，G 中的函数 $f(x)=x$，显然对一切数 k 都有 $f(k)=k$. 再设 $m(x)=ax+b$，$n(x)=cx+d$ 是 G 中的任意两个函数，并且 $a\neq 1$，$c\neq 1$. 由(3)可知，存在 x_m，x_n 使

$$ax_m+b=x_m,cx_m+d=x_n$$

即 $$x_m=-\frac{b}{a-1},x_n=-\frac{d}{c-1}$$

又由(2)可知

$$m(n(x)) = acx + ad + b$$
$$n(m(x)) = acx + bc + d$$

也是 G 中的函数,并且必有

$$ad + b = bc + d$$

从而 $$-\frac{b}{a-1} = -\frac{d}{c-1}$$

因此可得 $$k = x_m = x_n$$

瑞典命题

6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正数,q 是小于 1 的正实数,求 n 个数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 使适合下列条件:

(1) $a_k < b_k, k = 1,2,\cdots,n$;

(2) $q < b_{k+1}/b_k < 1/g, k = 1,2,\cdots,n-1$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k < \frac{1+g}{1-g}\sum\limits_{k=1}^{n} a_n$.

解法 1 首先把原题略为改变如下.

* 设$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是 n 元向量,其中各分量 a_i 是非负实数.求向量$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$使适合条件(1),(2)和(3),但所有符号"<"用"≤"替换.

设对于向量 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 及 $\boldsymbol{A}' = (a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$,题 * 的解分别是 $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 及 $\boldsymbol{B}' = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_n)$,则不难看出,对于向量 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}'$ 及 $C\boldsymbol{A}$(C 是正实数),题 * 的解是 $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}'$ 及 $C\boldsymbol{B}$.所以,如果对于单位向量

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,0,\cdots,0)$$
$$\boldsymbol{u}_2 = (0,1,0,\cdots,0)$$
$$\boldsymbol{u}_3 = (0,0,\cdots,0,1)$$

我们能够求得题 * 的解,则对于由这些向量用加法及实数与向量的乘法所得到的任意向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,我们也能够求得题 * 的解.

现在我们先对 $\boldsymbol{u}_1$ 求出适合题 * 各条件的 b_k.

当 $k = 1$ 时,由(1)可知 1 是 b_1 的最小可能值,而当 $k > 1$ 时,任何正数 b_k 皆能满足 $a_k \leqslant b_k$.

至于满足 $qb_k \leqslant b_k$ 的各 b_j 的最小值,可取

$$b_1 = 1, b_2 = q, b_3 = q^2, \cdots, b_n = q^{n-1}$$

因为 $$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k < \frac{1}{1-q} < \frac{1+q}{1-q}(1+0+\cdots+0)$$

可知这些 b_i 也满足(3).

同理,对于 $u_i = (0,\cdots,1,0,\cdots,0)$,其第 i 个分量为 1,其余各

分量皆为 0,可取

$$b_k = q^{k-i}, i < k; b_i = 1; b_k = q^{i-k}, i > k$$

现在向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$可写成

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$$

根据上面的论述,对于这个向量题 * 的解为

$$a_1(1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}) + a_2(q, 1, q, \cdots, q^{n-2}) + \cdots + a_n(q^{n-1}, q^{n-2}, \cdots, q, 1)$$

用$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$表示这个解,则

$$b_1 = a_1 + qa_2 + q^2 a_3 + \cdots + q^{n-1} a_n$$
$$b_2 = qa_1 + a_2 + qa_3 + q^2 a_4 + \cdots + q^{n-2} a_n$$
$$b_3 = q^2 a_1 + qa_2 + a_3 + qa_4 + \cdots + q^{n-3} a_n$$
$$\vdots$$
$$b_n = q^{n-1} a_1 + q^{n-2} a_2 + \cdots + a_n \quad ①$$

最后,我们将证明 ① 中 n 个数 b_k 也是原题的解,即这些数也满足含有不等号"<"的三个条件.

(1) 因为所有 a_j 和 q 都是正数,所以

$$b_k = q^{k-1} a_1 + \cdots + qa_{k-1} + a_k + qa_{k+1} + \cdots + q^{n-k} a_n > a_k$$

(2) 我们先比较 qb_k 和 b_{k+1},即

$$qb_k = q^k a_1 + \cdots + q^2 a_{k-1} + qa_k + q^2 a_{k+1} + \cdots + q^{n-k+1} a_n$$
$$b_{k+1} = q^k a_1 + q^{k-1} a_2 + \cdots + qa_k + a_{k+1} + \cdots + q^{n-k-1} a_n$$

qb_k 和 b_{k+1} 的首 k 项相等,自第 $k+1$ 项起,因 $0 < q < 1$,b_{k+1} 各项大于 qb_k 的对应项.故有 $b_{k+1} > qb_k$ 或 $q < b_{k+1}/b_k$.

又以 $1/q$ 乘 b_k 各项得

$$\frac{1}{q} b_k = q^{k-2} a_1 + \cdots + a_{k-1} + \frac{1}{q} a_k + a_{k+1} + \cdots + q^{n-k-1} a_n$$

以上最后 $n-k$ 项和b^{k+1}的对应项相等,但首 k 项则大于b_{k+1}的对应项.故有 $b_k/q > b_{k+1}$ 或 $b_{k+1}/b_k < 1/q$.

(3) 把 ① 中各式相加,左边是$\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$,右边可写成

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n$$

这里 C_j 是 ① 右边第 j 列 a_j 的系数和.显然每个 C_j 小于

$$C = 1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^{n-1} = 1 + 2q(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2}) < 1 + 2q/(1-q) = (1+q)/(1-q)$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} C_k a_k < C \sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{1+q}{1-q} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

所以 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 适合题述的所有条件.

解法2 令

$$b_k = a_1q^{k-1} + \cdots + a_{k-1}q + a_k + a_{k+1}q + \cdots + a_nq^{n-k}$$
$$k = 1,2,\cdots,n$$

则恒有 $b_k > a_k$.

再者,对于 $k = 1,\cdots,n-1$.有

$$qb_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2-1) + \cdots + a_nq^{n-k-1}(q^2-1) < 0$$

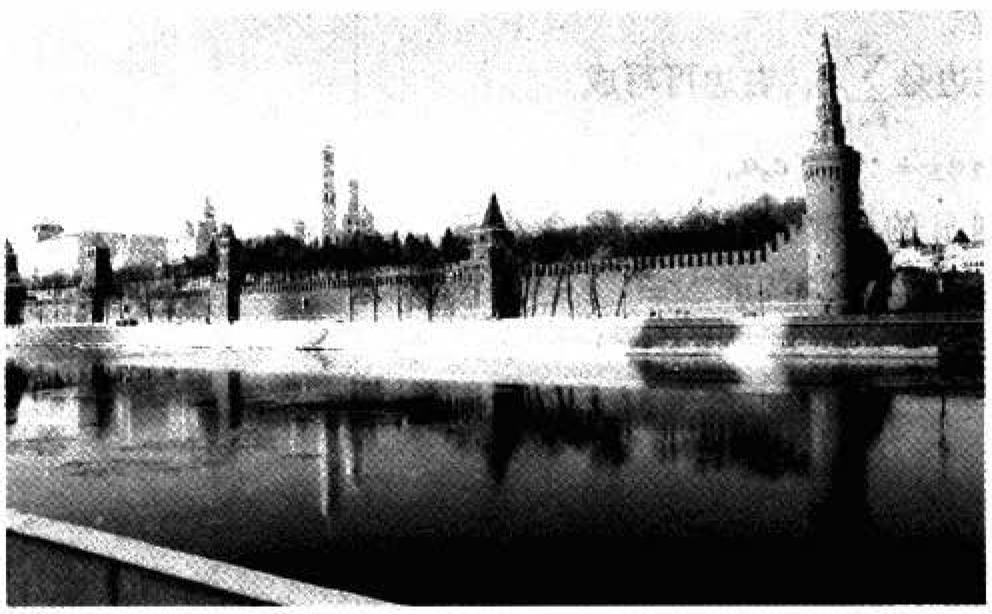
以及 $qb_{k+1} - b_k = a_1q^{k-1}(q^2-1) + \cdots + a_k(q^2-1) < 0$

于是对从 1 到 $n-1$ 的一切 k 有

$$q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$$

又

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_n = & a_1 + a_2q + a_3q^2 + \cdots + a_nq^{n-1} + \\ & a_1q + a_2 + a_3q + \cdots + a_nq^{n-2} + \\ & a_1q^2 + a_2q + a_3 + \cdots + a_nq^{n-3} + \cdots + \\ & a_1q^{n-1} + a_2q^{n-2} + a_3q^{n-3} + \cdots + a_n < \\ & (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \cdot \\ & (1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^{n-1}) = \\ & (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\left(2\frac{1-q^n}{1-q} - 1\right) = \\ & (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\frac{1+q-2q^n}{1-q} < \\ & (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\frac{1+q}{1-q} \end{aligned}$$



克里姆林宫

第 16 届国际数学奥林匹克

民主德国,1974

1 A,B,C三人做游戏,玩法如下:三张卡片上各写上一个不同的正整数 p,q,r 且满足 $0<p<q<r$,把这三张卡片搅乱后,再随意分给每人一张,然后照卡片上的数字发给每人弹子,再收回三张卡片搅乱,而弹子仍留给这三人.

这手续(搅乱卡片、分配、给弹子)至少发生两轮,最后一轮结束后,A,B,C分别得到20,10,9个弹子,且已知B最后一轮得到 r 个弹子,问哪一个人第一轮得到 q 个弹子?

美国命题

解 设 $N\geqslant 2$ 为他们所玩的轮数,每轮共发 $p+q+r$ 个弹子,各玩 N 轮,依题意便得到 $N(p+q+r)=39$. 由于 p,q,r 是不相等的正整数,故 $p+q+r\geqslant 6$. 因39的素因数分解为 $39=3\times 13$,故有

$$p+q+r=13, N=3$$

已知最后一轮B得到 r 个弹子,而他最后结束共得10个弹子. 因此他在前二轮中都不能得 r 个或 q 个(否则,他的总弹子数就不少于13个,此与已知矛盾),这就说明了B在三轮中得到弹子为 p,q,r 个.

由于C所得总弹子数是9个,他在前二轮都不可能得到 r 个弹子(否则,如有一次得 r 个,他所得总的弹子数便不少于B的总弹子数10个,这也与已知矛盾). 因此,C在前二轮中得到弹子为 q 个,从而A在前二轮中得到弹子为 r 个. 如果A最后一轮得 p 个弹子,则A,B所得弹子之差为 $r-p=10$,但由于 $r>q>p>0$,及 $p+q+r=13$,可知 $r-p$ 不大于9. 因此,A最后一轮所得弹子不能是 p 个,而只能是 q 个. 总之,A,B,C所得弹子如下表.

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	r	r	q
B	p	p	r
C	q	q	p

由题意得

$$r + r + q = 20, p + p + r = 10, q + q + p = 9$$

解得 $p = 1, q = 4, r = 8$. 由此可知C在第一轮得到 $q = 4$ 个弹子.

2 设 α, β, γ 为 $\triangle ABC$ 中对应于顶点 A, B, C 的三个内角. 试证:能在线段 AB 上取得一点 D,使 CD 成为 AD 和 BD 的比例中项的充要条件是

$$\sin \beta \cdot \sin \alpha \leqslant \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

芬兰命题

证法 1 作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O,设其半径为 R. 又在 AB 上任取一点 D,设 CD 的延长线交外接圆于 E,如图 16.1 所示,可得 $CD \cdot DE = AD \cdot DB$. 由此推出 CD 为 AD 和 DB 的比例中项的充要条件是 $CD = DE$. 换言之,要求满足命题性质的点 D,等价于在圆周上找到一点 E 使得线段 CE 恰好被 AB 所平分. 但要在圆周上找出这样的一点 E,当且仅当 $CF \leqslant HG$,这里 CF 是 $\triangle ABC$ 的高,而 HG 是 $\angle C$ 对弧 $\overset{\frown}{AHB}$ 在弦 AB 上的高. 然而

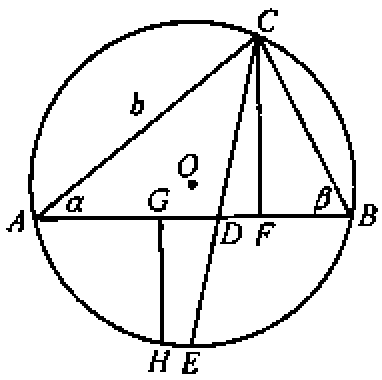


图 16.1

$$CF = b \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

且 $GH \leqslant MN = ON - OM = R - R \cdot \cos \gamma = 2R \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}$

如图 16.2 所示,图中半径 $ON \perp AB$ 交 AB 于 M. 所以

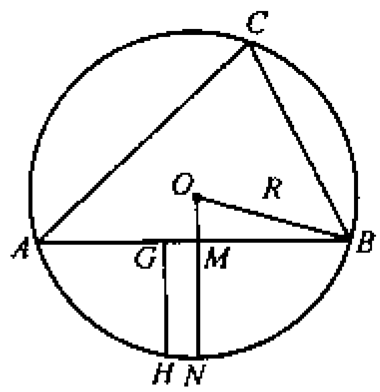


图 16.2

$$CF \leqslant 2R \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

所以

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \leqslant \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

证法 2 如图 16.3 所示,设 D 是线段 AB 上的任意点,$\gamma_1 = \angle ACD, \gamma_2 = \angle BCD$. 则由正弦定理得

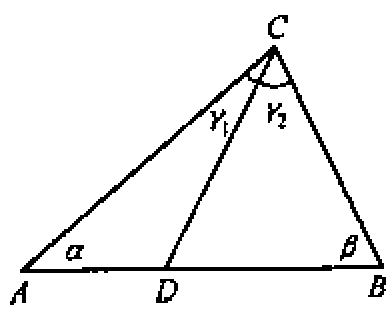


图 16.3

$$\frac{CD}{DA} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1}, \frac{CD}{DB} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma_2}$$

两式相乘得

$$\frac{CD^2}{DA \cdot DB} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2}$$

若

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2$$

或

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos(\gamma_1 + \gamma_2)) \quad ①$$

则 D 恰能满足题目的要求.

如具有题述性质的点 D 存在,由 ① 可见,所证明的关系式成立. 反之,如这一关系式成立,即

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos\gamma)$$

则可以找到 $\gamma_1\gamma_2$，而 $0<\gamma_1,\gamma_2<\gamma$，且 $\gamma_1+\gamma_2=\gamma$，使得 ① 成立，并得到具有给定性质的点 D. 事实上，为了满足 ①，要解方程

$$\cos(\gamma_1-\gamma_2)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\gamma \qquad ②$$

而得出 $\gamma_1-\gamma_2$. 由 ② 这是能做到的，因为可推出 $\cos(\gamma_1-\gamma_2)\leqslant 1$. 若 δ 是在 0° 与 180° 之间的一解，$\cos\delta=2\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\gamma$，则有 $0\leqslant\delta<\gamma$，而 $\gamma_1-\gamma_2=\delta$ 或 $\gamma_2-\gamma_1=\delta$. 这样就有

$$\gamma_1=\frac{\gamma+\delta}{2},\gamma_2=\frac{\gamma-\delta}{2}$$

而
$$\frac{\gamma}{2}\leqslant\gamma_1<\gamma,0<\gamma_2\leqslant\frac{\gamma}{2}$$

或者
$$\gamma_1=\frac{\gamma-\delta}{2},\gamma_2=\frac{\gamma+\delta}{2}$$

而
$$0<\gamma_1\leqslant\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}\leqslant\gamma_2<\gamma$$

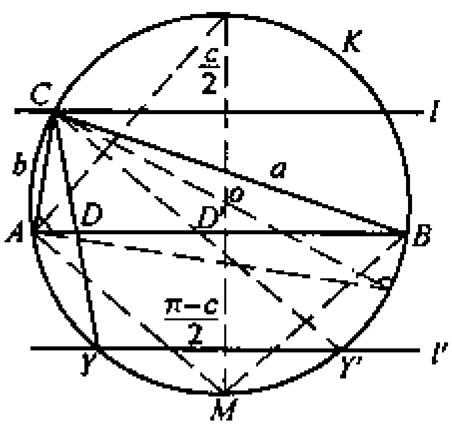


图 16.4

证法 3 如图 16.4 所示，过 C 引 l // AB，又引 l' // AB 使 AB 位于 l,l' 中间. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆 K. 我们证明所求的点 D 是存在的. 设且仅设 l' 与圆 K 相交(或相切). 若 Y 为 l' 与圆 K 的一公共点，则弦 CY 交弦 AB 于 D，且

$$CD\cdot DY=AD\cdot DB$$

既然 C 与 Y 是在 l 与 l' 上，当然 D 是在 AB 上，便得 $DY=CD$，故 $CD^2=AD\cdot DB$. 若 l' 与圆 K 不相交，则无这样的点 Y.

设 $\overset{\frown}{AB}$ 不含 C，其中点为 M. 很明显，l' 与 K 相交(或相切)当且仅当 M 至 AB 的距离大于等于 C 到 AB 的距离，即 $S_{\triangle ABM}\geqslant S_{\triangle ABC}$，或

$$\frac{1}{2}AM\cdot BM\cdot\sin(\pi-C)\geqslant\frac{1}{2}ab\cdot\sin C \qquad ③$$

其中，a,b 表示 BC 与 AC 的长. 又 $AM=BM$，且 $\sin(\pi-C)=\sin C$，故 ③ 化成

$$AM^2\geqslant ab \qquad ④$$

设 R 为圆 K 的半径，并注意到

$$AM=2R\cdot\sin\frac{C}{2},a=2R\cdot\sin A,b=2R\cdot\sin B$$

把这些代入 ④ 并且两边同除以 $4R^2$，便得所求的条件为

$$\sin^2\frac{C}{2}\geqslant\sin A\cdot\sin B$$

注意等式成立当且仅当 l' 切于圆 K，在这一情形下，在 AB 上仅有一点 D 使 $AD\cdot DB=CD^2$.

罗马尼亚命题

3 试证:对于任何自然数 n,下面的和数不能被 5 整除.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}$$

证法 1 记

$$A_m=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}\binom{m}{2k+1},0<2k+1<m$$

$$B_m=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}\binom{m}{2k},0<2k<m$$

当 m 为大于 1 的奇数时,A_m 便是满足命题条件的和数,利用已知的等式

$$\binom{m}{l+1}+\binom{m}{l}=\binom{m+1}{l+1}$$

易验证,当 $m\geqslant 1$ 时,成立着

$$A_m+B_m=A_{m+1},8A_m+B_m=B_{m+1} \quad ①$$

现用归纳法证明:当 m 为奇数时,A_m 不能被 5 整除,而当 m 为偶数时,B_m 不能被 5 整除.由于 $A_1=1,A_2=11,B_2=9$,故对一切 $m\leqslant 3$,命题成立.现设 $i>3$,对一切 $m\leqslant i$ 命题成立,现证对一切 $m\leqslant i+1$ 命题亦真.事实上,应用 ① 若干次,得到

$$A_{m+3}=A_{m+2}+B_{m+2}=9A_{m+1}+2B_{m+1}=5(5A_m+2B_m)+B_m$$

$$B_{m+3}=5(17A_m+5B_m)+3A_m$$

由此推出,特别地,命题中的和数对任何自然数 n 不能被 5 整除.

证法 2 利用数论知识证明.

所给的和以 x 表示,则通过变形可得

$$x=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}=\frac{1}{\sqrt{8}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1} \quad ②$$

另外,和

$$y=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(\sqrt{8})^{2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}2^{3k} \quad ③$$

同样是整数.

② 与 ③ 相加、相减,并利用二项式定理可得

$$\sqrt{8}x+y=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\sqrt{8})^k=(\sqrt{8}+1)^{2n+1} \quad ④$$

$$\sqrt{8}x-y=-\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k(\sqrt{8})^k=(\sqrt{8}-1)^{2n+1} \quad ⑤$$

④ 与 ⑤ 相乘,得

$$8x^2 - y^2 = (8-1)^{2n+1} = 7^{2n+1}$$

由于
$$8 \equiv 3 (\bmod 5), 7 \equiv 2 (\bmod 5)$$
$$7^2 \equiv -1 (\bmod 5), 7^{2n} \equiv (-1)^n (\bmod 5)$$

由上式可推得(mod 5)的同余关系
$$3x^2 - y^2 \equiv 2 \cdot 7^{2n} \equiv 2 \cdot (-1)^n (\bmod 5)$$

这样
$$3x^2 \equiv y^2 + 2 \cdot (-1)^n (\bmod 5) \quad ⑥$$

今有 $0^2 \equiv 0(\bmod 5), 1^2 \equiv 4^2 \equiv 1(\bmod 5), 2^2 \equiv 3^2 \equiv -1(\bmod 5)$，这样，就绝没有 $y^2 \equiv 2(\bmod 5)$ 与 $y^2 \equiv -2(\bmod 5)$. 因此，由⑥可知也绝没有 $3x^n \equiv 0(\bmod 5)$，此即给定的 x 对任何自然数 n 不能被5整除.

4 把一个 8×8 的棋盘(指国际象棋棋盘)剪成 p 个矩形，但不能剪坏任何一格，而且这种剪法还必须满足如下条件：

(1) 每一个矩形中白格和黑格的个数相等；

(2) 若 a_i 是第 i 个矩形中的白格的个数，则
$$a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots < a_p$$
求出使上述剪法存在的 p 的最大可能值，同时对这个 p 求出所有可能的序列
$$a_1, a_2, \cdots, a_p$$

保加利亚命题

解法1 如图16.5所示，因这棋盘有32个白格，故有
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 32$$
又 $a_1 \geqslant 1, a_2 \geqslant 2, \cdots, a_p \geqslant p$ 故得
$$32 \geqslant 1 + 2 \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

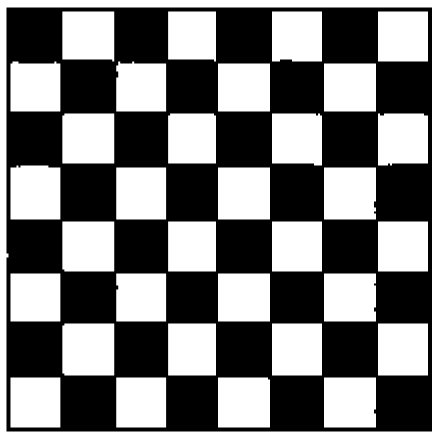


图16.5

因而有 $p^2 + p \leqslant 64$，所以 $p \leqslant 7$. 这证明所求的分割最多有7个矩形. 要证明分割为7个矩形是存在的，并求出它们的全体，为此，我们只须求7个相异整数使其和为32，下面是它的所有可能的情况.

ⅰ $1+2+3+4+5+6+11$;

ⅱ $1+2+3+4+5+7+10$;

ⅲ $1+2+3+4+5+8+9$;

ⅳ $1+2+3+4+6+7+9$;

ⅴ $1+2+3+5+6+7+8$.

情况ⅰ不能实现，因为在 8×8 的格子棋盘中不存在22个方格的矩形. 其余的情况都能实现，其相应的分割如图16.6(a) ~ (d) 所示.

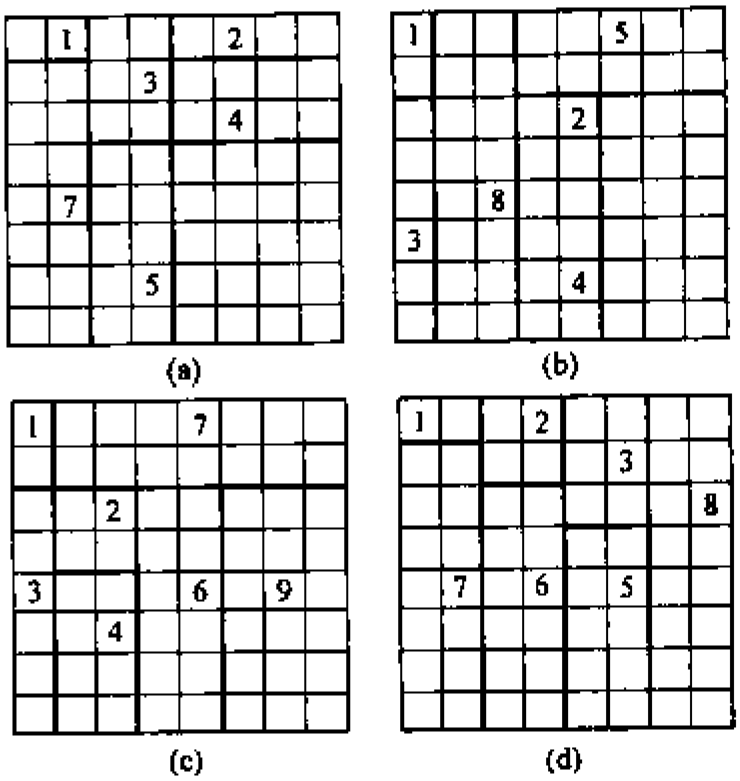


图 16.6

解法 2 设第一个矩形为最小的矩形，含有 a_1 个白色格子；第二个矩形为次小的矩形，含有 a_2 个白色格子；以此类推，第 p 个矩形为最大的矩形，含有 a_p 个白色格子，如图 16.7 ~ 16.10所示. 这样，就有

$$pa_1+(p-1)(a_2-a_1)+(p-2)(a_3-a_2)+\cdots+1(a_p-a_{p-1})=32 \quad ①$$

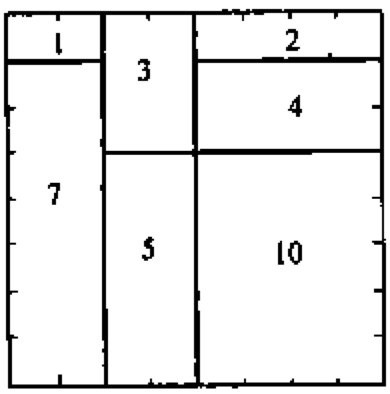


图 16.7

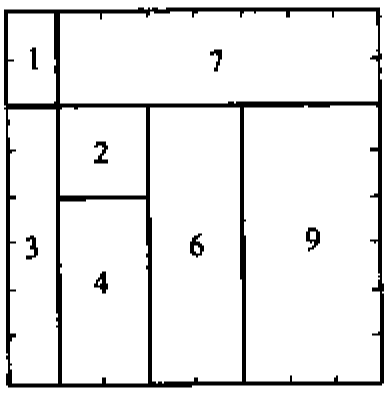


图 16.8

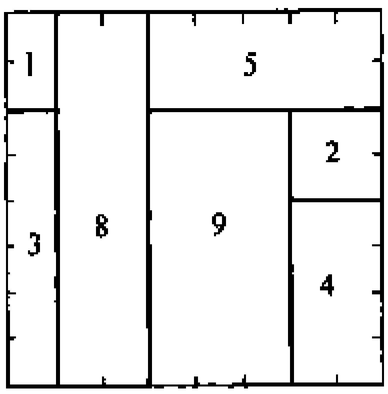


图 16.9

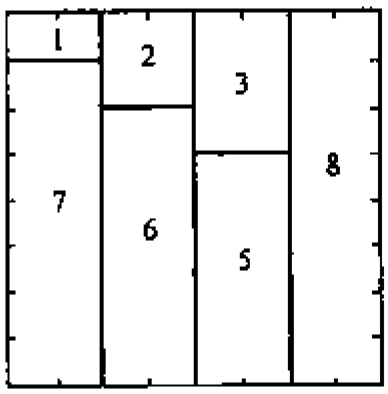


图 16.10

因为划分的矩形个数越多,就要求每个矩形所含白色格子数越少,故当

$$a_1=1,a_i-a_{i-1}=1,i=2,3,\cdots,p$$

时,p 有最大值.于是,① 变为

$$p+(p-1)+(p-2)+\cdots+1=32$$

$$\frac{p(p+1)}{2}=32$$

$$p^2+p-64=0$$

解之,得 $$p=\frac{-1\pm\sqrt{257}}{2}$$

因为 p 为正整数,所以符合问题要求的最大值 $p=7$(其余部分同解法1).

5 求和数

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$

的值域,其中 a,b,c,d 是任意正实数.

荷兰命题

解法1 容易看出和数 S 关于 a,b,c,d 是齐零次的,亦即若把 a,b,c,d 分别乘以同一个系数后,S 的值不变.因此,如果只考查具有关系 $a+b+c+d=1$ 的定义域部分,这不会缩小和数的值域.令

$$a+c=x,b+d=y$$

且 $$x>0,y>0,x+y=1$$

考查和数

$$S_1=\frac{a}{a+b+d}+\frac{c}{b+c+d}=\frac{a}{1-c}+\frac{c}{1-a}=\frac{2ac+x-x^2}{ac+1-x}$$

当固定 x 时,若 (a,c) 满足 $a+c=x$ 的全部正数对,那么不难验证,它的积 ac 是0和 $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}$ 之间的一切实数,精确地说,即

$$0<ac\leqslant\frac{x^2}{4}$$

但表达式 $$S_1=\frac{2ac+x-x^2}{ac+1-x}=2+\frac{3x-2-x^2}{ax+1-x}$$

中分式项可作为 ac 的函数,单调变化,故 S_1 可取到半开区间 $\left(x,\frac{2x}{2-x}\right]$ 内的全部值.

同理可证,当 y 固定时

$$S_2 = \frac{b}{a+b+c} + \frac{d}{a+c+d}$$

取到$\left(y,\frac{2y}{2-y}\right]$内的一切值,从而和数 S 取到半开区间

$$\left(x+y,\frac{2x}{2-x}+\frac{2y}{2-y}\right] = \left(1,\frac{4-4xy}{2+xy}\right]$$

内的一切值.

现在 x 和 y 取满足关系 $x+y=1$ 的一切正数,则通过上述相仿的讨论,表达式$\frac{4-4xy}{2+xy}$ 取到半开区间$\left[\frac{4}{3},2\right)$内的全部数值.由此得到 S 的值域是$(1,2)$.

解法 2 显然地

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$$

设 d 为四数 a,b,c,d 中的最大数,则

$$S \leqslant \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} + \frac{d}{a+c+d} = 1 + \frac{d}{a+c+d} < 1+1 = 2$$

故 $1 < S < 2$.

其次,我们要证明 S 确实可取遍开区间$(1,2)$中的一切值.首先我们看到 S 在正数 a,b,c,d 连续变化.因此,如我们能指出 S 任意取值接近于这区间的端点 1 与 2,那么我们就证明了 S 可取遍 1 与 2 间的一切值.

令 $a=1,b=\varepsilon,c=d=\varepsilon^2$,其中 $\varepsilon>0$,则

$$S = \frac{1}{1+\varepsilon+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon+2\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{1+2\varepsilon^2}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时,第一项趋近于 1,其他各项趋近于 0,故 $S\to 1$.

再次,令 $a=c=1,b=d=\varepsilon$,则

$$S = \frac{1}{1+2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} + \frac{1}{1+2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时,第一与第三项趋近于 1,而第二与第四项趋近于 0,故 $S\to 2$.

解法 3 将题中所给的表达式的右端记为 $f(a,b,c,d)$.

先大致估计一下 S 的上界和下界.由下面两个不等式

$$f(a,b,c,d) < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2$$

$$f(a,b,c,d) > \frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1$$

可知

$$1 < S < 2 \quad ①$$

因而,所求的 S 的取值范围包含在开区间(1,2) 内.

下面来证明:对于每一个 $y \in (1,2)$,总存在正实数 a,b,c,d,使 $f(a,b,c,d)=y$.

因为 y 是满足条件 $1<y<2$ 的任意固定的数,所以存在一个小正数 $\delta>0$,使得

$$1+\delta < y < 2-\delta \quad ②$$

取 $\delta=\frac{1}{2}\min\{2-y,y-1\}$,则显然有 $0<\delta\leqslant\frac{1}{4}$,如图16.11所示.

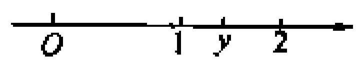


图 16.11

再考虑变数 t 的函数

$$F(t)=f\left(1,\frac{\delta}{4}+t\left(1-\frac{\delta}{4}\right),1+t\left(\frac{\delta}{4}-1\right),\frac{\delta}{4}\right) \quad ③$$

其中,$0\leqslant t\leqslant 1$.由于

$$1>0,\frac{\delta}{4}+t\left(1-\frac{\delta}{4}\right)\geqslant\frac{\delta}{4}>0$$

$$1+t\left(\frac{\delta}{4}-1\right)=1-t+\frac{\delta}{4}t>0,\frac{\delta}{4}>0$$

所以,只要 $0\leqslant t\leqslant 1$,总有正实数

$$a=1,b=\frac{\delta}{4}+t\left(1-\frac{\delta}{4}\right),c=1+t\left(\frac{\delta}{4}-1\right),d=\frac{\delta}{4}$$

使得

$$F(t)=f(a,b,c,d)$$

由 ② 又可知

$$F(0)=f\left(1,\frac{\delta}{4},1,\frac{\delta}{4}\right)=\frac{1}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+1}+\frac{1}{\frac{\delta}{4}+1+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+1+\frac{\delta}{4}}=\frac{2}{1+\frac{\delta}{2}}+\frac{\frac{\delta}{2}}{2+\frac{\delta}{4}}>\frac{2}{1+\frac{\delta}{2}}=\frac{2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{1-\frac{\delta^2}{4}}>2-\delta>y$$

$$F(1)=f\left(1,1,\frac{\delta}{4},\frac{\delta}{4}\right)=\frac{1}{1+1+\frac{\delta}{4}}+\frac{1}{1+1+\frac{\delta}{4}}+$$

$$\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}=$$

$$\frac{2}{2+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{2}}{1+\frac{\delta}{2}}<1+\frac{\delta}{2}<1+\delta<y$$

从而
$$F(1)<y<F(0)$$

因为 $F(t)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数,所以至少有一个 $t_0\in[0,1]$ 使 $F(t_0)=y$.亦即

$$f\left(1,\frac{\delta}{4}+t_0\left(1-\frac{\delta}{4}\right),1+t_0\left(\frac{\delta}{4}-1\right),\frac{\delta}{4}\right)=y$$

这就证明了,S 可以取区间(1,2)内的一切值.

瑞典命题

6 设 $p(x)$ 是非常数的整系数多项式,$n(p)$ 表示满足 $(p(k))^2=1$ 的所有不同整数 k 的个数,证明

$$n(p)-\deg(p)\leqslant 2$$

其中,$\deg(p)$ 是多项式 $p(x)$ 的次数.

证法 1 首先假定每一个多项式 $p(x)-1$ 和 $p(x)+1$ 有不少于三个不同的整根,且它们都是彼此相异的.在这六个整数中,取其最小的一个记之为 a.不失一般性,不妨设 a 是多项式 $p(x)+1$ 的根,于是可置

$$p(x)+1=(x-a)Q(x)$$

其中,$Q(x)$ 也是一个整系数多项式.

设 p,q,s 为多项式 $p(x)-1$ 的三个不同的整根,由于已取定了 a,故这三个数都大于 a.但

$$p(x)-1=(x-a)Q(x)-2$$

从而 $2=(p-a)Q(p)=(q-a)Q(q)=(s-a)Q(s)$

其中,$p-a,q-a,s-a$ 为三个不同的正整数.但此时,在这三个数中总有一个数要大于 2,显然,这个大于 2 的整数不可能是 2 的整因子.

这样,由此矛盾说明我们的假定是错误的,换言之,方程 $p(x)=1$ 和 $p(x)=-1$ 中总有一个方程其整根的个数小于或等于 2.又因这两个方程中,每一方程的整根个数不能超过 $\deg(p)$,于是证得要求的不等式.

证法 2 本题可重述如下:设 $p(x)$ 为一个 d 次整系数多项

式，证明方程

$$(p(x))^2 = 1 \quad ①$$

至多有 $d+2$ 个整数根. 方程 ① 可写成

$$(p(x))^2 - 1 = (p(x) - 1)(p(x) + 1) = 0 \quad ②$$

令

$$Q(x) = p(x) - 1$$

则

$$Q(x) + 2 = p(x) + 1$$

而本题变成：设 $Q(x)$ 为一个 d 次整系数多项式，证明方程

$$Q(x)(Q(x) + 2) = 0 \quad ③$$

至多有 $d+2$ 个整数根.

例 设 m 为整系数方程 $F(x) = 0$ 的一个整数根，则 $F(x) + p = 0$ 或 $F(x) - p = 0$，p 为素数，仅有的可能整数根为 $m - p$，$m - 1$，$m + 1$，$m + p$.

证明 因 $F(x) = 0$，$x - m$ 为 $F(x)$ 的一个因子，即

$$F(x) = (x - m)G(x)$$

故

$$F(x) \pm p = (x - m)G(x) \pm p$$

其中，$G(x)$ 为整系数多项式，故如对某整数 x，$F(x) \pm p = 0$，则

$$(x - m)G(x) \pm p = 0$$

或

$$(x - m)G(x) = \mp p$$

故 p 可被 $x - m$ 整除，又 p 的仅有约数为 ± 1 与 $\pm p$，故 $x - m = \pm 1$ 或 $\pm p$，故 $x = m + 1$ 或 $m - 1$ 或 $m + p$ 或 $m - p$，至此完成例题的证明.

今应用这例题(具有 $p = 2$)于 m 为 $Q(x)(Q(x) + 2) = 0$ 最少整数根的情形，设它有一个整数根，明确地令 m 为 $Q(x) = 0$ 的一个根. 则由例题，$Q(x) + 2 = 0$ 的仅有可能根为 $m + 1$ 与 $m + 2$. 因 $Q(x)$ 至多有 d 个根，$Q(x)(Q(x) + 2) = 0$ 至多有 $d + 2$ 个整数根.

证法 3 由于 $p(x)$ 不是常数，故 $\deg(p) \geqslant 1$. 从而

$$\deg(p^2) = 2\deg(p) \quad ④$$

根据代数学基本定理知

$$n(p) \leqslant \deg(p^2 - 1) = \deg(p^2) \quad ⑤$$

由 ④，⑤ 可得

$$n(p) - \deg(p) \leqslant \deg(p^2) - \deg(p) = \deg(p)$$

也就是说，当 $\deg(p) \leqslant 2$ 时，有 $n(p) - \deg(p) \leqslant 2$.

下面来证明：对于任何 $\deg(p) > 2$ 的多项式也有 $n(p) - \deg(p) \leqslant 2$.

用反证法. 假设结论不成立，即假设 $n(p) - \deg(p) > 2$，于是

$$n(p) \geqslant \deg(p) + 3 \quad ⑥$$

又设 $M_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 是满足条件 $p(x_i) = -1(i = 1, 2, \cdots, k)$ 的整数 x_i 的集合；$M_2 = \{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ 是满足条件 $p(y_j) = 1(j = 1,2,\cdots,l)$ 的整数 y_j 的集合，其中 $k + l = n(p)$. 显然，集合 M_1 和 M_2 不会含有公共元素. 我们来证明，集合 M_1 和 M_2 都是非空集合. 不然，如果 M_1, M_2 中有一个是空集，如 M_2 是空集，那么集合 M_1 含有 $n(p)$ 个元素，也就是说，多项式方程 $p(x) = -1$ 有 $n(p)$ 个根，由代数学基本定理可知，$n(p) \leqslant \deg(p)$，但是这与 ⑥ 矛盾.

再者，根据代数学基本定理还可以得出

$$k \leqslant \deg(p), l \leqslant \deg(p) \qquad ⑦$$

而由 ⑥,⑦ 又可得

$$k + l = n(p) \geqslant \deg(p) + 3 \geqslant k + 3$$

$$k + l = n(p) \geqslant \deg(p) + 3 \geqslant l + 3$$

从而可知 $k \geqslant 3, l \geqslant 3$.

因为集合 M_1 和 M_2 不含公共元素，所以整数 $x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_l$ 中的最小者只能在 M_1 或 M_2 之一中出现，不妨设这个最小数就是 x_1. 因为 $l \geqslant 3$，所以至少有一个 $j(1 \leqslant j \leqslant l)$ 使得

$$y_j - x_1 \geqslant 3 \qquad ⑧$$

由于 $p(x)$ 是整系数多项式，故 $p(x)$ 可记为

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中，$a_i(i = 0,1,\cdots,m)$ 是整数，$\deg(p) = m$. 设此多项式满足上面讨论中的要求，于是

$$p(x_1) = a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = -1$$

$$p(y_j) = a_m y_j^m + a_{m-1} y_j^{m-1} + \cdots + a_1 y_j + a_0 = 1$$

将两式相减，得

$$a_m(y_j^m - x_1^m) + a_{m-1}(y_j^{m-1} - x_1^{m-1}) + \cdots + a_1(y_j - x_1) = 2$$

在上式中，$a_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 都是整数，并且左端含有因子 $y_j - x_1$，所以 $y_j - x_1$ 可整除 2，从而

$$y_j - x_1 \leqslant 2 \qquad ⑨$$

但这与 ⑧ 矛盾. 这就证明了我们的命题.

第 17 届国际数学奥林匹克

保加利亚,1975

捷克斯洛伐克命题

1 设 $x_i, y_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 为实数,且 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$,又 $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$.证明:若 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的任一排列,则

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

证法 1 因为

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_iz_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

又

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_iz_i$$

所以,要证的不等式相当于不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_iz_i \qquad ①$$

式 ① 左边的和,其各项的因子 y_i 的大小次序是递降的,而右边和的各项的因子 z_i 则可能不是递降的,即可能在 x_kz_k 与 x_lz_l 的和中,当 $k < l$ 时,有

$$x_k \geqslant x_l \quad , \quad z_k < z_l \qquad ②$$

在这种情形下,我们交换 z_k 与 z_l,即用 $x_kz_l + x_lz_k$ 项代换 $x_kz_k + x_lz_l$,我们认为这样置换不会减少 ① 右边的和.因为由 ② 知,乘积

$$(x_k - x_l)(z_k - z_l) = x_kz_k + x_lz_l - (x_kz_l + x_lz_k) \leqslant 0$$

因此

$$x_kz_k + x_lz_l \leqslant x_kz_l + x_lz_k$$

经有限次如此交换,① 右边的和是用 $\sum_{i=1}^{n} x_iz'_i$ 代换,不会减少,这里 $z'_1 \geqslant z'_2 \geqslant \cdots \geqslant z'_n$.这样我们得 $z'_i = y_i$.因此 ① 右边的和小于等于 $\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$,这便证明该论断.

证法2 当 $n=1$ 时,命题显然成立.

假定当 $n=k$ 时,命题成立.

当 $n=k+1$ 时,我们考查 $\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-z_i)^2$,如果其中 $z_{k+1}=y_{k+1}$,则显然有

$$\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-z_i)^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-z_i)^2+(x_{k+1}+z_{k+1})^2\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2+(x_{k+1}-y_{k+1})^2=\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-y_i)^2$$

如果其中 $z_{k+1}\neq y_{k+1}$,不失一般性,设 $y_{k+1}=z_t(t\neq k+1)$,现在另外构造一个数列 $\{z'_i\}$,使得

$$z'_1=z_1,z'_2=z_2,\cdots,z'_t=z_{k+1},\cdots,z'_k=z_k$$

于是 $$\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-z_i)^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-z'_i)^2+(x_{k+1}-z_{k+1})^2+(x_t-z_t)^2-(x_t-z'_t)^2$$

从而 $$\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-z_i)^2-\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-y_i)^2=$$
$$\sum_{i=1}^{k}(x_i-z_i)^2-\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2+(x_{k+1}-z_{k+1})^2+$$
$$(x_t-z_t)^2-(x_t-z_{k+1})^2-(x_{k+1}-y_{k+1})^2\geqslant$$
$$(x_{k+1}-z_{k+1})^2+(x_t-y_{k+1})^2-(x_t-z_{k+1})^2-$$
$$(x_{k+1}-y_{k+1})^2=$$
$$2(x_tz_{k+1}+x_{k+1}y_{k+1}-x_{k+1}z_{k+1}-x_ty_{k+1})=$$
$$2(x_{k+1}-x_t)(y_{k+1}-z_{k+1})>0$$

即当 $n=k+1$ 时,命题仍然成立.证毕.

2 设 $a_1,a_2,\cdots$ 是一正整数序列,且对所有 $k\geqslant 1$ 有 $a_k<a_{k+1}$.证明:在上述序列中有无限多个 a_m 可用下式表示,即

$$a_m=xa_p+ya_q$$

其中,x,y 为适当的正整数且 $p\neq q$.

英国命题

证法1 据假设,有 $a_2>1$.因为对于模 a_2 只存在有限多个剩余类,故必有一个剩余类包含所给序列的一个无限多项的子序列.

设 a_p 是这子序列中大于a_2的最小项.由于所给序列的严格单调性,在子序列中必有无限多个 a_m,$a_m>a_p$,且

$$a_m\equiv a_p(\bmod a_2)$$

即存在适当的正整数 y 使下式成立,即

$$a_m = a_p + ya_2$$

所以，当 $x = 1, a_q = a_2$ 时，就能满足本题的要求，这是因为由 $a_p > a_2$ 还可得到 $p \neq q$.

证法 2 注意到 $a_2 > 1$，以 a_2 去除这数列 $\{a_n\}$ 中的各项 a_t $(t > 2)$，分别得到商 Q_t 和余数 r_t，于是有

$$a_t = Q_t a_2 + r_t, 0 \leq r_t \leq a_2 - 1$$

现在，我们把每一组余数 r_t 相同的 a_t，作为数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列 $\{br_t\}$，显然这样的子数列不超过 a_2 个. 不难证明，这些子数列中至少有一个是无穷数列. 事实上，如果它们都是有穷数列，则数列 $\{a_n\}$ 的项数等于这些数列的项数的总和加 2，也将是有穷数列，与题设矛盾.

不失其一般性，设这个无穷子数列的余数 $r_t = r$，则属于这个子数列的两项 $a_m, a_p(m > p > 2)$ 满足如下关系式，即

$$a_m = Q_m a_2 + r, a_p = Q_p a_2 + r$$

从而有

$$a_m - a_p = a_2(Q_m - Q_p)$$

注意到数列 $\{a_n\}$ 是严格递增的，因而满足条件 $m > p$ 的 $a_m > a_p$，同时 $Q_m > Q_p$，且这样的 a_m 是无限的.

现在取 $x = 1, y = Q_m - Q_p, a_q = a_2$，则得

$$a_m = xa_p + ya_q$$

由于 $p > 2$，则 $p \neq q$，完全符合题设条件，从而命题得证.

③ 在一个任意 $\triangle ABC$ 三边上，向外作 $\triangle ABR$，$\triangle BCP$ 和 $\triangle CAQ$，使 $\angle CBP = \angle CAQ = 45^\circ$，$\angle BCP = \angle ACQ = 30^\circ$，$\angle ABR = \angle BAR = 15^\circ$. 证明：$\angle QRP = 90^\circ$，且 $QR = RP$.

荷兰命题

证法 1 复数证法. 我们把 A, B, C, P, Q 与 R 看做复数平面上的点. 点与相应的复数用相同字母(复数以小写字母)表示.

不失一般性，设 $a = -1, b = +1$，P_1 与 Q_1 分别为从 P 与 Q 向 BC 与 CA 所作的垂线的垂足，如图 17.1 所示，则有

$$r = -\mathrm{i} \cdot \tan 15^\circ = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \mathrm{i}(\sqrt{3} - 2) \qquad ①$$

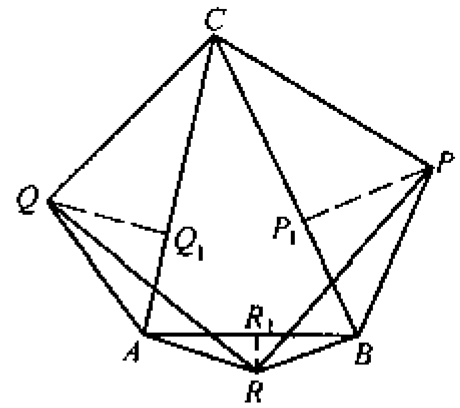


图 17.1

另外，由下列计算可得 p.

$$\frac{c - p_1}{p_1 - b} = \frac{\cot 30^\circ}{\cot 45^\circ} = \sqrt{3}$$

由

$$c - p_1 = c - b - (p_1 - b)$$

可得

$$p_1 - b = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}(c - b)$$

由 $p - b = \sqrt{2}(p_1 - b)(\cos(-45^\circ) + \mathrm{i} \cdot \sin(-45^\circ)), b = 1$

可得

$$p = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\mathrm{i})c - \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\mathrm{i}) + 1 \qquad ②$$

至于 q 的计算,我们现在只要注意到它是按正方向转过了 45°,以及 $a = -1$.所以可得

$$q = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+\mathrm{i})c + \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+\mathrm{i}) - 1 \qquad ③$$

由 ① 与 ② 得

$$p - r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\mathrm{i})c + \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad ④$$

由 ① 与 ③ 得

$$q - r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+\mathrm{i})c + \frac{\sqrt{3}-3}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad ⑤$$

由 ④ 与 ⑤ 直接可以看出

$$(p-r)\mathrm{i} = q - r$$

这表明 $|p-r| = |q-r|$,且 $q-r$ 是由 $p-r$ 旋转 90° 而得到的.所以证明了 $\angle QRP = 90°$ 与 $QR = PR$.

证法2　如图 17.2所示,$\angle AQC = \angle BPC = 105°$,$AR = BR$,$\angle ARB = 150°$.作 $RX \perp RB$ 使 $RX = RB$,并连结 AX.因 $\angle ARB = 150°$,$\angle XRB = 90°$,故 $\angle ARX = 60°$,这说明等腰 $\triangle ARX$ 是等边三角形.

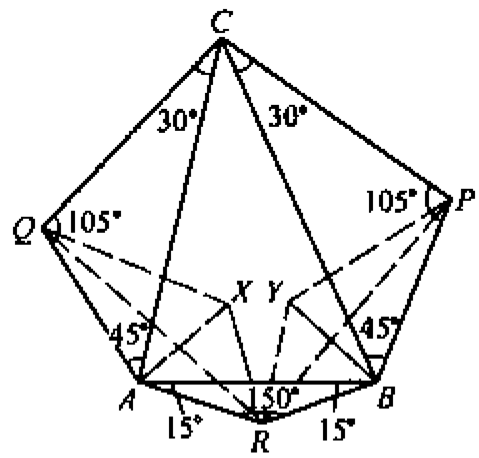


图 17.2

现有 $\angle XAQ = \angle A + 45°$,$\angle BAX = 60° - 15° = 45°$,故

$$\angle XAQ = \angle BAQ - \angle BAX = \angle A$$

应用正弦定理于 $\triangle ACQ$,得

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{\sin 30°}{\sin 105°} = \frac{\sin 30°}{\sin 75°} = \frac{2\sin 15° \cdot \cos 15°}{\cos 15°} = 2\sin 15°$$

于 $\triangle ABR$,得

$$\frac{AR}{AB} = \frac{\sin 15°}{\sin 150°} = \frac{\sin 15°}{\sin 30°} = \frac{\sin 15°}{\frac{1}{2}} = 2\sin 15°$$

因而得

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AX}{AB} = \frac{AQ}{AC} \qquad ⑥$$

于是有　$\frac{AX}{AQ} = \frac{AB}{AC}$,$\triangle AXQ \backsim \triangle ABC$

从而有　$\angle AQX = \angle C$,$\angle AXQ = \angle B$

于是　$\angle RBP = 15° + \angle B + 45° = 60° + \angle B$

但　$\angle RXQ = 60° + \angle AXQ = 60° + \angle B$

所以

$$\angle RBP = \angle RXQ \quad ⑦$$

如前,作 $RY \perp RA$ 使 $RY = RA$,又得等边 $\triangle BRY$. 仿上可得 $\triangle YBP \backsim \triangle ABC$,所以 $\triangle AXQ \backsim \triangle YBP$. 现在它们的对应边 $AX = YB$,故知 $\triangle AXQ \cong \triangle BYP$. 所以

$$XQ = BP \quad ⑧$$

把 $\triangle RBP$ 绕 R 旋转 $90°$ 到 $\triangle RXQ$,就得到 $RQ \perp RP$,并且 $RQ = RP$.

证法 3 如图 17.3 所示,在 AB 边上向外作正 $\triangle ABZ$,连结 RZ, CZ. 今 $\angle ZAR = 60° - 15° = 45°$,故 $\angle QAR = 60° + \angle A = \angle CAZ$. 如前证法,由 ⑥ 得

$$\frac{AQ}{AR} = \frac{AC}{AB}$$

因 $AB = AZ$. 故

$$\triangle AQR \backsim \triangle ACZ, \triangle BPR \backsim \triangle BCZ \quad ⑨$$

又因 $\triangle CAQ \backsim \triangle CBP$, $\frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{BP} = k$. 所以 ⑨ 中的两对三角形的相似比相等.

今把 $\triangle AQR$ 绕点 A 依顺时针方向转 $45°$,并按比 k 放大,而把 $\triangle BPR$ 绕 B 依逆时针方向转 $45°$,并按比 k 放大. 该变换把 QR 变为 CZ,并把 PR 也变为 CZ. 故 $QR = PR$,且夹成一个为 $2 \times 45° = 90°$ 的角,即 $QR \perp PR$.

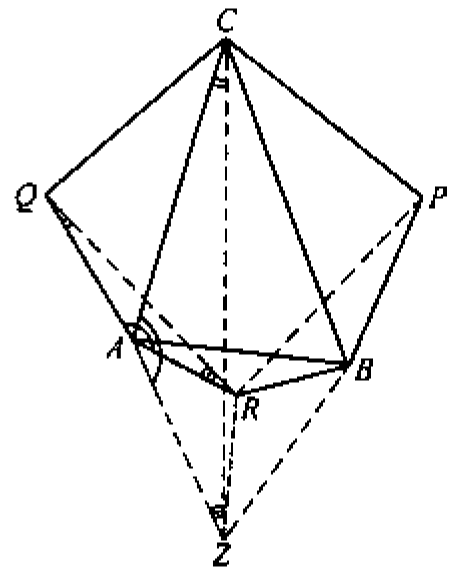


图 17.3

证法 4 如图 17.4 所示,设 $\triangle ABC$ 之三边为 a, b, c,三边所对之角依次为 A, B, C,外接圆半径为 R',由正弦定理,易得

$$BP = 4R' \cdot \sin 15° \cdot \sin A$$

$$CP = \frac{\sqrt{2}R' \cdot \sin A}{\cos 15°} = 4\sqrt{2}R' \cdot \sin 15° \cdot \sin A$$

$$AQ = 4R' \cdot \sin 15° \cdot \sin B$$

$$CQ = \frac{\sqrt{2}R' \cdot \sin B}{\cos 15°} = 4\sqrt{2}R' \cdot \sin 15° \cdot \sin B$$

又

$$AR = BR = 4R' \cdot \sin 15° \cdot \sin C$$

于是,在 $\triangle AQR$ 中,由

$$\angle QAR = 15° + A + 45° = 60° + A$$

有

$$RQ^2 = AR^2 + AQ^2 - 2AR \cdot AQ \cdot \cos(60° + A) = 16R'^2 \cdot \sin^2 15°(\sin^2 C + \sin^2 B - 2\sin B \cdot \sin C \cdot \cos(60° + A))$$

同理,在 $\triangle BPR$ 中

$$PR^2 = 16R'^2 \cdot \sin^2 15°(\sin^2 C + \sin^2 A - 2\sin A \cdot \sin C \cdot \cos(60° + B))$$

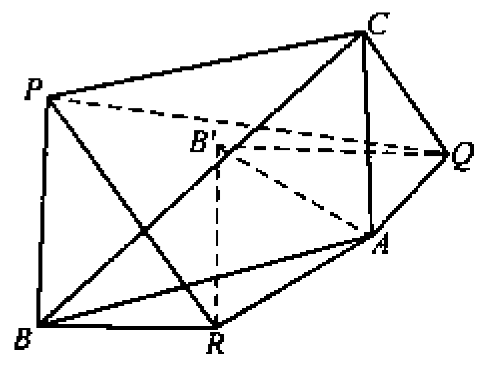


图 17.4

但 $2\sin A\cdot\sin C\cdot\cos(60^\circ+B)-2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos(60^\circ+A)=$

$\sin C(\sin(A+B+60^\circ)+\sin(A-B-60^\circ)-$

$\sin(B+A+60^\circ)-\sin(B-A-60^\circ))=$

$\sin C(-\sin(60^\circ-(A-B))+\sin(60^\circ+(A-B)))=$

$\sin C(2\cos 60^\circ\cdot\sin(A-B))=\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)=$

$\sin^2 A-\sin^2 B$

因此
$$\sin^2 A-2\sin A\cdot\sin C\cdot\cos(60^\circ+B)=\sin^2 B-2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos(60^\circ+A)$$

从而
$$\sin^2 C+\sin^2 A-2\sin A\cdot\sin C\cdot\cos(60^\circ+B)=\sin^2 C+\sin^2 B-2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos(60^\circ+A)$$

所以
$$PR^2=RQ^2,PR=RQ$$

又 $PR^2+RQ^2=2PR^2=32R^2\cdot\sin^2 15^\circ(\sin^2 C+\sin^2 A-2\sin A\cdot\sin C\cdot\cos(60^\circ+B))$

而在 $\triangle PCQ$ 中
$$PQ^2=CQ^2+CP^2-2CQ\cdot CP\cdot\cos(60^\circ+C)=32R'^2\cdot\sin^2 15^\circ(\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\cdot\sin B\cdot\cos(60^\circ+C))$$

仿上易证

$2\sin A\cdot\sin B\cdot\cos(60^\circ+C)-2\sin A\cdot\sin C\cdot\cos(60^\circ+B)=$

$\sin^2 B-\sin^2 C$

从而得 $PR^2+RQ^2=PQ^2$,所以 $\angle PRQ=90^\circ$.

4 设 A 是十进制数 $4\,444^{4\,444}$ 的各位数字的和,B 是 A 的各位数字的和,求 B 的各位数字的和(所有讨论的数都是在十进制数系中).

苏联命题

解 我们的题解将利用常用对数的若干基本性质及下面的补题:"任何十进制的整数 n 同它数字的和对于模 9 是同余的".

这个补题的证明如下.

以 $d_1,d_2,d_3,\cdots$ 表示 n 的个位数,十位数,百位数,…,则
$$n=d_1+10d_2+100d_3+\cdots+10^k d_{k+1}=d_1+d_2+9d_2+d_3+99d_3+\cdots+d_{k+1}+(10^k-1)d_{k+1}\equiv d_1+d_2+\cdots+d_{k+1}\pmod 9$$

因为 10^m-1 形各数均可被 9 除尽.补题证毕.

现在把数 $4\,444^{4\,444}$ 简记为 x,从这补题可推得
$$4\,444\equiv 16\equiv 7\pmod 9$$

故
$$4\,444^3\equiv 7^3\equiv 1\pmod 9$$

又因
$$4\,444=3\cdot 1\,481+1$$

故　$x = 4\,444^{4\,444} = 4\,444^{3(1\,481)} \cdot 4\,444 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 7 \pmod 9$

因此,这补题告诉我们

$$x \equiv A \equiv B \equiv B \text{ 的各位数字的和 } \equiv 7 \pmod 9$$

另一方面,设 $\lg x$ 为 x 的常用对数,则

$$\lg x = 4\,444 \lg 4\,444 < 4\,444 \lg 10^4 = 4\,444 \cdot 4$$

即

$$\lg x < 17\,776$$

今若一整数的常用对数小于 C,则该整数最多有 C 位数字.故 x 最多有 17 776 位数字.即使它们都是 9,x 数字的和最多是 $9 \cdot 17\,776 = 159\,984$.所以

$$A \leqslant 159\,984$$

在所有小于或等于 159 984 的自然数中,其数字的和为最大者是 99 999,故得 $B \leqslant 45$;又在小于或等于 45 的诸自然数中,39 有最大的数字的和,即 12.故 B 的数字的和小于等于 12.但不超过 12 且对模 9 与 7 同余的惟一自然数是 7.故 7 为本题的解.

5 找出并证明,是否可在单位圆周上找到 1 975 个点,使得其中任二点间的距离都是有理数.

苏联命题

解法 1　我们将证明确有无限多点在单位圆上,使其中任意二点间的距离为有理数.这些点是以单位圆的直径 AB 为公共斜边的直角三角形的顶点,如图 17.5 所示.

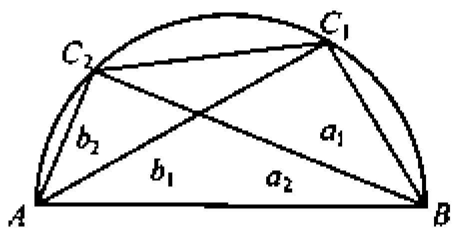


图 17.5

今有一个直角三角形具有有理数的边 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$,当我们把 a,b,c 皆乘以它们的公分母 d,所得的整数也满足勾股定理关系,即

$$(ad)^2 + (bd)^2 = (cd)^2$$

一组正整数 α,β,γ 如满足 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$,则称正整数 α,β,γ 为毕达哥拉斯三数组(或勾股数).这样的三数组可以作出无限多个,只要取任意自然数 m,n 且令

$$\alpha = 2mn, \beta = m^2 - n^2 \quad ①$$

则

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (m^2+n^2)^2, \gamma = m^2 + n^2$$

在我们的问题中,斜边是单位圆的直径,故其长为 2,我们把 α,β,γ"正规化",将各数除以 $\frac{1}{2}(m^2+n^2)$,便得有理数的长

$$a = \frac{4mn}{m^2+n^2}, b = \frac{2(m^2-n^2)}{m^2+n^2}, c = 2 \quad ②$$

每一对不同的互素自然数 m,n 产生一个不同的三数组 $a,b,2$,又因对有理数施行有理运算(加、减、乘、除)仍产生有理数,故我们可由②造出无限多个直角三角形,其二腰长为有理数 a 与 b,斜边长为 2,它们的顶点皆在这个单位圆上.

其次，我们指出若 $\triangle ABC_1$ 和 $\triangle ABC_2$ 为两个直角三角形，其两腰长均为有理数，斜边 AB 长为 2，则其顶点间距离 C_1C_2 也为有理数. 为此，我们将把 C_1C_2 用有理数结合有理运算表示. 我们可用两种不同的方法表示它.

(1) 考虑内接四边形 ABC_1C_2，如图 17.5 所示. 据托勒密定理"圆内接四边形两组对边乘积的和等于两对角线的乘积"，故

$$C_1C_2 \cdot AB + AC_2 \cdot AC_1 = AC_1 \cdot BC_2$$

或

$$C_1C \cdot 2 + b_2a_1 = a_2b_1$$

这里 a_i, b_i 表示 $\triangle ABC_i$ 二腰 BC_i, AC_i 的长. 由此可得 C_1C_2 有有理数值，即

$$C_1C_2 = \frac{1}{2}(a_2b_1 - a_1b_2)$$

(2) 把单位圆的圆心放在坐标原点，使直径 AB 在 x 轴上. 引 $C_1D \perp AB$ 于 D，如图 17.6 所示. 若 a 与 b 为有理数，顶点 C_1 有有理数坐标 (x_1, y_1). 这是因为

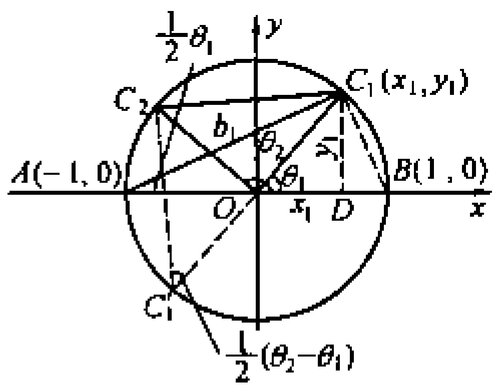


图 17.6

$$\triangle AC_1B \backsim \triangle ADC_1 \backsim \triangle C_1DB$$

则

$$\frac{1-x}{b} = \frac{b}{2} = \frac{y}{a}$$

故得 $x = \frac{b^2}{2} - 1, y = \frac{ab}{2}$. 因此坐标 x, y 皆为有理数. 设 θ_1 为 C_1O 与 OB 所成的角，则 $\angle C_1AB = \frac{1}{2}\theta_1$，且

$$\cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{1+x}{b}, \sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{y}{b} \quad ③$$

均为有理数. 如前，设 C_1 与 C_2 为"有理"三角形顶点，且令 $\theta_1 = \angle C_1OB, \theta_2 = \angle C_2OB$，引直径 $C_1OC'_1$ 与弦 $C_2C'_1$，并注意到 $\angle C_1OC_2 = \theta_2 - \theta_1$，则 $\angle C_1C'_1C_2 = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$，今在 $Rt\triangle C_1C_2C'_1$ 中

$$C_1C_2 = 2\sin(\frac{\theta_2}{2} - \frac{\theta_1}{2}) = 2(\sin\frac{\theta_2}{2} \cdot \cos\frac{\theta_1}{2} - \cos\frac{\theta_2}{2} \cdot \sin\frac{\theta_1}{2})$$

从 ③ 知此为有理数.

解法 2 在单位圆上，任意一点的坐标可设为 $(\cos\theta, \sin\theta)$，则二点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 与 $\theta(\cos\varphi, \sin\varphi)$ 的距离为

$$\begin{aligned} PQ = \sqrt{(\cos\theta - \cos\varphi)^2 + (\sin\theta - \sin\varphi)^2} = \\ \sqrt{2 - 2(\cos\theta \cdot \cos\varphi + \sin\theta \cdot \sin\varphi)} = \\ \sqrt{2(1 - \cos(\theta - \varphi))} = 2 \mid \sin\frac{1}{2}(\theta - \varphi) \mid \end{aligned}$$

要解本题，我们必须找出 1 975 个角 $\theta_1, \theta_2, \cdots$ 使

$$\sin\frac{1}{2}(\theta_k-\theta_j) \qquad ④$$

为有理数,从棣美弗公式

$$\cos n\theta+\mathrm{i}\cdot\sin n\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\cdot\sin\theta)^n$$

可知,若 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 均为有理数,则 $\cos n\theta$ 与 $\sin n\theta$ 对于 $n=1,2,\cdots$ 也为有理数.因此一切点

$$\cos 2k\theta+\mathrm{i}\cdot\sin 2k\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\cdot\sin\theta)^{2k},k=0,1,2,\cdots,N \qquad ⑤$$

均有有理坐标,又

$$\sin\frac{1}{2}(2k\theta-2j\theta)=\sin(k-j)\theta$$

为有理数,故这些点彼此间的距离也皆为有理数.余下要证明的即对于任何 N,θ 可以如此选择使 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 为有理数,或对于 ⑤ 的一切点均为相异的点.

ⅰ 设 a,b,c 为任意毕达哥拉斯三数组,例如 3,4,5;则 $\cos\theta=\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$,$\sin\theta=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$ 为有理数.

ⅱ 要证明当 $\theta=\arccos\frac{a}{c}$ 时,对于 ⑤ 的一切点均为相异的,我们要援引下一补题:"若 $\cos\theta$,$\sin\theta$ 均为有理数 $\frac{a}{c}$,$\frac{b}{c}$,其值异于 0,1 与 -1,则 θ 不是 π 的有理倍数."

今假设 ⅱ 不成立,若

$$\cos 2l\theta+\mathrm{i}\cdot\sin 2l\theta=\cos 2m\theta+\mathrm{i}\cdot\sin 2m\theta,l\neq m$$

即两个 θ 的不同倍数在单位圆上产生同一个点,则其差 $(m-l)\theta$ 为 2π 的一个倍数,此与补题相反,所以对任意数 N,特别对于 $N=1\ 975$,⑤ 中各点都是彼此相异的.

解法 3 设圆 O 的半径为 1.先来讨论一下如何计算圆 O 上两点的直线距离.为讨论方便起见,不妨设点 $P_i(i=1,2,\cdots,1\ 975)$ 依次排列在圆 O 上,并且 $\angle P_iOP_{i+1}$ 为正向角,记为 α_i,如图 17.7 所示.不难看出,如果点 $P_i,P_{i+1},\cdots,P_{i+k}$ 在同一半圆上,那么 P_i 与 P_{i+k} 间的直线距离 $d_{i,i+k}$ 的计算公式为

$$d_{i,i+k}=2\sin\left(\sum_{j=i}^{i+k-1}\frac{\alpha_j}{2}\right) \qquad ⑥$$

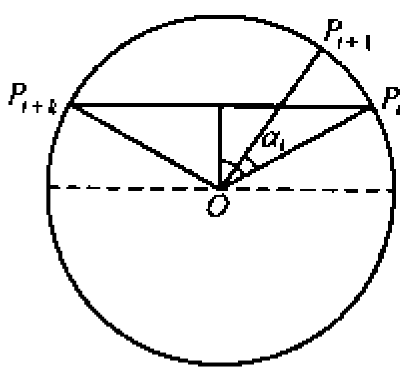


图 17.7

从而根据加法定理可知,如果对所有的 $j(j=i,\cdots,i+k-1)$,$\sin\frac{\alpha_j}{2}$ 和 $\cos\frac{\alpha_j}{2}$ 都是有理数,那么根据 ⑥ 求得的 $d_{i,i+k}$ 也是有理数.这样问题就转化成求使 $\sin\frac{\alpha_j}{2}$ 和 $\cos\frac{\alpha_j}{2}$ 都是有理数的角 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,1\ 974)$.

为此,我们考虑下面的等式

$$\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)^2+\left(\frac{2r}{r^2+1}\right)^2=1 \quad ⑦$$

其中,r 取有理数.因为

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{2r}{r^2+1}=0 \quad ⑧$$

所以,对于任意 $\delta>0$,存在一个有理数 r,使

$$0<\frac{2r}{r^2+1}<\delta \quad ⑨$$

又因为正弦函数 $y=\sin x$ 是连续函数,并且由⑦可知 $\frac{2r}{r^2+1}\leqslant 1$,所以对每个有理数 r 必存在一个角 x,使得

$$\sin x=\frac{2r}{r^2+1}$$

同时由于正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调递增的,因而可知,当 $\frac{2r}{r^2+1}$ 是任意充分小的非负有理数时,角 x 也是充分小的非负数.

今取

$$\delta=\sin\frac{\pi}{4\ 000}$$

根据上面的讨论可知存在一个正有理数 r 和一个正数 α,满足条件

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4\ 000},0<\frac{2r}{r^2+1}<\delta$$

并且 $$\sin\alpha=\frac{2r}{r^2+1},\cos\alpha=\frac{r^2-1}{r^2+1}$$

都是有理数.这样,若取

$$\frac{\alpha_j}{2}=\alpha,j=1,2,\cdots,1\ 974$$

则由 $$\sum_{j=1}^{1\ 974}\frac{\alpha_j}{2}=1\ 974\alpha<1\ 974\cdot\frac{\pi}{4\ 000}<\frac{\pi}{2}$$

可知点 $P_1,P_2,\cdots,P_{1\ 975}$ 位于同一个半圆上,从而由上面的讨论得到,这 1 975 个点中任意两点间的直线距离都是有理数.

解法4 根据公式

$$\left(\frac{2uv}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2=1$$

不难在直径为1的半圆上找到除直径端点 R,S 以外的1 973个点:依次排列为 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{1\ 973}$,如图17.8所示.

设半圆 O 的直径 $RS=1$,令 $k=1\ 973$.

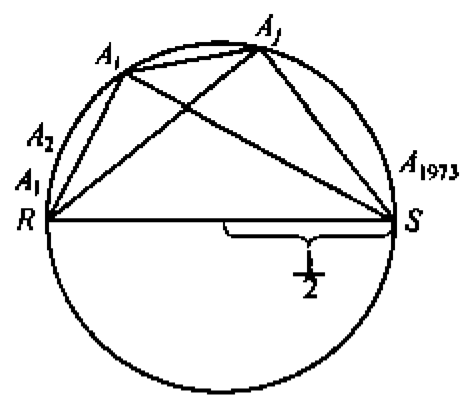


图17.8

选择 u_i,v_i，使 $u_1=1,v_1=k,u_2=2,v_2=\frac{k}{2},\cdots,u_{1\,973}=1\,973,v_{1\,973}=\frac{k}{1\,973}$. 易知

$$2u_1v_1=2u_2v_2=\cdots=2u_{1\,973}v_{1\,973}=2\cdot 1\,973$$

但
$$u_1^2+v_1^2>u_2^2+v_2^2>\cdots>u_{1\,973}^2+v_{1\,973}^2$$

于是
$$\frac{2u_1v_1}{u_1^2+v_1^2}<\frac{2u_2v_2}{u_2^2+v_2^2}<\cdots<\frac{2u_{1\,973}v_{1\,973}}{u_{1\,973}^2+v_{1\,973}^2}$$

这样，在直径为 1 的半圆周上自 R 起顺时针方向取点 $A_1,A_2,\cdots,A_{1\,973}$，使得

$$A_iR=\frac{2u_iv_i}{u_i^2+v_i^2},i=1,2,\cdots,1\,973$$

由于 $\frac{2u_iv_i}{u_i^2+v_i^2}<1$，这完全可以办到.

由勾股定理，有

$$A_iS=\frac{u_i^2-v_i^2}{u_i^2+v_i^2}$$

余下我们证明，所有这些点两两间的距离都是有理数. 由于圆 O 的直径为 1，由正弦定理得

$$A_iA_j=\sin\angle A_iRA_j=\sin(\angle A_iRS-\angle A_jRS)=$$
$$\sin\angle A_iRS\cdot\cos\angle A_jRS-\cos\angle A_iRS\cdot\sin\angle A_jRS$$

因为线段 A_iR,A_iS,A_jR,A_jS 都是有理数，而

$$\sin\angle A_iRS=A_iS,\cos\angle A_iRS=A_iR$$
$$\sin\angle A_jRS=A_jS,\cos\angle A_jRS=A_jS$$

都是有理数，所以 A_iA_j 是有理数.（其中 i,j 取值 $1,2,3,4,\cdots,1\,973$，且 $i\neq j$）

以 O 为位似中心，把圆位似放大 2 倍，这时半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆变为半径为 1 的圆. 小半圆上 R 及 $A_1,A_2,\cdots,A_{1\,973},S$ 这 1 975 个点变为大半圆上 $R',A'_1,A'_2,\cdots,A'_{1\,973},S'$ 这 1 975 个象点. 它们位于半径为 1 的圆上，显然任意两点之间的距离都是有理数.

解法 5 先引入以下几个引理.

引理 1 单位圆上弦长 l 如果是有理数，则这弦所对圆周角 α 的正弦也是有理数.

命题的正确性是显然的. 因为 $l=2\cdot 1\cdot\sin\alpha$.

引理 2 如果两角 α_1,α_2 的正弦、余弦值是有理数，则 $\alpha=\alpha_1\pm\alpha_2$ 的正弦、余弦值也是有理数.

事实上，由

$$\sin\alpha=\sin(\alpha_1\pm\alpha_2)=\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\pm\sin\alpha_2\cdot\cos\alpha_1$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \mp \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2$$

可知,命题的正确性也是显然的.

引理 3　如果 $\alpha(\alpha \leqslant \frac{\pi}{2})$ 的正弦、余弦都是有理数,则一定可以找到一对角 α_1,α_2 满足下列条件:

ⅰ $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$;

ⅱ $\sin\alpha_1,\sin\alpha_2,\cos\alpha_1,\cos\alpha_2$ 均为有理数.

引理 3 的证明　因 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 为有理数,故可设

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

其中,a,b,c 为正整数,且 $a^2 + b^2 = c^2$.

根据勾股数的性质,一定存在惟一的两个自然数 m,n,使得

$$m^2 + n^2 = c,m^2 - n^2 = a,2mn = b$$

现在选取另一自然数 n_1,使得 $n < n_1 < m$.于是有

$$c_1 = m^2 + n_1^2,a_1 = m^2 - n_1^2,b_1 = 2mn_1$$

满足 $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$.因此可得 $\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{c_1},\cos\alpha_1 = \frac{b_1}{c_1}$,故

$$\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{c_1} = \frac{m^2 - n_1^2}{m^2 + n_1^2} < \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = \sin\alpha$$

从而得 $\alpha_1 < \alpha$.

如果 $m - n = 1$,则将关系式改写为

$$4m^2 + 4n^2 = 4c,4m^2 - 4n^2 = 4a,8mn = 4b$$

此时,相应地取

$$c_1 = 4m^2 + (2n + 1)^2,a_1 = 4m^2 - (2n + 1)^2,b_1 = 4m(2n + 1)$$

显然,同样地有

$$\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{c_1} = \frac{4m^2 - (2n + 1)^2}{4m^2 + (2n + 1)^2} < \frac{4m^2 - 4n^2}{4m^2 + 4n^2} = \frac{4a}{4c} = \sin\alpha$$

从而有 $\alpha_1 < \alpha$,且 $\cos\alpha_1 = \frac{b_1}{c_1}$ 亦为有理数.由此

$$\sin(\alpha - \alpha_1) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha_1 - \cos\alpha \cdot \sin\alpha_1$$

$$\cos(\alpha - \alpha_1) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \sin\alpha \cdot \sin\alpha_1$$

均为有理数.

取 $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$,显然 $\alpha_2 < \alpha_1$.因此 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$,从而引理 3 得证.

下面证明本题.

当单位圆周上的点的个数 $h = 2$ 时,命题显然成立,因为单位圆的直径两端点的距离为 2 是有理数,即符合条件,这里 $\sin\alpha = 1,\cos\alpha = 0$ 均为有理数.

假定 $h = k$ 时,结论成立.为方便计,设存在这样的 k 个点,它

们在单位圆周上按顺序排成 $A_i(1 \leqslant i \leqslant k)$，且满足下列条件，即弦 $A_iA_{i+1}(1 \leqslant i \leqslant k, A_{k+1}$ 与 A_1 重合) 所张圆周角顺次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_k$，且 $\sin \alpha_i, \cos \alpha_i$ 均为有理数.

根据引理 1,2 推断，弦 $A_iA_j(1 \leqslant i \leqslant k, i = j)$ 必为有理数.

注意到 $h = 2$ 时，所取两点为单位圆直径. 因此，至少有相邻的两点所连之弦 A_mA_n 所对圆周角 $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. 现在按引理 3 作如下划分：找出一对角 β, γ，使得 $\beta + \gamma = \alpha$，且 $\sin \beta, \cos \beta, \sin \gamma, \cos \gamma$ 均为有理数.

这样，就可以对应地在 $\overset{\frown}{A_mA_n}$ 上找出一点 A_{k+1}，将 $\overset{\frown}{A_mA_n}$ 分成两部分 $\overset{\frown}{A_mA_{k+1}}, \overset{\frown}{A_{k+1}A_n}$，且使它们所张圆周角分别为 β 及 γ. 这样，就在单位圆上找到 $k + 1$ 个点.

根据引理 1,2，不难证明这 $k + 1$ 个点满足题设条件. 这就证明了对于任意自然数 h，这个命题的结论是肯定的. 亦即单位圆上存在 1 975 个点，其中任两点之间的距离均为有理数.

6 求一切含两个变量的多项式 p 满足下列条件：

英国命题

(1) 对一正整数 n 和一切实数 t, x, y 有

$$p(tx, ty) = t^n p(x, y)$$

即 p 为 n 次齐次式.

(2) 对所有实数 a, b, c 有

$$p(a + b, c) + p(b + c, a) + p(c + a, b) = 0$$

(3) $p(1,0) = 1$

解法 1 我们将指出满足(1) ~ (3)三条件的函数 $p(x, y)$ 是惟一的连续函数

$$p(x, y) = (x + y)^{n-1}(x - 2y) \quad ①$$

如此，原设 $p(x, y)$ 是多项式实际上是多余的，于(2)令 $b = 1 - a$，$c = 0$，得

$$p(1 - a, a) + p(a, 1 - a) + p(1,0) = 0$$

因 $p(1,0) = 1$，得

$$p(1 - a, a) = -1 - p(a, 1 - a) \quad ②$$

其次，令 $1 - a - b = c$，根据(2)得

$$p(1 - a, a) + p(1 - b, b) + p(a + b, 1 - a - b) = 0$$

由 ②，这意指

$$-2 - p(a, 1 - a) - p(b, 1 - b) + p(a + b, 1 - a - b) = 0$$

或等价于

$$p(a + b, 1 - a - b) = p(a, 1 - a) + p(b, 1 - b) + 2 \quad ③$$

令 $f(x)=p(x,1-x)+2$，式③则变成

$$f(a+b)-2=f(a)-2+f(b)-2+2$$

即

$$f(a+b)=f(a)+f(b) \quad ④$$

因 $p(x,y)$ 是连续的，故 $f(x)$ 也是连续的.

柯西一重要定理断言满足④的函数 $f(x)$ 是惟一的连续函数 $f(x)=kx$，其中 k 为一常数. 现在应用它去求常数 k，我们注意到

$$f(1)=p(1,0)+2=1+2=3$$

可知 $k=3$，所以

$$f(x)=3x$$

既然依定义有

$$f(x)=p(x,1-x)+2$$

故得

$$p(x,1-x)=3x-2 \quad ⑤$$

今若 $a+b\neq 0$，我们可在(1)中令 $t=a+b,x=\frac{a}{a+b},y=\frac{b}{a+b}$，便得

$$p(a,b)=(a+b)^{n}p\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right) \quad ⑥$$

等式⑤取 $x=\frac{a}{a+b}$，则 $1-x=\frac{b}{a+b}$，故得

$$p\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right)=\frac{3a}{a+b}-2=\frac{a-2b}{a+b}$$

把上式代入⑥，得

$$p(a,b)=(a+b)^{n}\frac{a-2b}{a+b}=(a+b)^{n-1}(a-2b)$$

$$a+b\neq 0$$

既然 $p(x,y)$ 是连续的，便知恒等式

$$p(a,b)=(a+b)^{n-1}(a-2b)$$

即使 $a+b=0$ 仍然成立. 因此惟一的连续函数能满足已知条件的是①所定义的多项式 $p(x,y)$；反之，不难证明这多项式满足(1)～(3).

现在回头证明前面引用的柯西定理.

定理 设 $f(x)$ 为一实变量 x 的连续函数，f 对一切 a,b 均满足函数方程 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，则 $f(x)=kx$，其中 $k=f(1)$.

定理的证明 先指明对一切正整数 n 有

$$f(nx)=nf(x) \quad ⑦$$

这证明可对 n 用数学归纳法. 很显明，当 $n=1$ 时⑦成立. 设它对

于某整数 $n \geqslant 1$ 成立,则用函数方程

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

得
$$f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$$

故 ⑦ 对于 $n+1$ 也成立,完成了归纳法的证明.

今设 $k=f(1)$,若 q 为任一正整数,由 ⑦ 得 $n=q,x=\frac{1}{q}$,$f(1)=qf(\frac{1}{q})$.故 $f(\frac{1}{q})=\frac{k}{q}$,其次,设 p 为任一正整数,设 ⑦ 中 $n=p,x=\frac{1}{q}$,得

$$f(\frac{p}{q})=pf(\frac{1}{q})=p\frac{k}{q}=k\frac{p}{q}$$

换言之,方程 $f(x)=kx$ 对 x 为一正有理数 $\frac{p}{q}$ 的任何值均成立.因有理数在实直线上处处稠密,且 f 是连续的,故 $f(x)=kx$ 对一切非负实数 x 均成立.特别是 $f(0)=0$,故

$$f(x)+f(-x)=f(x-x)=f(0)=0$$

故 $f(-x)=f(x)$.这说明恒等式 $f(x)=kx$ 对 x 的负值仍然成立.

解法 2 现给一种比较系统的解法.设 $p(x,y)$ 是一多项式,并设 $a=b=c$,对于一切 a,由条件(2)有

$$3p(2a,a)=0$$

因此 $p(x,y)=0$,因 $x-2y=0$.不难证明(这留给读者去证明)p 有一个因子是 $x-2y$,即

$$p(x,y)=(x-2y)Q(x,y) \qquad ⑧$$

其中,Q 为一个 $n-1$ 次多项式.我们注意 $Q(1,0)=p(1,0)=1$,由(2)并用 $b=c$,得

$$p(2b,a)+2p(a+b,b)=0$$

此式用 Q 表示,Q 是如 ⑧ 所定义的,得

$$(2b-2a)Q(2b,a)+2(a-b)Q(a+b,b)=2(a-b)(Q(a+b,b)-Q(2b,a))=0$$

因此,若 $a\neq b$,则

$$Q(a+b,b)=Q(2b,a) \qquad ⑨$$

显然此式当 $a=b$ 时也成立.令 $a+b=x,b=y$,则 $a=x-y$,⑨ 变成

$$Q(x,y)=Q(2y,x-y)$$

这函数方程说明把 Q 的第一与第二自变量各易以第二的2倍与第一减去第二,不会改变 Q 的值.重复这原理导出

$$Q(x,y)=Q(2y,x-y)=Q(2x-2y,3y-x)=$$

$$Q(6y-2x,3x-5y)=\cdots \tag{10}$$

这里自变数的和常为 $x+y$. ⑩ 的各式可写成

$$Q(x,y)=Q(x+d,y-d)$$

其中

$$d=0,2y-x,x-2y,6y-3x,\cdots \tag{11}$$

容易看出如果 $x\neq 2y$,诸 d 的值相异.对 x 与 y 的任何定值,方程

$$Q(x+d,y-d)-Q(x,y)=0$$

是 d 的 $n-1$ 次多项式方程,且当 $x\neq 2y$ 时有无限多个解答(有些由 ⑪ 给出).所以,若 $x\neq y$,方程

$$Q(x+d,y-d)=Q(x,y)$$

对一切 d 均成立.由连续性知当 $x=2y$ 时也成立.但这是指 $Q(x,y)$ 为单一变量 $x+y$ 的函数.既然它是 $n-1$ 次齐次式,那么

$$Q(x,y)=c(x+y)^{n-1}$$

其中,c 是一常数.又 $Q(1,0)=1$,故 $c=1$.因此

$$p(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}$$

解法 3 在第二个条件中,令 $a=b=c=x$,则得 $p(2x,x)=0$,即对于 $x=2y$,此多项式取值为 0.因此有表达式

$$p(x,y)=(x-2y)Q_{n-1}(x,y) \tag{12}$$

其中,Q_{n-1} 是 $n-1$ 次的齐次多项式.

在第二个条件中令 $a=b=x,c=2y$,则得

$$p(2x,2y)=-2p(x+2y,x)$$

且由齐次性,有

$$2^{n-1}p(x,y)=-p(x+2y,x) \tag{13}$$

在表达式 ⑬ 中,以 ⑫ 代入,则得

$$2^{n-1}(x-2y)Q_{n-1}(x,y)=-(2y-x)Q_{n-1}(x+2y,x)$$

因而

$$2^{n-1}Q_{n-1}(x,y)=Q_{n-1}(x+2y,x) \tag{14}$$

把第三个条件代入 ⑫,得

$$Q_{n-1}(1,0)=1 \tag{15}$$

我们在 ⑭ 中令 $x=1,y=0$,且由 ⑮ 可得

$$2^{n-1}=Q_{n-1}(1,1) \tag{16}$$

现在在 ⑭ 中令 $x=1,y=1$,则由 ⑯ 得

$$4^{n-1}=Q_{n-1}(3,1) \tag{17}$$

这样,我们逐次可得

$$8^{n-1}=Q_{n-1}(5,3)$$

$$16^{n-1}=Q_{n-1}(11,5)$$

$$32^{n-1} = Q_{n-1}(21,11)$$
$$\vdots$$

从 ⑭ 可见，一方面，左边的那些项每次乘以 2^{n-1} 而各式的右边变量和总是 $2x+2y$. 所以，存在无限多对 (x,y)，对它有

$$(x+y)^{n-1} = Q_{n-1}(x,y) \qquad ⑱$$

因为 Q_{n-1} 看做是一个多项式，关系式 ⑱ 是恒等式. 由此，代回 ⑫ 就得

$$p(x,y) = (x-2y)(x+y)^{n-1} \qquad ⑲$$

容易验证，等式 ⑲ 满足题给的所有条件.

解法4　在(2)中令 $a=b=c$，得 $p(2a,a)=0$(对所有 a)，此即

$$p(x,y) = (x-2y)Q(x,y) \qquad ⑳$$

其中，Q 是一个 $n-1$ 次的齐次多项式. 由于 $p(1,0)=Q(1,0)=1$. 在条件(2)中令 $b=c$，得

$$p(2b,a)+2p(a+b,b)=0$$

而由 ⑳ 知

$$(2b-2a)Q(2b,a)+2(a-b)Q(a+b,b) = $$
$$2(a-b)(Q(a+b,b)-Q(2b,a))$$

于是，对任意 $a\neq b$，有

$$Q(a+b,b) = Q(2b,a) \qquad ㉑$$

但是 ㉑ 对 $a=b$ 也成立. 令 $a+b=x, b=y, a=x-y$，㉑ 变为

$$Q(x,y) = Q(2y,x-y)$$

反复利用这个递推式，可得

$$Q(x,y) = Q(2y,x-y) = Q(2x-2y,3y-x) = $$
$$Q(6y-2x,3x-5y) = \cdots \qquad ㉒$$

其中两个变量之和都是 $x+y$. 且 ㉒ 中每一项都具有形式

$$Q(x,y) = Q(x+d,y-d)$$

其中

$$d = 0,2y-x,x-2y,6y-3x,\cdots \qquad ㉓$$

当 $x\neq 2y$ 时，上面的 d 的值两两不同. 对任意固定的 x,y，方程 $Q(x+d,y-d)-Q(x,y)=0$ 的左边是一个关于 d 的 $n-1$ 次多项式. 且若 $x\neq 2y$，该方程有无穷多个解，其中一部分解由 ㉓ 给出. 因此，对 $x\neq 2y$，等式 $Q(x+d,y-d)=Q(x,y)$ 对所有 d 均成立. 由连续性可知上述结论在 $x=2y$ 时也成立. 从而 $Q(x,y)$ 是关于 $x+y$ 的单变量函数. 而 Q 是一个 $n-1$ 次齐次多项式. 从

而 $Q(x,y)=c(x+y)^{n-1}$.其中 c 为常数,由 $Q(1,0)=1$,可知 $c=1$.所以

$$p(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}$$



索菲亚伊凡·布拉索夫民间剧院

第 18 届国际数学奥林匹克

奥地利，1976

捷克斯洛伐克命题

1 平面上，一凸四边形的面积为 32 cm^2，两条对边和一条对角线长度之和为 16 cm，试确定另一条对角线所有可能的长.

解法 1 设 $ABCD$ 是凸四边形. 如果我们不知其面积，但知其一条对角线的变化范围，最小为 0，最大可到 16. 这样我们就可以去求四边形的最大面积，因为另一个极值的情形是面积趋于零.

这个最大面积是当 AB 和 CD 垂直于 AC 时达到的，如图 18.1 所示，设

$$AB = a, CD = c, AC = d$$

则此时面积为
$$K = \frac{1}{2}(a + c)d$$

但
$$(a + c) + d = 16$$

是常数，而由算术 - 几何中项不等式便可知：$(a + c)d$ 仅当 $a + c = d = 8$ 时达到最大值. 此时面积 $K = 32$. 所以在已给的条件下，四边形有最大面积，因而可用勾股定理去求第二条对角线的长 x. 因为

$$x^2 = (a + c)^2 + d^2 = 128$$

故 $x = 8\sqrt{2}$.

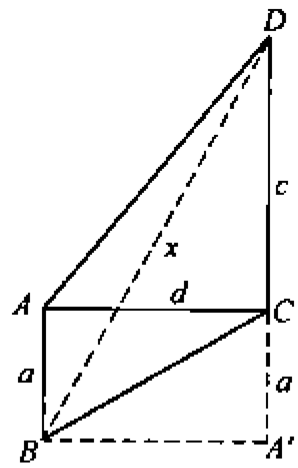


图 18.1

解法 2 设题中平面凸四边形为 $ABCD$，所求对角线是 BD. 设 $BA = b, AC = a, CD = c, \angle BAC = \alpha, \angle ACD = \beta$，如图18.2 所示，则得

$$a + b + c = 16 \quad ①$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$

$$32 = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}ac \cdot \sin\beta$$

$$64 = a(b \cdot \sin\alpha + c \cdot \sin\beta) \quad ②$$

因为 $0 < \sin\alpha \leqslant 1, 0 < \sin\beta \leqslant 1$，故由 ② 得

$$64 \leqslant a(b + c) \quad ③$$

由 ① 得 $b + c = 16 - a$，代入 ③ 得

$$64 \leqslant a(16 - a)$$

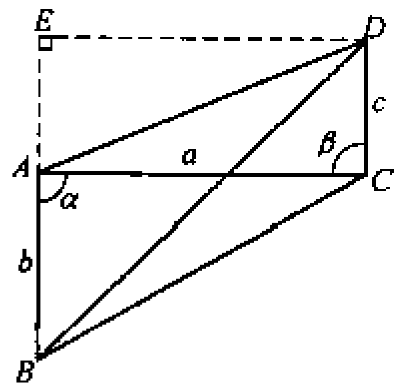


图 18.2

$$a^2-16a+64\leqslant 0$$

$$(a-8)^2\leqslant 0 \quad ④$$

但因$(a-8)^2$不能为负，故④只能取等号，即③只能取等号. 据此必有

$$a=8, b+c=8, \sin\alpha=\sin\beta=1, \alpha=\beta=90^\circ$$

为求 BD，延长 BA 至 E，使 $AE=CD$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中

$$BD=\sqrt{BE^2+ED^2}=\sqrt{(AB+AE)^2+AC^2}=$$

$$\sqrt{(b+c)^2+a^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$$

解法 3 用解析法求另一条对角线 BD. 为方便计，我们取对角线 AC 所在直线为 x 轴，过 D（过 B 亦可）垂直于 AC 的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图 18.3 所示.

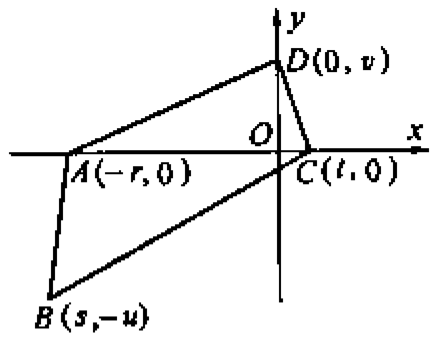


图 18.3

设四边形 $ABCD$ 诸顶点坐标依次为

$$A(-r,0), B(s,-u), C(t,0), D(0,v)$$

其中，r,u,t,v 皆为非负实数，s 为实数. 则由题意得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(r+t)u+\frac{1}{2}(r+t)v=32\\ \sqrt{(r+s)^2+u^2}+\sqrt{t^2+v^2}+(r+t)=16\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(r+t)(u+v)=64 & ⑤\\ \sqrt{(r+s)^2+u^2}+\sqrt{t^2+v^2}=16-(r+t) & ⑥\end{cases}$$

又易知

$$\sqrt{(r+s)^2+u^2}\geqslant u \quad ⑦$$

$$\sqrt{t^2+v^2}\geqslant v \quad ⑧$$

①+⑧，并代入⑥得

$$u+v\leqslant 16-(r+t) \quad ⑨$$

⑨代入⑤，得

$$(r+t)(16-(r+t))\geqslant 64$$

$$((r+t)-8)^2\leqslant 0 \quad ⑩$$

由于任何实数的平方都是非负数，故⑩只能取等号，因而⑦与⑧也都只能取等号，这样就有

$$\begin{cases}r+t-8=0\\ r+s=0\\ t=0\end{cases}$$

解得 $r=8, s=-8, t=0$

将 r 与 t 的值代入⑤，得

$$u+v=8$$

所以另一条对角线的长度为

$$|BD|=\sqrt{s^2+(u+v)^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$$

2 已知 $P_1(x)=x^2-2$ 及 $P_j(x)=P_1(P_{j-1}(x)), j=2,3,\cdots$, 求证:对任何正整数 n,方程

$$P_n(x)=x$$

所有的根都是实的,且各不相同.

芬兰命题

证法 1 首先,因为 $P_n(x)=x$ 是 2^n 次方程,故至多有 2^n 个根.其次,当 $x>2$ 时

$$P_1(x)>x, P_2(x)=P_1(P_1(x))>P_1(x)>x$$

由归纳法的假定可知

$$P_n(x)>x>2$$

同样,当 $x<-2$ 时

$$P_1(x)>2>x$$

$$\vdots$$

$$P_n(x)>2>x$$

所以 $P_n(x)$ 的实根都在闭区间 $[-2,+2]$ 内.

今假定根有如下之形式

$$x=2\cos t(\text{切比雪夫函数})$$

则

$$P_1\cdot 2\cos t=4\cos^2 t-2=2\cos 2t$$

$$P_2\cdot 2\cos t=P_1\cdot 2\cos 2t=2\cos 4t$$

一般有

$$P_n\cdot 2\cos t=2\cos 2^n t$$

但 $2\cos 2^n t=2\cos t$ 有 2^n 个不相同的解,即

$$t=\frac{2^n m\pi}{2^n-1}, m=0,1,\cdots,2^{n-1}-1$$

$$t=\frac{2^n m\pi}{2^n+1}, m=1,2,\cdots,2^{n-1}-1$$

它们都是实数,且互不相同.

证法 2 多项式

$$P_n(x)=(\cdots((x^2-2)^2-2)^2-\cdots)^2-2$$

为 2^n 次,且为偶函数,即

$$P_n(-x)=P_n(x)$$

我们看到 P_1 把区间 $[-2,2]$ 映到区间 $[-2,2]$ 上.当 x 从 -2 增到 0, P_1 由 2 减少到 -2,又因 P_1 是偶函数,故当 x 从 0 增到 2, P_1 从 -2 增到 2,如图 18.4 所示.

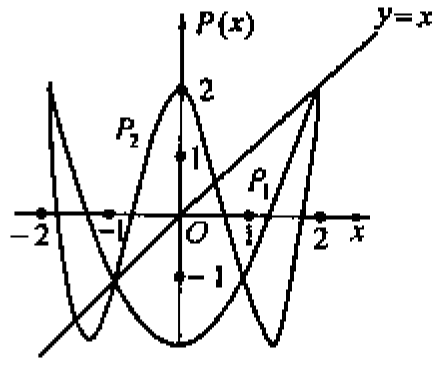


图 18.4

其次,考虑 $P_2(x)=P_1(P_1)$.当 x 从 -2 增到 0,引起 P_1 从 2 变到 -2,再由 P_1 把这些值映到区间 $[-2,2]$ 上,如图 18.4 中

$-2 \leqslant x \leqslant 0$区间部分(对于$0 \leqslant x \leqslant 2$的图象视为对称图象). 同理,$P_3$的图象,其纵坐标从 2 降到 -2 的次数为 P_2 的二倍,等等. 因此,$P_n(x)$重复$(-2,2)2^n$次. $P_n(x)=x$的解为P_n的图象与直线 $y=x$ 诸交点的横坐标. 这直线对于 $-2<x<2$,恰为 4×4 正方形的对角线,其中 P_n 起落走过 2^n 次. 故有 2^n 个不同交点给出 $P_n(x)=x$ 的 2^n 个相异实根. 又 $P_n(x)$ 的次数为 2^n,故 $P_n(x)=x$ 不能有多于 2^n 个根,所以它的所有根是相异实根.

3 一个长方体的盒子能够被单位立方块完全充满,如果在盒中尽可能多地放入体积为 2 的立方块,使它们的边与盒子的边平行,则恰好充满盒子体积的 40%. 试确定所有这种盒子的内尺寸大小($\sqrt[3]{2}=1.2599\cdots$).

荷兰命题

解法 1 设盒子的边长分别为 a_1,a_2,a_3. 由于盒子能被单位立方体填满,故知 a_1,a_2,a_3 都是正整数. 又体积是 2 个单位的立方体的边长应为$\sqrt[3]{2}$个单位长度,并且对每个 $a_i(i=1,2,3)$ 都可找到一个正整数 b_i,使

$$b_i\sqrt[3]{2}<a_i<(b_i+1)\sqrt[3]{2},i=1,2,3 \qquad ①$$

由于 a_i,b_i 都是整数,故不会出现等号.

由 ① 可知

$$b_i=\left[\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right],i=1,2,3 \qquad ②$$

由于体积是 2 个单位的立方体恰好填充到盒子体积的 40%,故知

$$\frac{40}{100}a_1a_2a_3=b_1\sqrt[3]{2}\cdot b_2\sqrt[3]{2}\cdot b_3\sqrt[3]{2}=2b_1b_2b_3$$

即

$$a_1a_2a_3=5b_1b_2b_3 \qquad ③$$

由此可见,a_1,a_2,a_3 中必有一数能被 5 整除,并且

$$\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}=\frac{1}{5} \qquad ④$$

将式 ① 的右端三个不等式相乘,并利用 ③ 得

$$5b_1b_2b_3<2(b_1+1)(b_2+1)(b_3+1) \qquad ⑤$$

为了区别各种情况,再推导出几个式子. 由于

$$\frac{5}{4}=1.25<\sqrt[3]{2}<1.26=\frac{63}{50}$$

故有 $$b_i=\left[\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right]\leqslant\left[\frac{a_i}{1.25}\right]\leqslant\frac{4}{5}a_i,i=1,2,3$$

并且在上式中至少含有一个严格的不等号. 因为,若$\left[\frac{a_i}{1.25}\right]=$

$\frac{4}{5}a_i$，则由$\sqrt[3]{2} > 1.25$可知$\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}} < \frac{a_i}{1.25}$，从而$\left[\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right] < \frac{a_i}{1.25} = \frac{4}{5}a_i$. 这样就得到一个在下面讨论中非常重要的不等式

$$\frac{b_i}{a_i} < \frac{4}{5}, i = 1,2,3 \qquad ⑥$$

类似地，由 $b_i = \left[\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right] \geqslant \left[\frac{a_i}{1.26}\right] \geqslant \frac{50}{63}a_i - 1$

可得另一个非常重要的不等式，即

$$\frac{b_i}{a_i} \geqslant \frac{50}{63} - \frac{1}{a_i}, i = 1,2,3 \qquad ⑦$$

特别地

$$当\ a_i \geqslant 4\ 时, \frac{b_i}{a_i} \geqslant \frac{50}{63} - \frac{1}{4} = \frac{137}{252}(记此数为\ A_4)$$

$$当\ a_i \geqslant 6\ 时, \frac{b_i}{a_i} \geqslant \frac{50}{63} - \frac{1}{6} = \frac{79}{126}(记此数为\ A_6) \qquad ⑧$$

$$当\ a_i \geqslant 9\ 时, \frac{b_i}{a_i} \geqslant \frac{50}{63} - \frac{1}{9} = \frac{43}{63}(记此数为\ A_9)$$

⑥,⑦,⑧ 在下面的讨论中将用来检验各种情况下是否能求出满足题意的解. 为讨论方便起见，先根据 ② 将 $a_i, b_i, \frac{a_i}{b_i}(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 的可取值列成一表(表中取$\sqrt[3]{2} = 1.25$).

a_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
b_i	1	2	3	3	4	5	6	7	7	8	9	…
$\frac{a_i}{b_i}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{9}$	…

并且，不失一般性，假设

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3(即\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3) \qquad ⑨$$

我们将证明：当 $a_1 \geqslant 3$ 时，问题无解；当 $a_1 = 2$ 时，问题只有两解，$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$ 和 $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6$. 为此，分别讨论各种情况如下.

(1) $a_1 = 3$.

我们证明，当 $a_1 = 3$(即 $b_1 = 2$) 时，问题无解.

由 ⑤ 可知，此时有

$$10b_2b_3 < 6(b_2 + 1)(b_3 + 1)$$

从而用 $6b_2b_3$ 除上式两端得

$$\frac{5}{3} < \left(1 + \frac{1}{b_2}\right)\left(1 + \frac{1}{b_3}\right)$$

由于 $a_2 < a_3$，即 $b_2 < b_3$，故

$$\frac{5}{3}<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)^2$$

即
$$\sqrt{\frac{5}{3}}<1+\frac{1}{b_2}$$

从而有
$$b_2<\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}-1}<4$$

由上表可知，$a_2 \leqslant 5$，但是 $a_2 \geqslant a_1=3$，故 $3 \leqslant a_2 \leqslant 5$，故知 a_2 仅能取 3,4,5.

ⅰ $a_2=3$.

由上表可知 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{2}{3}$，根据 ④ 可算出

$$\frac{b_3}{a_3}=\frac{9}{20}$$

与 ⑧ 比较，由于 $\frac{9}{20}<A_4$，故 $a_3<4$；又因为 a_1,a_2 都不能被 5 整除，所以 a_3 应被 5 整除，从而又有 $a_3 \geqslant 5$，得出矛盾，由此可知此时问题无解.

ⅱ $a_2=4$.

类似地，一方面应有 $a_3 \geqslant 5$，另一方面，由 $\frac{b_3}{a_3}=\frac{2}{5}<A_4$，可知 $a_3<4$，故知此情形下问题也无解.

ⅲ $a_2=5$.

类似地，一方面应有 $a_3 \geqslant a_2=5$，另一方面，由 $\frac{b_3}{a_3}=\frac{1}{2}<A_4$ 可知 $a_3<4$，故知此情形下问题也无解.

(2)$a_1>3$.

我们证明，当 $a_1>3$(即 $b_1 \geqslant 3$) 时，问题无解.

由 ⑤ 可知，此时有

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{b_1}{b_1+1}<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)$$

因为当 $b_1 \geqslant 3$ 时，必有 $\frac{b_1}{b_1+1}>\frac{3}{4}$，故有

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{8}<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)^2$$

从而可知

$$b_2<\frac{1}{\sqrt{\frac{15}{8}}-1}=\frac{\sqrt{\frac{15}{8}}+1}{\frac{7}{8}}=\frac{1}{7}(\sqrt{120}+8)<$$

$$\frac{1}{7}(\sqrt{121}+8)<\frac{1}{7}\times 19<3$$

这和 $b_2 \geqslant b_1 \geqslant 3$ 矛盾.所以在此情形下问题无解.

(3) $a_1 = 2$.

首先证明,当 $a_1 = 2$(即 $b_1 = 1$)时,必有 $a_2 \leqslant 11$.

由 ⑤ 可知,此时有

$$5b_2b_3 < 4(b_2+1)(b_3+1)$$

又由 $b_2 \leqslant b_3$ 可知

$$\frac{5}{4} < \left(1+\frac{1}{b_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{b_2}\right)^2$$

从而可知
$$b_2 < \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-2} < \frac{2}{0.23} < 9$$

因此由上表可知 $a_2 \leqslant 11$.

其次证明,当 $a_1 = 2$ 并且 $6 \leqslant a_2 \leqslant 11$ 时,问题无解.

由于 $a_1 = 2, b_1 = 1$,故可根据④和上表算出 $a_2 = 6, \cdots, 11$ 时对应的 $\frac{b_3}{a_3}$ 值:

a_2	6	7	8	9	10	11
$\frac{b_3}{a_3}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{6}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{7}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{7}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{8}$

因为
$$\frac{6}{4} > \frac{7}{5} > \frac{8}{6} > \frac{9}{7}, \frac{6}{4} > \frac{10}{7} > \frac{11}{8}$$

并且
$$\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{4} = \frac{3}{5} < A_6$$

故由 ⑧ 可知当 $a_1 = 2, 6 \leqslant a_2 \leqslant 11$ 时,应有 $a_3 < 6$,这是与 $a_3 \geqslant a_2 \geqslant 6$ 矛盾的,所以在此情形下问题无解.

最后,分别讨论 $a_2 = 2,3,4,5$ 的情形.仍根据上述方法分别算出 a_2 对应的 $\frac{b_3}{a_3}$ 值:

a_2	2	3	4	5
$\frac{b_3}{a_3}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}$

由此分别讨论如下.

i $a_2 = 2$.

$\frac{b_3}{a_3} = \frac{4}{5}$,此与 ⑥ 矛盾,所以此时问题无解.

ii $a_2 = 3$.

$\frac{b_3}{a_3} = \frac{6}{10} < A_6$,由 ⑧ 可知,$a_3 < 6$;又由 a_1, a_2 都不能被 5 整除知道,必有 5 整除 a_3,因而 $a_3 \geqslant 5$.从而得 $a_3 = 5$.也就是有

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$$

不难验证,这是问题的一个解.

ⅲ $a_2 = 4$.

$\frac{b_3}{a_3} = \frac{8}{15} < A_4$,由⑧可知,$a_3 < 4$,这与 $a_3 \geqslant a_2 = 4$ 矛盾,所以此时问题无解.

ⅳ $a_2 = 5$.

$\frac{b_3}{a_3} = \frac{10}{15} < A_3$,由⑧可知,$a_3 < 9$;又由 $15b_3 = 10a_3$ 可知3整除 a_3,因而 a_3 不会是5,7,8.由 $a_3 \geqslant a_2 = 5$ 可知,只能有 $a_3 = 6$.也就是有

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6$$

不难验证,这是问题的一个解.

综上所述,盒子的大小只有两种,即

$2 \times 3 \times 5$(体积单位)或 $2 \times 5 \times 6$(体积单位)

解法2 设盒子的边长分别为正整数 x_1, x_2, x_3,且 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$.又令

$$a_i = \left[\frac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right], i = 1,2,3 \quad ⑩$$

则由题设条件,得

$$2a_1a_2a_3 = x_1x_2x_3 \cdot \frac{40}{100}$$

$$\frac{a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{5} \quad ⑪$$

由⑩知 $a_i > x_i - 2$,因此

$$\frac{a_i}{x_i} > \frac{x_i - 2}{x_i} = 1 - \frac{2}{x_i}, i = 1,2,3 \quad ⑫$$

第一步,求 x_1.当 $x_1 \geqslant 5$ 时,由⑫得

$$\frac{a_1}{x_1} > 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

若 $x_1 = 4$,则由⑩得 $a_1 = 3$,此时

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{3}{4} > \frac{3}{5}$$

若 $x_1 = 3$,则由⑩得 $a_1 = 2$,此时

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

总之,只要 $x_1 \geqslant 3$,就有 $\frac{a_1}{x_1} > \frac{3}{5}$,因而 $\frac{a_2}{x_2}$ 和 $\frac{a_3}{x_3}$ 均大于 $\frac{3}{5}$.于是

$$\frac{a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3} = \frac{a_1}{x_1} \cdot \frac{a_2}{x_2} \cdot \frac{a_3}{x_3} > \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} > \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$$

与 ⑪ 矛盾，故必须 $x_1<3$. 但显然 $x_1\neq 1$，所以 $x_1=2$，此时由 ⑩ 知 $a_1=1$.

第二步，求 x_2. 同理，当 $x_2\geqslant 6$ 时，有

$$\frac{a_2}{x_2}>1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

因而$\frac{a_3}{x_3}$也大于$\frac{2}{3}$. 于是

$$\frac{a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3}>\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{18}>\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

与 ⑪ 矛盾，故必须 $x_2<6$，即 x_2 有 2,3,4,6 四种可能.

ⅰ 若 $x_2=2$，则 $a_2=\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]=1$. 又由 ⑪ 知

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a_3}{x_3}=\frac{1}{5},a_3=\frac{4x_3}{5}$$

即 x_3 为 5 的倍数. 现设 $x_3=5k$（k 为自然数）.

当 $k=1$，则 $x_3=5,a_3=\frac{4x_3}{5}=4$. 这与由 ⑩ 所得

$$a_3=\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]=\left[\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\right]=[3.97]=3$$

矛盾；

当 $k\geqslant 2$，则

$$a_3=\frac{4x_3}{5}=4k=5k-k=x_3-k\leqslant x_3-2$$

这也与由 ⑩ 所得 $a_3>x_3-2$ 矛盾.

总之，在这种情况下，满足题意的答案是不存在的.

ⅱ 若 $x_2=3$，则 $a_2=\left[\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right]=2$，又由 ⑪ 知

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{a_3}{x_3}=\frac{1}{5},a_3=\frac{3x_3}{5}$$

即 x_3 为 5 的倍数. 现设 $x_3=5k$（k 为自然数）.

当 $k=1$，则 $x_3=5,a_3=3$. 易知，这正好满足题目的要求.

当 $k\geqslant 2$，则

$$a_3=\frac{3x_3}{5}=3k=5k-2k=x_3-2k\leqslant x_3-4$$

这同样与由 ⑩ 所得 $a_3>x_3-2>x_3-4$ 矛盾.

可见，在这种情况下，有且仅有满足题意的答案为

$$x_1=2,x_2=3,x_3=5$$

ⅲ 若 $x_2=4$，则 $a_2=\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]=3$. 又由 ⑪ 知

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{a_3}{x_3}=\frac{1}{5},a_3=\frac{8x_3}{15}$$

于是可令 $x_3=15k$(k 为自然数).

当 $k=1$,则 $x_3=15,a_3=8$,这与由 ⑩ 所得

$$a_3=\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]=\left[\frac{15}{\sqrt[3]{2}}\right]=[11.91]=11$$

矛盾;

当 $k\geqslant 2$,则

$$a_3=\frac{8x_3}{15}=8k=15k-7k=x_3-7k\leqslant x_3-14$$

这与由 ⑩ 所得 $a_3>x_3-2>x_3-14$ 矛盾.

总之,在这种情况下,满足题意的答案是不存在的.

ⅳ 若 $x_2=5$,则 $a_2=\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]=3$.又由 ⑪ 知

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{a_3}{x_3}=\frac{1}{5},a_3=\frac{2x_3}{3}$$

于是可令 $x_3=3k$(k 为自然数).

当 $k=1$,则 $x_3=3,a_3=2$.这已在 ⅱ 中讨论过;

当 $k=2$,则 $x_3=6,a_3=4$.易知,这正好满足题目的要求;

当 $k\geqslant 3$,则

$$a_3=\frac{2x_3}{3}=2k=3k-k=x_3-k\leqslant x_3-3$$

这与由 ⑩ 所得 $a_3>x_3-2>x_3-3$ 矛盾.

综上所述,符合题目要求的盒子的体积是

$2\times3\times5=30$(体积单位) 或 $2\times5\times6=60$(体积单位)

解法 3 由 $a_i=\left[\frac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right],i=1,2,3$ 可得

$$\sqrt[3]{2}a_1<x_1<\sqrt[3]{2}(a_1+1) \tag{⑬}$$

$$\sqrt[3]{2}a_2<x_2<\sqrt[3]{2}(a_2+1) \tag{⑭}$$

$$\sqrt[3]{2}a_3<x_3<\sqrt[3]{2}(a_3+1) \tag{⑮}$$

⑬ × ⑭ × ⑮,得

$$2a_1a_2a_3<x_1x_2x_3<2(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)$$

因此,放入体积为 2 的小立方体的体积和 V_a,与盒子体积 V_x 之比为

$$\frac{2}{5}=\frac{40}{100}=\frac{V_a}{V_x}=\frac{2a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3}>$$

$$\frac{2a_1a_2a_3}{2(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}=$$

$$\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_2}{a_2+1}\cdot\frac{a_3}{a_3+1}$$

又因数列$\left\{\frac{a_i}{a_i+1}\right\}$不减,故有

$$\frac{2}{5}=\frac{V_a}{V_x}>\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_1}{a_1+1}=\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^3$$

取 $a_1=2$,有

$$\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}<\frac{40}{100}$$

取 $a_1=3$,有

$$\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}>\frac{40}{100}$$

由于$\left\{\left(\frac{a_1}{a_1+1}\right)^3\right\}$不减,所以 a_1 只能取 1 或 2.

(1) 当 $a_1=1$,由 ⑬ 知 $x_1=2$,故有

$$\frac{2}{5}=\frac{a_2a_3}{x_2x_3}>\frac{a_2a_3}{\sqrt[3]{2}(a_2+1)\cdot\sqrt[3]{2}(a_3+1)}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{a_2}{a_2+1}\right)^2 \quad ⑯$$

这里,仅当 $a_2\leqslant 3$ 时 ⑯ 成立.

ⅰ 当 $a_2=1$,则由 ⑭ 知 $x_2=2$,故有

$$\frac{2}{5}=\frac{a_3}{2x_3},x_3=\frac{5}{4}a_3=1.25a_3<\sqrt[3]{2}a_3$$

与 ⑮ 矛盾.

ⅱ 当 $a_2=2$,则由 ⑭ 知 $x_2=3$,故有

$$\frac{2}{5}=\frac{2a_3}{3x_3},x_3=\frac{5}{3}a_3$$

因而由 ⑮ 得

$$\frac{5}{3}a_3-\sqrt[3]{2}a_3<\sqrt[3]{2}$$

$$a_3<\frac{\sqrt[3]{2}}{\frac{5}{3}-\sqrt[3]{2}}\approx 3.09$$

即 a_3 可取 2 或 3.考虑到 x_3 为整数,故取 $a_2=3$,从而 $x_3=5$.此时得到盒子的体积为

$$x_1x_2x_3=2\times 3\times 5=30(\text{体积单位})$$

ⅲ 当 $a_2=3$,则由 ⑭ 知 $x_2=4$ 或 5.对应于 $a_2=3,x_2=4$,有 $x_3=\frac{15}{8}a_3$.由 ⑮ 得

$$\frac{15}{8}a_3-\sqrt[3]{2}a_3<\sqrt[3]{2}$$

$$a_3<\frac{\sqrt[3]{2}}{\frac{15}{8}-\sqrt[3]{2}}\approx 2.05<3=a_2$$

这与 $a_2 \leqslant a_3$ 矛盾；

对应于 $a_2=3, x_2=5$，有 $x_3=\frac{3}{2}a_3$. 由⑮得

$$\frac{3}{2}a_3-\sqrt[3]{2}a_3<\sqrt[3]{2}$$

$$a_3<\frac{\sqrt[3]{2}}{1.5-\sqrt[3]{2}}\approx 5.25$$

即 a_3 可取 3,4 或 5. 考虑到 x_3 为整数，故取 $a_3=4$，从而 $x_3=6$. 此时得到盒子的体积为

$$x_1x_2x_3=2\times5\times6=60(\text{体积单位})$$

(2) 当 $a_1=2$，由⑬知 $x_1=3$，故有 $\frac{2}{5}=\frac{4a_2a_3}{3x_2x_3}$，即

$$\frac{3}{10}=\frac{a_2a_3}{x_2x_3}>\frac{a_2a_3}{\sqrt[3]{4}(a_2+1)(a_3+1)}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{a_2}{a_2+1}\right)^2 \qquad ⑰$$

这里，仅当 $a_2\leqslant 2$ 时⑰成立. 但已有 $a_1=2$，所以 a_2 不能取 1，只能取 2.

对于 $a_2=2$，由⑭得 $x_2=3$. 此时

$$\frac{9}{20}=\frac{a_3}{x_3}>\frac{a_3}{\sqrt[3]{2}(a_3+1)}$$

解出 $a_3<\frac{\sqrt[3]{2}}{\frac{20}{9}-\sqrt[3]{2}}\approx 1.31$，即 $a_3=1$. 这显然不可能，因为 a_3 不应小于 $a_2=2$.

综上所述，盒子的体积为 30 个体积单位或 60 个体积单位. 这与前两种解法所得的结果一致.

4 将 1 976 分拆成正整数之和，再将其相乘，试求（并证明）所有这种乘积中之最大者.

美国命题

解 首先，这个问题是有解的，因为将 1 976 分拆成正整数之和的方法个数是有限的，所以其中必有最大者.

其次，假定我们有一种分拆法

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1\ 976$$

若 $a_i>4$，则 $a_i-4>0$. 在这个不等式的两边加上 a_i 可得 $2a_i-4>a_i$. 此即乘积

$$2(a_i-2)>a_i$$

由此我们若用 a_i-2 和 2 来代替 a_i，便能得到一个更大的乘积，所以可限制 a_i 可能取的值在集合 $\{1,2,3,4\}$ 中.

若 $a_i=4$，则可用 2 和 2 来代替 a_i，而不改变乘积，于是 a_i 的

可能值限制在{1,2,3}中.

若 $a_i = 1$,只要将它加到某一个 a_j 上,就变成 $a_j + 1$,然而 $a_j + 1 > a_j \times 1$.这样一来,最大的乘积必定是 2^x3^y 这种形式.但 $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$,故我们可用两个3来取代三个2,保持和不变,而积增大.

所以,最大乘积为 2^a3^b 这种形式,其中 $a = 0,1,2$ 三者之一.对于1 976有分拆

$$1\ 976 = 3 \times 658 + 2$$

故最大的乘积是 2×3^{658}.

此推广属于胡德成

推广

定义 $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

引理1 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

引理2 有 k 个正数的和为 p,则它们积的最大值是 $\left(\frac{p}{k}\right)^k$.

引理3 对于 $x > -1$,有

$$(1 + x)^a \leqslant 1 + ax, 0 < a < 1$$

$$(1 + x)^a \geqslant 1 + ax, a < 0 \text{或} a > 1$$

引理4 对于任何实数 a,有 $e^a \geqslant 1 + a$.

主要结果

定理1 若干个正数的和为 ne(n 是自然数),则它们积的最大值是 e^n.

定理1的证明 设 k 个正数的和为 ne,由引理2知这 k 个数的积的最大值为 $\left(\frac{ne}{k}\right)^k$.

另一方面,在引理4的不等式 $e^a \geqslant 1 + a$ 中,取 $a = \frac{k}{n} - 1$,得到 $e^{\frac{n}{k}-1} \geqslant \frac{n}{k}$ 或 $e^{\frac{n}{k}} \geqslant \frac{n}{k}e$,两边 k 次方后,得到 $e^n \geqslant (\frac{ne}{k})^k$,此即表明 k 个数的积的最大值,永远不超过 e^n,然而当 $k = n$ 时,$(\frac{n}{k}e)^k$ 达到 e^n,因而 e^n 是最大值,这就证明了定理1.

定理2 若干个正数的和为 $p = ne + r$(n 是非负整数,$0 < r < e$),它们积的最大值是 $(\frac{p}{n})^n$ 与 $(\frac{p}{n+1})^{n+1}$ 之中的较大者.

定理2的证明 由引理2知,k 个正数的和为 p,则它们积的最大值为 $(\frac{p}{k})^k$.现在我们证明,当 k 取1,2,3,… 等自然数时,数 $(\frac{p}{k})^k$ 中的最大者必定是 $(\frac{p}{n})^n$ 或 $(\frac{p}{n+1})^{n+1}$.为此,我们先证不等

式

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n > \left(\frac{p}{n-1}\right)^{n-1}$$

事实上，由不等式

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e < \frac{ne+r}{n} = \frac{p}{n}$$

两端同乘以$\left(\frac{p}{n}\right)^{n-1}$，即得

$$\left(\frac{p}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{p}{n}\right)^n$$

同理由

$$\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{n-2} < e < \frac{(n-1)e+r}{n-1} < \frac{ne+r}{n-1} = \frac{p}{n-1}$$

两端乘以$\left(\frac{p}{n-1}\right)^{n-2}$，即得

$$\left(\frac{p}{n-2}\right)^{n-2} < \left(\frac{p}{n-1}\right)^{n-1}$$

如此下去，有

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n > \left(\frac{p}{n-1}\right)^{n-1} > \left(\frac{p}{n-2}\right)^{n-2} > \cdots > p$$

其次，我们再证不等式

$$\left(\frac{p}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{p}{n+2}\right)^{n+2}$$

事实上，由不等式

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} > e$$

可得

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > e\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{ne+e}{n+2} > \frac{ne+r}{n+2} = \frac{p}{n+2}$$

两端同乘以$\left(\frac{p}{n+2}\right)^{n+1}$，即得

$$\left(\frac{p}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{p}{n+2}\right)^{n+2}$$

类似地，可证得

$$\left(\frac{p}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{p}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{p}{n+3}\right)^{n+3} > \cdots$$

由此可知，$\left(\frac{p}{n}\right)^n$或$\left(\frac{p}{n+1}\right)^{n+1}$是诸数$\left(\frac{p}{k}\right)^k$中的最大者．这就证明了定理 2.

定理 3 在定理 2 的条件下，当

$$r = r(n) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)n$$

时，有

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n = \left(\frac{p}{n+1}\right)^{n+1}$$

当 $r > r(n)$ 时,有

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n < \left(\frac{p}{n+1}\right)^{n+1}$$

当 $r < r(n)$ 时,有

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n > \left(\frac{p}{n+1}\right)^{n+1}$$

定理 3 的证明 令

$$k = \left(\frac{p}{n+1}\right)^{n+1} : \left(\frac{p}{n}\right)^n = \frac{pn^n}{(n+1)^{n+1}} = (ne + r)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

从而 $$r = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}k - ne = \left((1+\frac{1}{n})^{n+1}k - e\right)n$$

由此不难得到当 $r = r(n)$ 时,$k = 1$;当 $r > r(n)$ 时,$k > 1$;当 $r < r(n)$ 时,$k < 1$.

这就是我们所要证的结果.

荷兰命题

5 考虑 p 个方程 q 个未知数的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1q}x_q = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2q}x_q = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

其中,$q = 2p$,系数 a_{ij} 取值于集合 $\{-1,0,+1\}$.求证:必定存在方程组的一组解 $(x_1,\cdots,x_q)$ 满足以下条件:

(1) 所有 $x_j(j = 1,\cdots,q)$ 皆为整数;

(2) 至少有一个 x_j 不为零;

(3) $|x_j| \leqslant q(j = 1,\cdots,q)$.

证法 1 如果将整 q 数组 $(x_1,\cdots,x_q)$ 代入题目中方程组的第一个方程,此处 $|x_j| \leqslant p$,其结果不一定为 0,但其值界于 $-pq$ 和 $+pq$ 之间,即

$$|a_{11}x_1 + \cdots + a_{1q}x_q| \leqslant pq$$

由此可知 $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1q}x_q$ 只能取 $2pq+1$ 个可能的值.从而 p 个方程只能取 $(2pq+1)^p$ 组可能的值.

今 x_j 取从 $-p$ 到 $+p$ 之间的 $2p+1$ 个数值,诸 x_j 有 q 个,于是总共有 $(2p+1)^q$ 个可能的整 q 数组.但

$$(2p+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p$$

而 $$(2pq+1)^p = (4p^2+1)^p$$

故 $$(2p+1)^q > (2pq+1)^p$$

这就是说方程组的左边可能取的数值的个数比 q 数组的个数来得少.

于是由抽屉原则，必定存在两个 q 数组$(y_1,\cdots,y_q)$和$(z_1,\cdots,z_q)$，它们代入方程左边得到相同的数值，于是它们的差，即$(y_1-z_1,\cdots,y_n-z_n)$便满足问题的所有条件.

证法 2 用 A 表示方程组的系数矩阵，$\bar{0}$ 表示常数项矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1q}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2q}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pq}\end{pmatrix},\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.\text{又令 } X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_q\end{pmatrix}$$

则原方程组可简写为 $AX=\bar{0}$.

易知，适合 $|x_j|\leqslant p(j=1,2,\cdots,q)$ 的不同的整数向量 X 共有$(2p+1)^q$个. 因 $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$，故对这样的向量 X，我们有

$$|a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{iq}x_q|\leqslant|a_{i1}x_1|+|a_{i2}x_2|+\cdots+|a_{iq}x_q|\leqslant$$
$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_q|\leqslant pq$$

这说明向量 AX 至多有$(2pq+1)^p$个. 但

$$(2p+1)^q=(2p+1)^{2p}=(4p^2+4p+1)^p>$$
$$(4p^2+1)^p=(2pq+1)^p$$

故必有两个相异的向量 X_1 与 X_2，使 $AX_1=AX_2$，即

$$A(X_1-X_2)=\bar{0}$$

所以，X_1-X_2 的分量满足下列条件.

i 因 X_1,X_2 为整数向量，即 X_1-X_2 为整数向量，其分量亦必为整数；

ii 因 $X_1\neq X_2$，故 $X_1-X_2\neq 0$，即至少有一分量不为零；

iii 因 X_1,X_2 的分量依次满足 $|x_{j1}|\leqslant p$，$|x_{j2}|\leqslant p$，即

$$|x_j|=|x_{j1}-x_{j2}|\leqslant|x_{j1}|+|x_{j2}|\leqslant 2p=q$$

证毕.

6 数列$\{u_n\}$定义如下

$$u_0=2,u_1=\frac{5}{2},u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1,n=1,2,\cdots$$

求证：对于正整数 n 有

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

此处$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

英国命题

证法 1 首先由递归公式立即可算得

$$u_0=2=2^0+2^{-0},u_1=\frac{5}{2}=2^1+2^{-1}$$

$$u_2=\frac{5}{2}=2^1+2^{-1},u_3=\frac{65}{8}=2^3+2^{-3}$$

$$u_4=\frac{1\ 025}{32}=2^5+2^{-5}$$

总结规律,可得

$$u_n=2^{f(n)}+2^{-f(n)}$$

我们假定这个方程当 $n=0,1,\cdots,k$ 时成立,再来看当 $n=k+1$ 时如何.代入得

$$\begin{aligned}u_{k+1}=&(2^{f(k)}+2^{-f(k)})((2^{f(k-1)}+2^{-f(k-1)})^2-2)-\frac{5}{2}=\\&(2^{f(k)}+2^{-f(k)})(2^{2f(k-1)}+2^{-2f(k-1)})-\frac{5}{2}=\\&(2^{f(k)+2f(k-1)}+2^{-f(k)-2f(k-1)})+\\&(2^{f(k)-2f(k-1)}+2^{-f(k)+2f(k-1)})-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

设
$$f(k+1)=f(k)+2f(k-1)$$

与此相关联的差分方程是

$$E^2-E-2=0$$

它的根是 $2,-1$.这样我们有

$$f(k)=A(2)^k+B(-1)^k$$

由前面计算所得的数值表,可得

$$f(0)=0,f(1)=1$$

这使我们能定出 A 和 B,最后可得

$$f(n)=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

实际计算表明

$$2^{f(k)-2f(k-1)}+2^{-f(k)+2f(k-1)}-\frac{5}{2}=0$$

所以,我们用归纳法证明了

$$u_n=2^{f(n)}+2^{-f(n)},n=0,1,2,\cdots$$

但 $f(n)$ 总是整数.又因为

$$2\equiv(-1)(\bmod 3)$$
$$2^n\equiv(-1)^n(\bmod 3)$$

故 $2^n-(-1)^n$ 总能被 3 整除.

最后,因 $2^{f(n)}$ 是整数,则 $2^{-f(n)}$ 是一个真分数.故$[u_n]$就等于 $2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$.

证法 2 我们证明,对于 $n>0$,有

$$u_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+\frac{1}{2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}}\qquad ①$$

现在用完全归纳法证明

$$u_1=\frac{5}{2}=2^1+\frac{1}{2^1}=2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}}+\frac{1}{2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}}}$$

与
$$u_2=\frac{5}{2}=2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}}+\frac{1}{2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}}}$$

归纳法假定:公式 ① 对于 $n=k-1$ 与 $n=k$ 正确.

归纳法结论:公式 ① 对于 $n=k+1$ 也成立.

归纳法结论的证明:我们令 $a_n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$,则由关于 u_{k+1} 的递推公式得

$$u_{k+1}=\left(2^{a_k}+\frac{1}{2^{a_k}}\right)\left(\left(2^{a_{k-1}}+\frac{1}{2^{a_{k-1}}}\right)^2-2-\frac{5}{2}\right)=$$
$$2^{a_k+2a_{k-1}}+2^{a_{k-1}-a_k}+2^{a_k-2a_{k-1}}+2^{-(a_k+2a_{k-1})}-\frac{5}{2}$$

今有

$$a_k+2a_{k-1}=\frac{1}{3}(2^k-(-1)^k+2\cdot 2^{k-1}-2\cdot(-1)^k)=a_{k+1}$$
$$2a_{k-1}-a_k=\frac{1}{3}(2\cdot 2^{k-1}-2(-1)^{k-1}-2^k+(-1)^k)=(-1)^k$$
$$a_k-2a_{k-1}=-(2a_{k-1}-a_k)=(-1)^{k+1}$$

利用
$$2^{(-1)^k}+2^{(-1)^{k+1}}-\frac{5}{2}=0$$

可得
$$u_{k+1}=2^{a_{k+1}}+\frac{1}{2^{a_{k+1}}}$$

现在对于 $n\equiv 0\pmod 2$ 有

$$2^n\equiv 2\pmod 3,(-1)^n\equiv 1\pmod 3$$

对于 $n\equiv 1\pmod 2$,有

$$2^n\equiv 2\pmod 3,(-1)^n\equiv 2\pmod 3$$

故
$$2^n-(-1)^n\equiv 0\pmod 3$$

成立,因而 $2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ 是整数.但对于所有的自然数 n,$2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}>1$,而 $\dfrac{1}{2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}}<1$,所以 $[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$,此即所要证的.

第 19 届国际数学奥林匹克

南斯拉夫,1977

荷兰命题

1 在正方形 $ABCD$ 的内部作等边三角形 ABK, BCL, CDH, DAN. 求证:四条线段 KL, LH, HN, NK 的中点及八条线段 AK, BK, BL, CL, CH, DH, DN, AN 的中点一起组成一个正十二边形的十二个顶点.

证法 1 此题的图形,如图 19.1 所示.

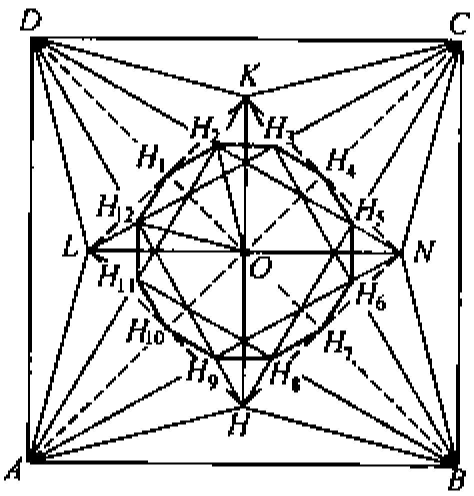


图 19.1

首先,这个图形并非那么复杂.存在经过正方形中心 O 的对称轴,亦即对角线 AC 和 BD,以及经过 H, K 及 L, N 的两条直线.关于这些轴作反射(即对称)图形不变.整个图形绕点 O 旋转 $90°$ 角,图形也不变.实际上,如果我们已经作出了夹在 OD 和 OK 之间的部分,那么适当地反射(首先关于 OD,然后关于 OL,等等,最后关于 KH)就将产生整个图形.

我们首先注意,三角形 ABH, BCN, CDK, DAL 是全等的,都是底角是 $15°$ 的等腰三角形.由此可知,三角形 ALH, BHN, CNK, DKL 是等边三角形且全等.我们用 s 表示这些等边三角形的边长.

$\triangle DNB$ 中,OH_2 是边 DB 和 DN 的中点连线,所以 OH_2 平行于 BN,而且等于它的一半,即 $OH_2=\frac{1}{2}s$.又由对称性知 OK 与 BC 平行,因而有 $\angle H_2OK=\angle NBC=15°$,因为 $\angle DOK=45°$,我们有 $\angle H_1OH_2=30°$.最后,因为 DO 平分 $\triangle LDK$ 的角 $\angle LDK$,所以它垂直于 KL,因而平行于 LH.于是

$$OH_1=LH_{10}=\frac{1}{2}LH=\frac{1}{2}s$$

这表明 $OH_1=OH_2$.

关于 OD 作反射,我们可得 $OH_{12}=OH_2$, $\angle H_1OH_{12}=30°$ 及 $\angle H_{12}OL=15°$.其次,关于 OL 作反射,我们又可以把 OH_{10} 及 OH_9 纳入上述相等线段之列(亦即 $OH_1=OH_2=OH_{12}=OH_{10}=OH_9$),而且同样 $\angle H_{11}OH_{10}$ 及 $\angle H_{10}OH_9$ 也可纳入 $30°$ 角之列.当然,还有 $\angle H_{12}OH_{11}=2\cdot 15°=30°$.

最后,关于直线 HK 作反射将产生图形的其余部分,并且得到

12个点 $H_1,H_2,\cdots,H_{12}$，它们都落在同一个半径为$\frac{1}{2}s$ 的圆上，并且相邻两点间的弧是 $30°$，于是它们是一个正十二边形的十二个顶点.

证法2 如图 19.2所示，设 P_1,P_2,P_3 分别是 DN,AN,NK 的中点.因为

$$P_2P_3 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DA$$

又
$$P_1P_2 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}DA$$

所以
$$P_1P_2 = P_2P_3$$

同理可证，十二边形 $P_1P_2\cdots P_{12}$ 的其他各边之长也都等于原正方形边长的一半.

由于 $\angle P_1P_2P_3$ 与 $\angle DAK$ 的两边分别平行且方向相同，因此

$$\angle P_1P_2P_3 = \angle DAK = \angle DAB + \angle BAK = 90° + 60° = 150°$$

同理可证，十二边形的其他各内角也都等于 $150°$.

综上所述，命题得证.

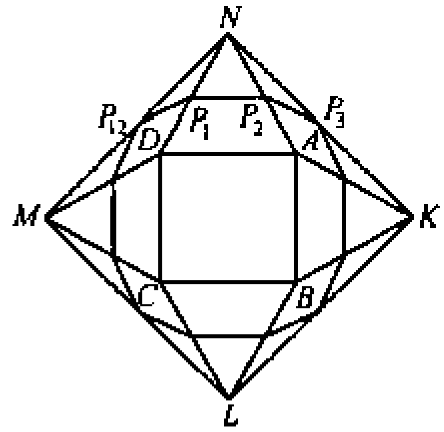


图 19.2

证法3 建立如图 19.3 所示的平面直角坐标系.设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，根据正方形关于 x 轴，y 轴对称，易知以下各点坐标，即

$$A(1,1),B(1,-1),C(-1,-1),D(-1,1)$$
$$K(1+\sqrt{3},0),L(0,-1-\sqrt{3})$$
$$M(-1-\sqrt{3},0),N(0,1+\sqrt{3})$$

由中点坐标公式分别求出中点 P_1,P_2,P_3 的坐标，即

$$P_1\left(-\frac{1}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right),P_2\left(\frac{1}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right),P_3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

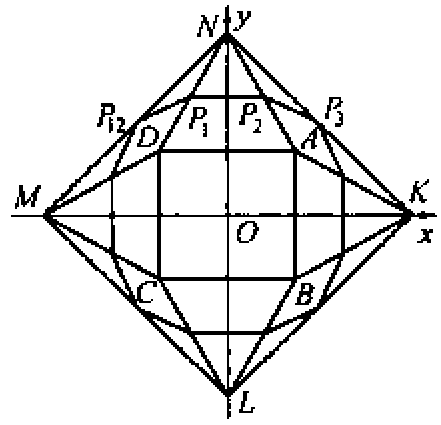


图 19.3

又根据两点间距离公式得

$$|P_1P_2| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$

$$|P_2P_3| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2} = 1$$

$$|OP_1| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{2+\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$|OP_2| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{2+\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$|OP_3| = \sqrt{(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{2\cdot\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

因此，十二边形的诸顶点都在以原点 O 为圆心，以$\sqrt{2+\sqrt{3}}$为半径的圆上，并且各边之长皆为 1，所以该多边形是正十二边形.

2 在有限的实数列中，若任何连续 7 项之和是负数，任何连续 11 项之和是正数. 试确定这种数列的项数的最大值.

越南命题

解法 1 我们把项数为 n 的具备题中所述性质的数列记为 S_n，我们容易对最初几个 n 找出数列 S_n，即

$$S_{11} = \{1,1,1,1,1,-9,1,1,1,1,1\}$$

$$S_{12} = \{1,1,1,1,1,-4,-4,1,1,1,1,1\}$$

$$S_{13} = \{2,2,-1,-1,2,2,-7,2,2,-1,-1,2,2,\}$$

$$S_{14} = \{1,-5,1,5,1,-5,1,1,-5,1,5,1,-5,1\}$$

$$S_{15} = \{5,-4,-4,5,5,-4,-4,5,-4,-4,5,5,-4,-4,5\}$$

$$S_{16} = \{5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5\}$$

为了看出我们是怎样求出而不是猜出这些数列的，让我们来寻找 S_{16}. 我们假定数列自左向右和自右向左读出来是一样的，并假定任何连续 7 项之和是 -1，而任何连续 11 项之和是 $+1$. 于是有

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1$$

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=-1$$

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8=-1$$

$$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7=-1$$

$$a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6=-1$$

从第二个方程起，每个方程减去前一个方程，可得

$$a_1=a_8, a_2=a_8, a_3=a_7, a_4=a_6$$

现在再写出所有的连续 11 项之和，即

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6=1$$

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6+a_5=1$$

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4=1$$

且由后一方程减去前一方程，可得

$$a_1=a_5, a_2=a_4$$

这些关系式表明 S_{16} 有下列形式，即

$$\{a_1,a_1,a_3,a_1,a_1,a_1,a_3,a_1,a_1,a_3,a_1,a_1,a_1,a_3,a_1,a_1\}$$

在这个数列中，相邻 7 项之和是

$$5a_1+2a_3=-1 \quad ①$$

而相邻 11 项之和是

$$8a_1+3a_3=1 \quad ②$$

解 ① 及 ② 可得 $a_1 = 5, a_3 = -13$. 于是求出上面所给出的 S_{16}.

但 S_{17} 是不存在的. 假定

$$S_{17} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{17}\}$$

我们写出它的 11 个可能的连续 7 项之和的总和, 即

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17})$$

我们把这个总和记作 A, 它是一个负数. 现在写出它的 7 个可能的连续 11 项之和的总和, 即

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}) + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}) + \cdots + (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17})$$

首先, 这个和是正的. 其次, 这个和恰好由组成 A 的那些项所组成. 于是我们同时有

$$A < 0, A > 0$$

这是矛盾的, 故 S_{17} 不存在.

于是, 所求的最大值是 16.

解法 2 先把 $a_1, a_2, \cdots, a_{17}$ 排成如下的数表, 即

$$\begin{array}{c}
a_1, a_2, \cdots, a_7, a_8, \cdots, a_{11} \\
a_2, a_3, \cdots, a_8, a_9, \cdots, a_{12} \\
a_3, a_4, \cdots, a_9, a_{10}, \cdots, a_{13} \\
a_4, a_5, \cdots, a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{14} \\
a_5, a_6, \cdots, a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{15} \\
a_6, a_7, \cdots, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{16} \\
a_7, a_8, \cdots, a_{13}, a_{14}, \cdots, a_{17}
\end{array}$$

表中有 7 行、11 列, 数的个数为 $7 \times 11 = 77$. 现将这 77 个数的总和记为 S, 易知, 无论按行加或按列加, 和 S 不变.

若按行求和, 则

$$S = \sum_{i=1}^{11} a_i + \sum_{i=2}^{12} a_i + \cdots + \sum_{i=7}^{17} a_i > 0 \qquad ③$$

若按列求和, 则

$$S = \sum_{i=1}^{7} a_i + \sum_{i=2}^{8} a_i + \cdots + \sum_{i=11}^{17} a_i < 0 \qquad ④$$

③ 与 ④ 显然矛盾.

解法 3 假若项数足够多, 任意连续 4 项可看成连续 11 项去掉连续 7 项的结果. 那么任意连续 4 项之和必为正数. 由此, 任意连续 3 项可看成连续 7 项去掉连续 4 项的结果. 这样, 任意连续 3

项之和必为负数.任意 1 项可看成连续 4 项去掉连续 3 项的结果,从而任意 1 项为正数.如此,任意 7 项之和就不会是负数.这矛盾说明数列的项数不会多到任意连续 4 项之和都是正数.下面根据这点来确定最大项数.

显然,数列的项数至少为 11.项数为 11 时,第 1 至第 11 项之和为正数,而末尾 7 项之和与前面 7 项之和又为负数,可见前 4 项之和与后 4 项之和均为正数,即 1 ~ 4 与 8 ~ 11 项之和均为正数.同理,当项数为 12 时,由 2 ~ 12 项之和为正数,而其中末尾 7 项之和与前面 7 项之和为负数,可见 2 ~ 5 与 9 ~ 12 项之和均为正数.类似地,如果项数为 17,可知以下各 4 项之和均为正数,即

$$\begin{cases}1\sim 4\\ 8\sim 11,\end{cases}\quad \begin{cases}2\sim 5\\ 9\sim 12,\end{cases}\quad \begin{cases}3\sim 6\\ 10\sim 13,\end{cases}\quad \begin{cases}4\sim 7\\ 11\sim 14\end{cases}$$

$$\begin{cases}5\sim 8\\ 12\sim 15,\end{cases}\quad \begin{cases}6\sim 9\\ 13\sim 16,\end{cases}\quad \begin{cases}7\sim 10\\ 14\sim 17\end{cases}$$

这就是说,从任意项起,连续 4 项之和均为正数,即任意连续 4 项均为正数.前面说过这样一定会产生矛盾,因此数列的项数不能超过 16.另一方面,我们可以举出项数为 16 的具有题设性质的数列,说明最大项数不小于 16,从而得最大项数就是 16 的结论.

例子如下:

$1,1,-2.6,1,1,1,-2.6,1,1,-2.6,1,1,1,-2.6,1,1$

这个例子是这样造出来的:考虑 1 ~ 9 项(8 ~ 16 项类似).因为其中任意连续 7 项之和为负数,任意连续 4 项之和为正数,可见 1 ~ 7,2 ~ 8,3 ~ 9 项去掉后面或前面 4 项所得以下 3 项之和均为负数,即

$$\begin{cases}1\sim 3\\ 5\sim 7,\end{cases}\quad \begin{cases}2\sim 4\\ 6\sim 8,\end{cases}\quad \begin{cases}3\sim 5\\ 7\sim 9\end{cases}$$

它们前或后加上一项即成为 4 项,都应为正数,可见这些项的前项或后项都为正数,即以下各项为正数:

$$4,1,5,2,6,8,9$$

除这些项外,还有第 3,7 项,应为负数.而 8 ~ 16 与 1 ~ 9 项情况类似,第 10,14 项为负数,其余为正数.为简单起见,设正数项为 1,负数项为 $-x$,则 16 项数列为

$$1,1,-x,1,1,1,-x,1,1,-x,1,1,1,-x,1,1$$

为了保证有关 3 项之和为负,4 项之和为正,7 项之和为负,11 项之和为正,x 应满足

$$2-x<0,3-x>0,5-2x<0,8-3x>0$$

由此得 $2.5<x<2\frac{2}{3}=2.666\cdots$,取 $x=2.6$ 就得到了我们的例子.

解法 4 设此数列为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{17},\cdots,a_n$，即 $n\geqslant 17$. 由已知条件可得

$$a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+8}<0,k=1,2,\cdots \quad ⑤$$

$$a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+10}>0,k=1,2,\cdots \quad ⑥$$

⑤ - ⑥ 得

$$a_{k+7}+a_{k+8}+a_{k+9}+a_{k+10}>0 \quad ⑦$$

即从第 8 项开始，任意连续 4 项之和都是正数. 则

$$a_8+a_9+a_{10}+a_{11}>0 \quad ⑧$$

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}>0 \quad ⑨$$

⑧ + ⑨ 得

$$a_8+a_9+a_{10}+2a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}>0 \quad ⑩$$

由 ⑤ 可知

$$a_8+a_9+\cdots+a_{14}<0 \quad ⑪$$

⑩ - ⑪ 得 $\qquad a_{11}>0$

如此类推可得

$$a_{12}>0,a_{13}>0,a_{11}+a_{12}+a_{13}>0 \quad ⑫$$

当 $n\geqslant 17$ 时，由 ⑤ 可得

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{17}<0 \quad ⑬$$

⑬ - ⑫ 得

$$a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}<0 \quad ⑭$$

显然 ⑭ 与 ⑦ 矛盾. 故 $n<17,n\leqslant 16$.

推论 本题的结论还可推广如下：如果实数数列的任意连续 m 项的和为正数，任意连续 n 项的和为负数，且 $m>n$ 满足如下的关系，即

$$(-1)^{k-1}(u_{k-1}m-u_kn)=1$$

其中，u_k 表示菲波那契数列的 $k+1$ 项，则这数列的最大项数为 $m+n-2$.

3 设 n 是给定的大于 2 的整数，用 V_n 表示所有形如 $1+kn$ 的整数的集($k=1,2,\cdots$). 一个数 $m\in V_n$，如果不存在数 $p,q\in V_n$，使 $pq=m$，则称 m 为 V_n 中的不可约数. 证明：存在一个数 $r\in V_n$，它可以用不只一种方法表示成 V_n 中的不可约数之积(但规定，只有 V_n 中的数的顺序不同的表示法当做是一种表示法).

荷兰命题

证明 设 $a=n-1,b=2n-1$，定义

$$r = a^2 \cdot b^2 = ab \cdot ab$$

因为 $$a^2 \equiv b^2 \equiv -1 \pmod n$$

所以 a 和 b 都不是 V_n 中的元素.但

$$a^2 = (n^2 - 2n) + 1, b^2 = (4n^2 - 4n) + 1$$

所以 $$a \equiv b \equiv 1 \pmod n$$

故 a^2, b^2 都是 V_n 中的元素.

首先,设对某两个自然数 c, d 有

$$a^2 = (cn + 1)(dn + 1)$$

那么有 $$cdn^2 + (c + d)n + 1 > n^2$$

且因为 $$n = a + 1, n^2 = a^2 + 2a + 1 > a^2$$

于是 $$a^2 > a^2$$

这不可能.所以 a^2 是 V_n 中的不可约数.

其次,设

$$b^2 = (cn + 1)(dn + 1)$$

那么有 $$cdn^2 + (c + d)n + 1 = 4n^2 - 4n + 1$$

于是 $$4n - 4 = cdn + (c + d), cd < 4$$

因此或是 $c = 1$,或是 $d = 1$.不妨设 $c = 1$,则有

$$4n^2 - 4n + 1 = (n + 1)(dn + 1)$$

因而 $n + 1$ 和 $4n^2 - 4n + 1$ 有公因子 $n + 1 > 1$.于是知 $n + 1$ 和 $2n - 1$ 有大于 1 的公因子.但

$$2n - 1 = 2(n + 1) - 3$$

所以$4n^2 - 4n + 1$和$n + 1$的公因子小于等于3^2.于是$n + 1 \leqslant 9$(因为上面已假设 $n + 1 \mid 4n^2 - 4n + 1$).此外还有$3 \mid n + 1$,这是因为,不然就有

$$(n + 1, 2n - 1) = (3, n + 1) = 1$$

$$(n + 1, 4n^2 - 4n + 1) = 1$$

因而 $n + 1 = 1$,这不可能.于是我们得出

$$n + 1 = 3, 6, 9$$

因而 $$n = 2, 5, 8$$

我们可以立即排除掉 $n = 2$ 的情形.对于 $n = 5$,我们有

$$4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 81 = 3 \times 27 = 9 \times 9$$

因此 81 是 V_5 中的不可约数.对于 $n = 8$,有

$$4 \cdot 8^2 - 4 \cdot 8 + 1 = 225 = 9 \times 25$$

这是225在 V_8 中的惟一的分解式.这样,我们证明了:当 $n \neq 8$时,$(2n - 1)^2$是 V_n 中的不可约数.亦即 $n \neq 8$时 b^2是 V_n 中的不可约数.

最后,我们设 $ab = (n - 1)(2n - 1)$ 在 V_n 中是可约的,即假定

$$ab = (cn + 1)(dn + 1)$$

那么有 $$2n^2 - 3n + 1 = cdn^2 + (c + d)n + 1$$

因为

$$c, d \geqslant 1, 2n^2 - 3n + 1 < 2n^2 < 2n^2 + (c + d)n + 1, cd < 2$$

因而 $$c = d = 1$$

由此可得 $$2n^2 - 3n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

$$2n - 3 = n + 2$$

从而 $$n = 5$$

由此可见，若 $n \neq 5$，则 ab 必是 V_n 中的不可约数. 但如果 $n = 5$，此时我们可以举出下面的例子，即

$$1\ 296 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 16 \times 81$$

这是 1 296 在 V_5 中的两个不同形式的不可约数的分解式. 对 $n = 8$，则有下面的例子，即

$$11\ 025 = 49 \times 9 \times 25 = 105 \times 105$$

而对于 $n \neq 5, 8$，有

$$r = a^2 \cdot b^2 = ab \cdot ab$$

是 r 在 V_n 中的不可约因子的分解式，并且注意 $n - 1 < 2n - 1$，$a < b$，$a^2 < ab < b^2$，所以这是两种不同的分解式.

另一种证法要利用迪里希莱(Dirichlet)定理：如果 s, t 是互素整数，则

$$sk + t, k = 1, 2, \cdots$$

中包含无穷多个素数. 现令 $s = n, t = n - 1$，且在数集

$$nk + (n - 1), k = 1, 2, \cdots$$

中任取三个不同的素数，例如

$$a = n(c - 1) + (n - 1) = nc - 1$$

$$b = n(d - 1) + (n - 1) = nd - 1$$

$$e = n(f - 1) + (n - 1) = nf - 1$$

其中，c, d, f 是某些正整数. 因为 $n > 2$，所以 $a - 1, b - 1, e - 1$ 不是 n 的倍数，于是

$$a \notin V_n, b \notin V_n, e \notin V_n$$

但 $$ab = (ncd - c - d)n + 1 \in V_n$$

$$be = (ndf - d - f)n + 1 \in V_n$$

$$ae = (ncf - c - f)n + 1 \in V_n$$

$$e^2 = (nf^2 - 2f)n + 1 \in V_n$$

这四个数都没有 a, b, e 以外的因子，所以它们都是 V_n 中的不可约数. 最后，因为

$$abe^2 = ae \cdot be = ab \cdot e^2$$

故数 abe^2 具备所要求的性质.

英国命题

4 设 a,b,A,B 是给定的实常数，又设

$f(\theta) = 1 - a \cdot \cos\theta - b \cdot \sin\theta - A \cdot \cos 2\theta - B \cdot \sin 2\theta$

试证明：如果对所有的实数 θ 有 $f(\theta) \geqslant 0$，那么

$$a^2 + b^2 \leqslant 2, A^2 + B^2 \leqslant 1$$

证法 1 首先考虑 $a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta$. 设

$$r^2 = a^2 + b^2$$

则可将上式写成

$$r\left(\frac{a}{r} \cdot \cos\theta + \frac{b}{r} \cdot \sin\theta\right)$$

设
$$\frac{a}{r} = \cos\alpha, \frac{b}{r} = \sin\alpha$$

则最终得 $a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta = r \cdot \cos(\theta - \alpha)$

同样，设 $R^2 = A^2 + B^2$

则可写出 $A \cdot \cos 2\theta + B \cdot \sin 2\theta = R \cdot \cos 2(\theta - \beta)$

于是我们得到

$$f(\theta) = 1 - r \cdot \cos(\theta - \alpha) - R \cdot \cos 2(\theta - \beta)$$

现在来求 $f(\alpha + 45^\circ)$ 和 $f(\alpha - 45^\circ)$. 我们有

$$f(\alpha + 45^\circ) = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R \cdot \cos 2(\alpha - \beta + 45^\circ)$$

$$f(\alpha - 45^\circ) = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R \cdot \cos 2(\alpha - \beta - 45^\circ)$$

如果 $r > \sqrt{2}$，则 $1 - \frac{r}{\sqrt{2}}$ 是负的. 又因为 $2(\alpha - \beta) + 90^\circ$ 与 $2(\alpha - \beta) - 90^\circ$ 相差 180°，所以或是 $\cos 2(\alpha - \beta + 45^\circ)$，或是 $\cos 2(\alpha - \beta - 45^\circ)$ 为负，因此或是 $f(\alpha + 45^\circ)$，或是 $f(\alpha - 45^\circ)$ 为负，这与假设矛盾. 因此

$$r \leqslant \sqrt{2}, r^2 = a^2 + b^2 \leqslant 2$$

同样，我们来计算 $f(\beta)$ 和 $f(\beta + \pi)$，有

$$f(\beta) = 1 - r \cdot \cos(\beta - \alpha) - R \cdot \cos\theta$$

$$f(\beta + \pi) = 1 - r \cdot \cos(\beta - \alpha + \pi) - R \cdot \cos 2\pi$$

若 $R > 1$，则

$$1 - R \cdot \cos\theta = 1 - R \cdot \cos 2\pi < 0$$

又因为 $(\beta - \alpha)$ 与 $(\beta - \alpha + \pi)$ 相差 π，故或是 $\cos(\beta - \alpha)$，或是 $\cos(\beta - \alpha + \pi)$ 是负的，因此，或是 $f(\beta)$，或是 $f(\beta + \pi)$ 为负，这与假设矛盾，于是 $R \leqslant 1$，即 $R^2 = A^2 + B^2 \leqslant 1$.

证法2 用反证法. 由证法1知, 下式对任何实数值 x 成立, 即

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \theta) - \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(2x + \varphi) \geqslant 0 \quad ①$$

假设 $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{2}$, 取 x 使 $\sin(x + \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \theta \\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} - \theta \end{cases}, n, k \in \mathbf{Z}$$

这时
$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \theta) > \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

且

$$\sin(2x + \varphi) = \begin{cases} \sin(2(2k\pi + \frac{\pi}{4} - \theta) + \varphi) \\ \sin(2((2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} - \theta) + \varphi) \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \sin(4k\pi + \frac{\pi}{2} - 2\theta + \varphi) \\ \sin(2(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} - 2\theta + \varphi) \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - (2\theta - \varphi)) = \cos(2\theta - \varphi) \\ \sin(-\frac{\pi}{2} - (2\theta - \varphi)) = -\cos(2\theta - \varphi) \end{cases}$$

显然, 当 $\cos(2\theta - \varphi) \geqslant 0 (\leqslant 0)$ 时, 则 $-\cos(2\theta - \varphi) \leqslant 0 (\geqslant 0)$. 这就是说, $\sin(2x + \varphi)$ 仍有非负值, 即 $\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(2x + \theta)$ 仍存在非负值, 亦即此时, 仍可有 $f(x) < 0$, 而这与题给条件矛盾, 故 $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{2}$ 不可能. 也就是说, 必须 $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant \sqrt{2}$, 所以 $a^2 + b^2 \leqslant 2$.

用类似方法可证 $A^2 + B^2 \leqslant 1$.

假设 $\sqrt{A^2 + B^2} > 1$, 取 x 使 $\sin(2x + \varphi) = 1$, 即

$$x = n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \end{cases}, n, k \in \mathbf{Z}$$

这时
$$\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(2x + \varphi) > 1$$

且

$$\sin(x + \theta) = \begin{cases} \sin(2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta) \\ \sin((2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \theta) \end{cases} =$$

$$\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta)\\ -\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta)\end{cases}$$

显然,当 $\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta)\geqslant 0(\leqslant 0)$ 时,则 $-\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\theta)\leqslant 0(\geqslant 0)$.这就是说,$\sin(x+\theta)$ 仍有非负值,即 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta)$ 仍有非负值,亦即可有 $f(x)<0$.而这与题给条件矛盾.故 $\sqrt{A^2+B^2}>1$ 不可能.也就是说,必须 $\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1$,所以

$$A^2+B^2\leqslant 1$$

5 设 a 和 b 是正整数,如果 a^2+b^2 被 $a+b$ 除所得的商是 q,余数是 r,试求所有的数对 (a,b),使

$$q^2+r=1\ 977$$

民主德国命题

解法1 我们有

$$a^2+b^2=q(a+b)+r \quad ①$$

$$1\ 977=q\times q+r \quad ②$$

由②有 $q^2\leqslant 1\ 997$,故 $q\leqslant 44$.由①有

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}=q+\frac{r}{a+b}$$

故 $r<a+b$.现在

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}-\frac{2ab}{a+b}=(a+b)-\frac{2ab}{a+b}$$

并且由熟知的两个正数的算术平均与调和平均之间的关系得

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$$

还有
$$q+1>\frac{a^2+b^2}{a+b}=(a+b)-\frac{2ab}{a+b}$$

于是
$$45>(a+b)-\frac{2ab}{a+b},0\geqslant\frac{2ab}{a+b}-\frac{a+b}{2}$$

将二式相加得
$$45\geqslant\frac{a+b}{2}$$

因此 $(a+b)\leqslant 90,r\leqslant 89$.由②得

$$1\ 977\geqslant q^2\geqslant 1\ 888$$

在1 977和1 888之间仅有的平方数是1 936,这表明 $q=44$,而由②得 $r=41$.

现有

$$a^2+b^2=44a+44b+41$$

或者
$$(a-22)^2+(b-22)^2=1\ 009$$

如果列出所有的不超过505的平方数以及1 009与它们的差(要记

住每个平方数的末位数字是 0,1,4,6,9,5). 我们求得仅有

$$15^2+28^2=1\ 009$$

因此 $\{|a-22|,|b-22|\}=\{15,28\}$

于是 $(a,b)=\{(37,-6),(-6,37),(7,-6),(-6,7),(50,37),(37,50),(50,7),(7,50)\}$

解法 2 由题设条件知,所求正整数对 (a,b) 满足

$$a^2+b^2=q(a+b)+r \quad ③$$

$$q^2+r=1\ 977 \quad ④$$

其中,$0\leqslant r<a+b$.

将 ④ 代入 ③,整理后得

$$q^2-(a+b)q+(a^2+b^2-1\ 977)=0$$

因为 q 为(正整)实数,故其判别式 $\Delta_q\geqslant 0$,即

$$\Delta_q=(a+b)^2-4(a^2+b^2-1\ 977)\geqslant 0$$

即 $3a^2-2ab+3b^2-4\cdot 1\ 977\leqslant 0$

设 $f(a)=3a^2-2ba+(3b^2-4\cdot 1\ 977)$

则知"存在 a 值,使关于 a 的实函数 $f(a)\leqslant 0$"的充要条件是其判别式 $\Delta_a\geqslant 0$,即

$$\Delta_a=(-2b)^2-4\cdot 3(3b^2-4\cdot 1\ 977)\geqslant 0$$

$$b^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\ 977<\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\ 000=3\ 000$$

所以正整数 $b<55$.

由 ③ 知,a 与 b 对称,故也有正整数 $a<55$. 因此 $a+b<110$.

由 ④ 知

$$1\ 977>q^2=1\ 977-r>1\ 977-(a+b)>1\ 977-110=1\ 867$$

所以 $1\ 867<q^2<1\ 977, 43^2<q^2<45^2$

故正整数 $q=44$,因而正整数 $r=41$.

将 q,r 的值代入 ③ 得

$$a^2+b^2=44(a+b)+41 \quad ⑤$$

方程 ⑤ 的正整数解就是所求的数对 (a,b) 的值(具体见解法 1).

解法 3 因为

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}<q+1, r>0, a+b>r$$

当 $q\geqslant 45$ 时,$q^2\geqslant 2\ 025$, $r\leqslant -48$ 与上式 $r>0$ 矛盾. 所以 $q\leqslant 44$,并且 $\frac{a^2+b^2}{a+b}<45$.

当 $q\leqslant 43$ 时,$q^2\leqslant 1\ 849$, $r\geqslant 128$, $a+b>128$.

设 $a \geqslant b$,则 $a \geqslant \frac{1}{2}(a+b)$.

i 若 $a \leqslant \frac{2}{3}(a+b)$,则 $b \geqslant \frac{1}{3}(a+b)$,有

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2+\left(\frac{1}{3}(a+b)\right)^2}{a+b}=\frac{13}{36}(a+b)$$

由于 $a+b>128$,故$\frac{a^2+b^2}{a+b}>46$,与上式$\frac{a^2+b^2}{a+b}<45$矛盾.

ii 若 $a>\frac{2}{3}(a+b)$,则

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}>\frac{\left(\frac{2}{3}(a+b)\right)^2}{a+b}=\frac{4}{9}(a+b)$$

从而$\frac{a^2+b^2}{a+b}>56$,与上式$\frac{a^2+b^2}{a+b}<45$矛盾.因此 $q>43$.但 $q \leqslant 44$,得 $q=44$,并且 $r=41$.

$$a^2+b^2=44(a+b)+41$$
$$(a-22)^2+(b-22)^2=1\ 009$$

最后解得

$$\begin{cases}a_1=50\\b_1=37\end{cases},\quad\begin{cases}a_2=50\\b_2=7\end{cases},\quad\begin{cases}a_3=37\\b_3=50\end{cases},\quad\begin{cases}a_4=7\\b_4=50\end{cases}$$

6 设 $f(n)$ 是定义在所有正整数的集上,并且也在这个集中取值的函数.证明:如果对每个正整数 n 有

$$f(n+1)>f(f(n))$$

则 $f(n)=n$(对每个 n).

保加利亚命题

证法 1 分下列几个步骤.

(1) 如果 $n>k$,则 $f(n)>k$;

我们对 k 用归纳法证明这个事实.先设 $k=1$,如果 $n>1$,则

$$f(n)>f(f(n-1))\geqslant 1$$

因此
$$f(n)>1$$

其次,设上述结论对某个 k 成立,要证它对 $k+1$ 也成立,设 $n>k+1$,则 $n-1>k$,于是由归纳假设,$f(n-1)>k$,因此

$$k<f(f(n-1))<f(n)$$

故
$$f(n)>k+1$$

所以上述结论对一切 k 成立.

(2) 由(1),取 $k=n-1$ 即知 $f(n)\geqslant n$;

(3) $f(n+1)>f(n)$;

这是因为如果 $f(n+1)\leqslant f(n)$,则

$$f(f(n)) < f(n+1) \leqslant f(n)$$

与(2)矛盾.

(4) 于是知 f 是严格单调递增的;

(5) $f(n) = n$.

这是因为,如果 $f(n) > n$,则 $f(n) \geqslant n+1$,但按题目的假定却有 $f(f(n)) < f(n+1)$,这与(4)矛盾.于是本题得证.

证法 2 在推导过程中也可用反证法.

先证当 $n \geqslant m$ 时

$$f(n) \geqslant m \quad ①$$

当 $m = 1$ 时结论正确.否则 $f(n) < 1$,这不可能,因为函数 $f(n)$ 的值域中无小于 1 的数.

假设当 $m = k$ 时结论正确,即当 $n \geqslant k$ 时,$f(n) \geqslant k$;要证当 $m = k+1$ 时,结论仍正确,即当 $n \geqslant k+1$ 时,$f(n) \geqslant k+1$.如若不然,则至少存在一自然数 $n_0 \geqslant k+1$,使 $f(n_0) < k+1$.此时

$$n_0 \geqslant k+1 \Rightarrow n_0 - 1 \geqslant k \Rightarrow f(n_0 - 1) \geqslant k \Rightarrow$$
$$f(f(n_0 - 1)) \geqslant k \Rightarrow f(n_0) > k$$

与

$$f(n_0) < k+1$$

矛盾.① 得证.

再证 $f(n) = n$ 对每一个正整数 n 成立.

如若不然,则可令 l 是使 $f(n) = n$ 不成立的正整数中最小者.于是

$$f(l) \neq l$$

当 $n < l$ 时,$f(n) = n < l$;另一方面,当 $n \geqslant l+1$ 时,由 ① 知 $f(n) \geqslant l+1$.

这就是说,函数 $f(n)$ 不取 l 这个正整数值,与"值域构成与定义域相同的集合"矛盾.证毕.



塞尔维亚风光

第 20 届国际数学奥林匹克

罗马尼亚,1978

1 m 和 n 是自然数,$1 \leqslant m \leqslant n$,$1\ 978^m$ 的最后三位数字分别与 $1\ 978^n$ 的最后三位数字相同.求 m 和 n 的值,使得 $m+n$ 的值为最小.

古巴命题

解法 1 因为 $1\ 978^n$ 和 $1\ 978^m$ 的最后三位数相同,因此差

$$1\ 978^n - 1\ 978^m = 1\ 978^m(1\ 978^{n-m} - 1)$$

能被 $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ 整除.因上式中第二个因子为奇数,故第一个因子须可被 2^3 整除,而且

$$1\ 978^m = 2^m \cdot 989^m$$

所以 $m \geqslant 3$.

我们可化 $m+n=(n-m)+2m$;为使该值最小,我们取 $m=3$ 而求 $d=n-m$ 的最小值,因为这样 $1\ 978^d - 1$ 能被 $5^3 = 125$ 整除,即

$$1\ 978^d \equiv 1(\bmod 125)$$

我们将再次运用下述引理.

引理 设 d 为满足 $a^d \equiv 1(\bmod N)$ 的最小幂,那么满足 $a^g \equiv 1(\bmod N)$ 的其他幂 g 都是 d 的倍数.

引理的证明 如果 g 不能被 d 整除,那么

$$g = qd + r(0 < r < d), a^g = a^{qd} \cdot a^r \equiv 1(\bmod N)$$

即 $a^r \equiv 1(\bmod N)$(因 $0 < r < d$),这样就推出若 d 并非最小幂,故 g 为 d 的倍数.

费马(Fermat)定理说明,对任何素数 p 和不能被 p 整除的整数 a 有

$$a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$$

例如

$$1\ 978^4 \equiv 1(\bmod 5)$$

欧拉扩展了费马定理,证明了(若 a,k 互素)

$$a^{\phi(k)} \equiv 1(\bmod k)$$

其中,$\phi(k)$ 小于等于 k 并且是与 k 互素的正整数数目.若 $k=p^s$ 为一素数的幂,很容易看出

$$\phi(p^s) = p^{s-1}(p-1)$$

因此,对于

$$a = 1\,978, p^t = 5^3, \phi(125) = 5^2 \times 4 = 100$$

并且 $$1\,978^{\phi(125)} = 1\,978^{100} \equiv 1 \pmod{125}$$

根据引理，d 可被 100 整除.

因 $1\,978^d - 1$ 能被 125 整除，它必然能被 5 整除，所以

$$1\,978^d \equiv 3^d \equiv 1 \pmod 5$$

我们可以用最后这个同余式按照我们的条件来限定指数 d. 符合 $3^j \equiv 1 \pmod 5$ 的最小正整数 j 为 4，根据引理，d 为 4 的倍数且为 100 的因子，所以 d 必须为 4，20，100 三个数中的一个.

除以前两个值

$$\begin{aligned}1\,978^4 &= (2\,000 - 22)^4 \equiv (-22)^4 \pmod{125} \equiv \\ &(-2)^4(11)^4 \equiv (4 \cdot 121)^2 \equiv \\ &(4(-4))^2 \pmod{125} \equiv (-16)^2 \equiv \\ &256 \equiv 6 \not\equiv 1 \pmod{125}.\end{aligned}$$

所以 $d = n - m \neq 4$. 同样可计算出

$$\begin{aligned}1\,978^{20} &= 1\,978^4 \cdot 1\,978^{16} \equiv 6 \cdot 6^4 \equiv \\ &6 \cdot 46 \equiv 26 \not\equiv 1 \pmod{125}\end{aligned}$$

所以 $$d = n - m \neq 20$$

因此 $$n - m = 100, m = 3$$

则 $$n + m = 106$$

解法 2 换一种方法来求解，从

$$1\,978^4 \equiv 6 \pmod{125}$$

可得 $$1\,978^{4k} \equiv 6^k \equiv (1+5)^k \equiv 1 + 5k + \frac{25}{2}k(k-1) \pmod{125}$$

所以 125 整除 $5k + \frac{25}{2}k(k-1)$，后者可以写为

$$(2 + 5(k-1))\frac{5k}{2}$$

外层括号内的表达式不能被 5 整除，所以 k 必是 25 的倍数，这样也得到

$$4k = n - m = 100, m = 3, n = 103, m + n = 106$$

解法 3 由于 $1\,978^n$ 与 $1\,978^m$ 都是不低于四位的多位数，其最后三位数（即个位、十位和百位数字）相同，因而差（$1\,978^n - 1\,978^m$）的最后三个数字皆为零，所以

$$\begin{aligned}1\,978^n - 1\,978^m &= 1\,978^m(1\,978^{n-m} - 1) = \\ &(2 \cdot 989)^m(1\,978^{n-m} - 1) = \\ &2^m \cdot 989^m(1\,978^{n-m} - 1)\end{aligned}$$

含有 $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$ 个因子.

但因 989^m 的个位数字仅能是 9 或者是 1，故既无 2 的因子，也

无 5 的因子；而 $1\,978^{n-m}$ 为偶数，$(1\,978^{n-m}-1)$ 必为奇数，故 $(1\,978^{n-m}-1)$ 中无 2 的因子，只可能有 5 的因子；又 2^m 中显然有 2 的因子，无 5 的因子. 因此，当且仅当

ⅰ 2^m 含有 2^3 个因子，即 $m \geqslant 3$；

ⅱ $1\,978^{n-m}-1$ 含有 5^3 因子.

$1\,978^n$ 与 $1\,978^m$ 的最后三位数才能相等.

由 ⅰ，容易求得正整数 m 的数值范围，从而得知符合条件的 m 的最小值是 3；接着，我们根据 ⅱ 来定出符合条件的 n 的值.

因为 $(1\,978^{n-m}-1)$ 有 5 的因子，所以 $(1\,978^{n-m}-1)$ 的末位数字为 0 或 5，而 $1\,978^{n-m}$ 的末位数字为 1 或 6. 又因为 $1\,978^{n-m}$ 为偶数，所以 $1\,978^{n-m}$ 的末位数字不可能为 1，只能为 6.

另一方面，8 自乘时，末位数字将是 8，4，2，6 四个数字循环出现，故知 $n-m$ 为 4 的倍数. 因此可令

$$n-m=4k, k\in \mathbf{N}$$

于是

$$\begin{aligned}
1\,978^{n-m}-1 &= 1\,978^{4k}-1=(2\,000-22)^{4k}-1= \\
&2\,000P^*+22^{4k}-1=2\,000P+(22^2)^{2k}-1= \\
&2\,000P+484^{2k}-1=2\,000P+(500-16)^{2k}-1= \\
&2\,000P+500Q^*+16^{2k}-1= \\
&2\,000P+500Q+(4^2)^{2k}-1= \\
&2\,000P+500Q+4^{4k}-1= \\
&2\,000P+500Q+(5-1)^{4k}-1= \\
&2\,000P+500Q+(5^3R^*+C_{4k}^2 5^2-C_{4k}^1 5+1)-1= \\
&2\,000P+500Q+5^3R+\frac{4k(4k-1)}{2}\cdot 5^2-4k\cdot 5= \\
&2\,000P+500Q+5^3R+2k(4k-1)5^2-4k\cdot 5
\end{aligned}$$

能被 5^3 整除. 其中

$$P^*=2\,000^{4k-1}-C_{4k}^1 2\,000^{4k-2}\cdot 22+\cdots \text{共 } 4k \text{ 项}$$

$$Q^*=500^{2k-1}-C_{4k}^1 500^{2k-2}\cdot 16+\cdots \text{共 } 2k \text{ 项}$$

$$R^*=5^{4k-3}-C_{4k}^1 5^{4k-4}+\cdots \text{共 } 4k-2 \text{ 项}$$

因为 $(2\,000P+500Q+5^3R)$ 显然能被 5^3 整除，所以 $(2k(4k-1)5^2-4k\cdot 5)$ 能被 5^3 整除.

由此推得：k 的最小值为 5^2. 因此

$$n-m=4k=100$$

即 $n=100+m$，n 的最小值是 103.

所以，$n+m=100+2m\geqslant 106$，即所求的最小值为 106.

美国命题

2 P 是球面上的一定点,从点 P 发出三条相互垂直的射线,分别与球面相交于点 A,B,C. Q 是由 PA,PB,PC 组成的平行六面体的与点 P 成对角的另一顶点,对于所有从点 P 发出的三条一组的射线,找出点 Q 的轨迹.

解法1 此题虽是在三维空间中,但也适用于 n 维空间.其解答可以在下述定理中得到提示.

定理 设 S 为一球心在点 O 半径为 R 的球面,P 为 S 上的一点.假设 $PU_1,PU_2,\cdots,PU_k(k\leqslant n)$,并满足

(1) 任意两条线相互垂直;

(2) 点 U_i 在 S 面上,建立矢量

$$\boldsymbol{x}_i=\overrightarrow{PU_i},\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}$$

(3) $$\boldsymbol{q}=\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_k$$

那么 $$|\boldsymbol{q}|^2=kR^2-(k-1)|\boldsymbol{p}|^2 \quad ①$$

相反,给定球面 S 及 S 上一点 P 及球面①上一点 Q 及包含 P 和 Q 的 k 维超平面.至少存在 H 上的一个点集 $U_1,U_2,\cdots,U_k$ 具有上述三个性质.

这个问题的几何解释是,Q 的轨迹为一个球心在 O,半径由式①决定的球面;当 $k=3$ 时,半径为

$$|\boldsymbol{q}|=\sqrt{3R^2-2|\boldsymbol{p}|^2}$$

我们将用矢量方法证明这个定理.和定理的表达式一样,点用大写字母表示,而相应的黑体小写字母则表示该点所对应的矢量.对矢量和的处理与(3)相同,并将常常使用矢量点积.特别是用 $|\boldsymbol{y}|^2=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}$ 表示 $\boldsymbol{y}$ 长度的平方,而用 $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}=0$.表示 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 相互垂直.

定理的证明 因为 $\overrightarrow{PU_i}=\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}_i$ 且由性质(1)可知,当 $i\neq j$ 时,$\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_i=0$,我们利用此式和性质(3)计算得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{q}|^2=&\left(\boldsymbol{p}+\sum_{i=1}^k\boldsymbol{x}_i\right)\left(\boldsymbol{p}+\sum_{i=1}^k\boldsymbol{x}_i\right)=|\boldsymbol{p}|^2+\\&2\boldsymbol{p}\sum_{i=1}^k\boldsymbol{x}_i+\sum_{i=1}^k|\boldsymbol{x}_i|^2=\\&|\boldsymbol{p}|^2+2\boldsymbol{p}\sum_{i=1}^k(\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{p})+\sum_{i=1}^k|\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{p}|^2=\\&|\boldsymbol{p}|^2+2\boldsymbol{p}\sum_{i=1}^k\boldsymbol{u}_i-2k|\boldsymbol{p}|^2+\sum_{i=1}^k|\boldsymbol{u}_i|^2-\\&2\boldsymbol{p}\sum_{i=1}^k\boldsymbol{u}_i+k|\boldsymbol{p}|^2\end{aligned}$$

根据性质(2)，$|u_i|^2 = R^2$，所以

$$|q|^2 = kR^2 - (k-1)|p|^2$$

我们用数学归纳法证明其逆定理.当 $k = 1$ 时，$|q|^2 = R^2$；H 为通过 P 和 Q 的直线，$U_1 = P$，刚好符合要求.

对于 $k > 1$，设 T 是直径为 PQ 的球面.根据泰勒(Thale)定理，T 是所有符合 $\overrightarrow{PU} \perp \overrightarrow{UQ}$ 的点 U 的集合，即

$$(u-p)\cdot(q-u) = 0 \qquad ②$$

因为 P,Q 都在 T 上，且 $|p| < R < |q|$，故 T 相交于 S.

设 u_k 为 $T \cap S$ 上的任一点，定义 $x_k = u_k - p$，那么满足

$$v = q - x_k = p + q - u_k \qquad ③$$

的点 V 为长方形 PU_kQV 的第四个顶点(由矢量加法的平行四边形法则及 $PU_k \perp QU_k$).由式 ③ 可得

$$|v|^2 = |p+q|^2 - 2u_k\cdot(p+q) + |u_k|^2 =$$
$$|p|^2 + 2p\cdot q + |q|^2 - 2u_k\cdot(p+q) + |u_k|^2$$

式 ② 除以 $2(p\cdot q - u_k\cdot(p+q))$ 可得

$$(u_k - p)\cdot(u_k - q) = |u_k|^2 - u_k\cdot(p+q) + p\cdot q = 0$$
$$p\cdot q - u_k\cdot(p+q) = -|u|^2$$

由假设 ①，得到

$$|v|^2 = |p|^2 + |q|^2 + |u_k|^2 - 2|u_k|^2 =$$
$$|q|^2 - R^2 - |p|^2 =$$
$$(k-1)R^2 - (k-2)|p|^2$$

另外，我们也可以用下述初等而常用的引理来求 $|v|^2$ 的值.

引理　若 $ABCD$ 为长方形，AC，BD 为对角线，若 O 为任一点，则

$$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$$

引理的证明　选择长方形中心为矢量的原点，长方形各顶点和点 O(不一定在长方形平面上) 分别用矢量表示：m，n，$-m$，$-n$，o.这里 $|m| = |n|$.可推导出

$$|o+m|^2 + |o-m|^2 = |o+n|^2 + |o-n|^2$$

我们将此引理运用于长方形 PU_kQU，可发现

$$|v|^2 + |u_k|^2 = |p|^2 + |q|^2$$

所以
$$|v|^2 = q^2 - R^2 + |p|^2$$

若在
$$|q|^2 = kR^2 - (k-1)|p|^2$$

两端加入 $|p|^2 - R^2$，得到

$$|v|^2 = (k-1)R^2 - (k-2)|p|^2$$

现在设 $H_\perp$ 为 H 上所有符合 $\overrightarrow{PE} \perp x_k$ 的点 E 的集合，那么 V，P 都在 $H_\perp$ 上，根据一开始的假设，S 上存在点 U_i，$i = 1,2,\cdots,k-1$，使得 $x_i = u_i - p$ 两两垂直，且

$$v = p + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}$$

解法 2 设已知球面半径为 R，中心在一直角坐标系的原点，此坐标系的轴平行于 PA，PB，PC．设定点 P 的坐标为 (x,y,z)，并记 $|PA|=a$，$|PB|=b$，$|PC|=c$．这时 A，B，C 的坐标分别是 $A(x+a,y,z)$，$B(x,y+b,z)$，$C(x,y,z+c)$．因为 A，B 和 C 落在球面上，故有

$$(x+a)^2+y^2+z^2=R^2$$
$$x^2+(y+b)^2+z^2=R^2$$
$$x^2+y^2+(z+c)^2=R^2$$

相加得

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2+2(x^2+y^2+z^2)=3R^2$$

但是
$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=OQ^2$$

所以
$$OQ^2=3R^2-2OP^2$$

OQ^2 与 a，b，c 无关，Q 落在半径为 $\sqrt{3R^2-2OP^2}$，中心为 O 的球面 Σ 上．这样证明了必要性．

为了证明充分性，我们首先证明一条引理．即斯德瓦尔特定理：如图 20.1 所示，设 $\triangle ABC$ 是任意三角形，D 为 BC 上任一点，则有

$$c^2n+b^2m=t^2(m+n)+mn(m+n)^*$$

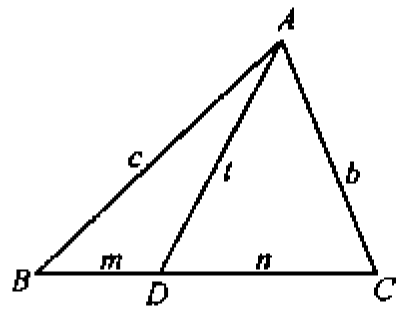


图 20.1

将这定理应用到下述情形，如图 20.2 所示，$ABCD$ 是矩形，O 是矩形所在平面外的任意一点．根据上述定理，有

$$OA^2\cdot MC+OC^2\cdot MA=OM^2\cdot AC+AM\cdot MC\cdot AC$$
$$OB^2\cdot MD+OD^2\cdot MB=OM^2\cdot BD+MD\cdot MB\cdot BD$$

因为 $AM=BM=CM=DM$，由上述式子得出我们要用的引理，即

$$OA^2+OC^2=OB^2+OD^2$$

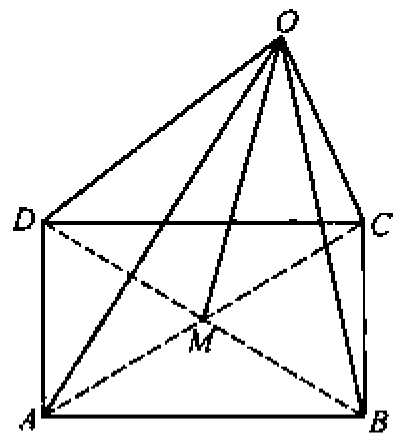


图 20.2

当然，这一结果也可以用向量的方法得到，那和上面的方法同样简单．

现在设 Q 是球面 Σ 上的一点，即

$$OQ^2=3R^2-2OP^2$$

因为 $OP<R$，故由上式知 $OQ>R$．以 PQ 为直径的球面必与球面相交，其交线为一圆．设 C 为此圆上一点，考虑矩形 $PCQX$，此处 X 和 C 是一条对角线的端点，P 与 Q 是另一对角线的端点．由引理

---

* 利用余弦定理

$$a^2=t^2+m^2-2tm\cdot\cos\angle ADB$$
$$b^2=t^2+n^2-2tn\cdot\cos\angle ADC$$
$$c^2=t^2+n^2+2tn\cdot\cos\angle ADB$$

消去 $\cos\angle ADB$ 即可证得斯德瓦尔特定理．

$$OP^2 + OQ^2 = OC^2 + OX^2$$

所以 $OX^2 = OP^2 + (3R^2 - 2OP^2) - R^2 = 2R^2 - OP^2$

点 X 落在球面 S 之外. 点 C 则落在球面 S 之上.

作平面 α，它包含点 P 且与 PC 垂直. 因为 $\angle CPX = 90°$，X 在平面 α 上. 其次，α 与 S 相交于一圆，此圆记为 K. 因为 K 在球面 S 上，故 P 落在 K 之内，X 落在 K 之外. 因此，在 α 中以 PX 为直径的圆必与 K 相交，设 B 为一交点. B 落在 S 上，且 PB 与 PC 互相垂直.

最后考虑矩形 $PBXA$，这里 A 和 B 是一对角线的端点. 由引理

$$OP^2 + OX^2 = OA^2 + OB^2$$

或 $OA^2 = OP^2 + (2R^2 - OP^2) - R^2 = R^2$

亦即 A 也落在球面 S 上. 现在我们已经证明了：对球面 Σ 上的每一点，存在三条互相垂直的直线 PA，PB，PC，其中 A，B，C 是球面 S 上的点.

解法 3 设已知的球心为 O，半径是 R，$OP = r_0$. 过 O 作一平面与平面 APB 平行，并与 PC 交于 F；过 O 作一平面与平面 BPC 平行，并与 PA 交于 D；过 O 作一平面与平面 CPA 平行，并与 PB 的反向延长线交于 E（当 O 不在平行六面体 PQ 的外部，比如在内部时，则仍与 PB 相交），如图 20.3 所示. 因为 PA，PB，PC 是两两垂直的，所以图 20.3 中所示的棱柱体 OQ，OP，OA，OB，OC 等都是长方体. 在长方体 OQ 中

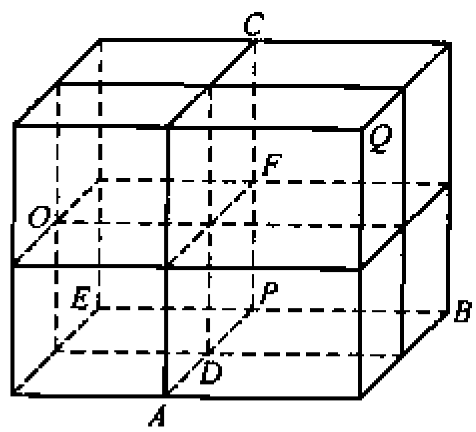


图 20.3

$$OQ^2 = AD^2 + BE^2 + CF^2 \quad ④$$

在长方体 OP 中

$$OP^2 = PD^2 + PE^2 + PF^2 = r_o^2 \quad ⑤$$

在长方体 OA 中

$$OA^2 = AD^2 + PE^2 + PF^2 = R^2 \quad ⑥$$

在长方体 OB 中

$$OB^2 = PD^2 + BE^2 + PF^2 = R^2 \quad ⑦$$

在长方体 OC 中

$$OC^2 = PD^2 + PE^2 + CF^2 = R^2 \quad ⑧$$

⑥ + ⑦ + ⑧，得

$$(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(PD^2 + PE^2 + PF^2) = 3R^2 \quad ⑨$$

将 ④，⑤ 代入 ⑦，得

$$OQ^2 = 3R^2 - 2r_o^2 \quad ⑩$$

由 ⑩，$OQ = \sqrt{3R^2 - 2r_o^2}$（由 $R > r_o$ 知 $3R^2 - 2r_o^2 > 0$，开方取正值）.

这就是说，不论 A，B，C 在球面上按题设条件如何移动，动点 Q 与定点 O 的距离永远不变且等于定值 $\sqrt{3R^2 - 2r_o^2}$（$> R > 0$）.

所以,点 Q 的轨迹是以 O 为球心,$\sqrt{3R^2-2r_o^2}$ 为半径的球,且此球面在已知球的外部而与已知球同心.图20.3中仅画出点 O 在长方体外部的情况,当长方体按条件变动时,点 O 也可以在长方体的内部或长方体的面、棱上.显然,不论如何变动,只要符合条件,上述解答过程以及所得到的结论都是成立的,OQ 永为定值.(充要性证明从略.)

解法4 以点 P 为原点,PA,PB,PC 分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,如图20.4所示,建立空间直角坐标系 $P\text{-}xyz$.设球心为 $O(a,b,c)$,半径为 R,$|OP|=r_o$,则球面方程为

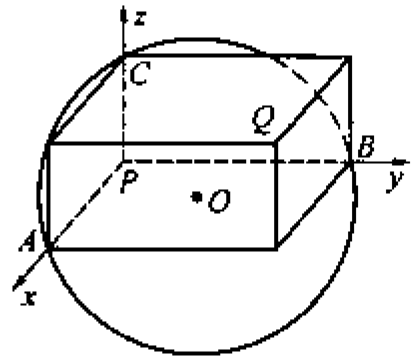


图20.4

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

为求 $|OQ|$,必须先求点 Q 的坐标,而 Q 的横坐标即为点 A 的横坐标,Q 的纵坐标即为点 B 的纵坐标,Q 的立坐标即为点 C 的立坐标.因此,分别在球面方程中,令 $y=z=0$,得 Q 之横坐标

$$PA=x=a+\sqrt{R^2-b^2-c^2}$$

令 $z=x=0$,得 Q 之纵坐标

$$PB=y=b+\sqrt{R^2-c^2-a^2}$$

令 $x=y=0$,得 Q 之立坐标

$$PC=z=c+\sqrt{R^2-a^2-b^2}$$

由两点间距离公式,得

$$\begin{aligned}|OQ|=&((a+\sqrt{R^2-b^2-c^2}-a)^2+(b+\sqrt{R^2-c^2-a^2}-b)^2+\\&(c+\sqrt{R^2-a^2-b^2}-c)^2)^{\frac{1}{2}}=\\&\sqrt{(R^2-b^2-c^2)+(R^2-c^2-a^2)+(R^2-a^2-b^2)}=\\&\sqrt{3R^2-2(a^2+b^2+c^2)}\end{aligned}$$

因为 $$a^2+b^2+c^2=|OP|^2,\ |OP|^2=r_o^2$$

所以 $$\sqrt{3R^2-2(a^2+b^2+c^2)}=\sqrt{3R^2-2|OP|^2}=\sqrt{3R^2-2r_o^2}(>R)$$

为定值.

因此,点 Q 的轨迹是以已知的球心为球心,以 $\sqrt{3R^2-2r_o^2}$ 为半径且在已知球外的一个同心球面.

解法5 前面谈了几何法和解析法两种,下面再介绍一下矢量法.

如图20.5所示,已知的球心是 O,半径为 R,并设 $\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{r}$,$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}_0$,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_a$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_b$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_c$,则

$r_a^2 = r_b^2 = r_c^2 = R^2, \overrightarrow{PA} = r_a - r_o, \overrightarrow{PB} = r_b - r_o, \overrightarrow{PC} = r_c - r_o$

因为 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 两两正交,所以

$$(r_a - r_o)(r_b - r_o) = 0$$
$$(r_b - r_o)(r_c - r_o) = 0$$
$$(r_c - r_o)(r_a - r_o) = 0$$

即
$$r_a r_b - r_o(r_a + r_b) + r_o^2 = 0$$
$$r_b r_c - r_o(r_b + r_c) + r_o^2 = 0$$
$$r_c r_a - r_o(r_c + r_a) + r_o^2 = 0$$

又
$$r = r_o + \overrightarrow{PQ} = r_o + (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = r_o^2 + ((r_a - r_o) + (r_b - r_o) + (r_c - r_o)) = r_a + r_b + r_c - 2r_o$$

将上式两边分别取内积,得

$$r^2 = (r_a + r_b + r_c)^2 - 4r_o(r_a + r_b + r_c) + 4r_o^2 = r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + 2(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) - 4r_o(r_a + r_b + r_c) + 4r_o^2 = 3R^2 - 2(r_o(r_a + r_b) + r_o(r_b + r_c) + r_o(r_c + r_a) - r_a r_b - r_b r_c - r_c r_a) + 4r_o^2 = 3R^2 - 2(r_o^2 + r_o^2 + r_o^2) + 4r_o^2 = 3R^2 - 6r_o^2 + 4r_o^2 = 3R^2 - 2r_o^2$$

所以
$$|r| = \sqrt{3R^2 - 2r_o^2}$$

故所求的轨迹是以已知球心为球心,以 $\sqrt{3R^2 - 2r_o^2}$ 为半径的球面.

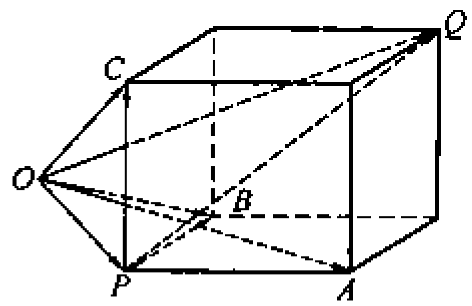


图 20.5

解法 6 以球心 O 为原点,OP 为 x 轴正向,建立空间直角坐标系,如图 20.6 所示.设球 O 的半径为 R,则已知的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

假定 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$,那么

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = R^2, i = 1,2,3 \quad ⑪$$

又设 $Q(x, y, z)$,$OP = r_o$,则点 P 的坐标为 $(r_o, 0, 0)$.由"长方体的任意一条对角线的平方等于它的三度的平方和"得

$$PQ^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 \quad ⑫$$

根据两点间距离公式,得

$$PQ^2 = (x - r_o)^2 + y^2 + z^2 \quad ⑬$$
$$PA^2 = (x_1 - r_o)^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad ⑭$$
$$PB^2 = (x_2 - r_o)^2 + y_2^2 + z_2^2 \quad ⑮$$
$$PC^2 = (x_3 - r_o)^2 + y_3^2 + z_3^2 \quad ⑯$$

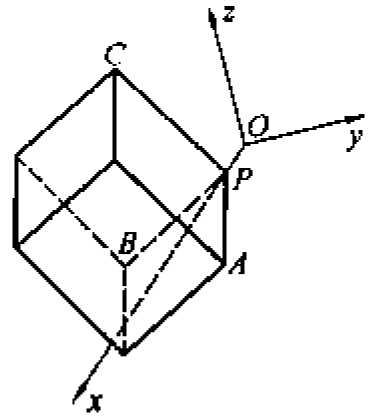


图 20.6

将 ⑪,⑬,⑭,⑮,⑯ 代入 ⑫,并加整理,得

$$x^2+y^2+z^2=3R^2+2r_o^2+2r_o(x-x_1-x_2-x_3) \quad ⑰$$

由矢量加法的平行六面体法则

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$$

有 $(x-r_o,y,z)=(x_1-r_o,y_1,z_1)+(x_2-r_o,y_2,z_2)+(x_3-r_o,y_3,z_3)=(x_1+x_2+x_3-3r_o,y_1+y_2+y_3,z_1+z_2+z_3)$

所以 $$x-r_o=x_1+x_2+x_3-3r_o$$

$$x-x_1-x_2-x_3=-2r_o \quad ⑱$$

将 ⑱ 代入 ⑰,即得动点 Q 的轨迹方程为

$$x^2+y^2+z^2=3R^2-2r_o^2 \quad ⑲$$

显然,⑲ 是以 O 为球心,$\sqrt{3R^2-2r_o^2}$ 为半径的球面方程.

解法 7　由题设知以 PA,PB 和 PC 为棱的平行六面体中,棱 PA,PB,PC 两两垂直,因而这个六面体是长方体,其各侧面都是矩形,如图 20.7 所示.

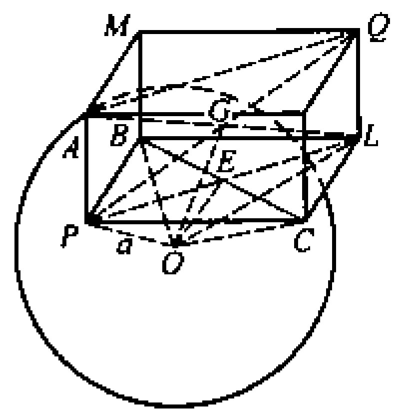


图 20.7

因 P 是定点,设 $OP=a$,球 O 的半径为 R.取半径 OB,OC,又设矩形 $PBLC$ 的对角线 PL 与 BC 的交点为 E,则 $PE=BE=LE=CE$.连结 OE,OL,由于 OE 是 $\triangle OBC$ 的边 BC 上的中线,故

$$OB^2+OC^2=2(OE^2+BE^2)$$

又 OE 也是 $\triangle OPL$ 的 PL 边上的中线,故

$$OP^2+OL^2=2(OE^2+PE^2)$$

但 $BE=PE$,故

$$OB^2+OC^2=OP^2+OL^2$$

即 $$R^2+R^2=a^2+OL^2$$

所以 $$OL^2=2R^2-a^2$$

过 PA,QL 作截面 $APLQ$,则 $APLQ$ 是矩形,如图 20.7 所示.对角线 AL,PQ 的交点记为 G.则

$$AG=PG=LG=QG$$

连结 OA,OG,OQ,由于 OG 是 $\triangle OAL$ 的中线,故

$$OA^2+OL^2=2(OG^2+AG^2)$$

又 OG 也是 $\triangle OPQ$ 的中线,故

$$OP^2+OQ^2=2(OG^2+PG^2)$$

但 $AG=PG$,故

$$OA^2+OL^2=OP^2+OQ^2$$

所以 $$OQ^2=3R^2-2a^2$$

因而 $$OQ=\sqrt{3R^2-2a^2}$$

由于点 Q 与点 O 距离为定值，所以当 A,B,C 在球面上移动时，点 Q 的轨迹是以点 O 为球心，$\sqrt{3R^2-2a^2}$ 为半径的球面.

解法 8 以球心 O 为坐标原点，射线 OP 为 x 轴，球半径为长度单位，建立直角坐标系 $O\text{-}xyz$.

设 $|\overrightarrow{OP}|=p(0\leqslant p<1)$，则点 P 坐标为 $(p,0,0)$.

设 A,B,C 的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)，由于它们都在球面上，所以有

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2=1,i=1,2,3 \qquad ⑳$$

于是向量 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 的坐标分别为

$$\overrightarrow{OP}=(p,0,0),\overrightarrow{PA}=(x_1-p,y_1,z_1)$$
$$\overrightarrow{PB}=(x_2-p,y_2,z_2),\overrightarrow{PC}=(x_3-p,y_3,z_3)$$

由 $\angle BPA=\angle CPA=\angle CPB=90°$，可知 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 两两正交，

因此 $\qquad \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=0$

即有

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-p(x_1+x_2)+p^2=0$$
$$x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3-p(x_2+x_3)+p^2=0$$
$$x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1-p(x_3+x_1)+p^2=0$$

三式相加，有

$$\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{3}(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j)-2p\sum_{i=1}^{3}x_i+3p^2=0 \qquad ㉑$$

而

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=$$
$$(x_1+x_2+x_3-2p,y_1+y_2+y_3,z_1+z_2+z_3)$$
$$|\overrightarrow{OQ}|=((x_1+x_2+x_3-2p)^2+(y_1+y_2+y_3)^2+$$
$$(z_1+z_2+z_3)^2)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{3}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)+$$
$$2\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{3}(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j)-4p\sum_{i=1}^{3}x_i+4p^2)^{\frac{1}{2}}$$

由 ⑳，㉑ 可得

$$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{3-2p^2}$$

所以点 Q 在球面 $S:x^2+y^2+z^2=3-2p^2$ 上.

反过来，对于球面 S 上任一点 Q'，必有单位球面上的三点 A'，B'，C'，使 $\angle B'PA'=\angle C'PA'=\angle C'PB'=90°$，且 Q' 为以 PA'，PB'，PC' 为棱的平行六面体上与 P 斜对的顶点.

事实上，球面 S 可以看成是由半圆周 C

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3-2p^2\\y=0\\z\geqslant 0\end{cases}$$

绕 x 轴旋转一周而生成的,故只要对半圆周 C 上的一点 Q' 讨论就可以了.

我们可取 A',B',C',使

$$\overrightarrow{PA'}=k(\cos\theta,1,\sin\theta),\overrightarrow{PB'}=k(\cos\theta,-1,\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{PC'}=l(-\sin\theta,0,\cos\theta),0\leqslant\theta<2\pi$$

不难验证 $\angle B'PA'=\angle C'PA'=\angle C'PB'=90^\circ$

为使 $|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OB'}|=|\overrightarrow{OC'}|=1$

取 $k=k(\theta)=(-p\cdot\cos\theta+\sqrt{2-p^2(1+\sin^2\theta)})/2$

$$l=l(\theta)=p\cdot\sin\theta+\sqrt{1-p^2\cdot\cos^2\theta}$$

这时 $\overrightarrow{OQ'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}$

即 Q' 的坐标为

$$(p+2k(\theta)\cdot\cos\theta-l(\theta)\cdot\sin\theta,0,2k(\theta)\cdot\sin\theta+l(\theta)\cdot\cos\theta)$$

即为

$$(\sqrt{2-p^2(1+\sin^2\theta)}\cdot\cos\theta-\sqrt{1-p^2\cdot\cos^2\theta}\cdot\sin\theta,0,$$
$$\sqrt{2-p^2(1+\sin^2\theta)}\cdot\sin\theta+\sqrt{1-p^2\cdot\cos^2\theta}\cdot\cos\theta)$$

容易验证,$|\overrightarrow{OQ'}|^2=3-2p^2$.并且当 $\theta=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$(即 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$)时,得到 Q'_1 的坐标为$(-\sqrt{3-2p^2},0,0)$;当 $\theta=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$(即 $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$)时,得到 Q'_2 的坐标为$(\sqrt{3-2p^2},0,0)$.由于当 θ 在$[0,2\pi]$中取值时,点 Q' 的坐标都是 θ 的连续函数,所以半圆周 C 上的点皆满足条件,从而球面 S 上的点 Q' 皆满足条件.

因此,所求点 Q 的轨迹是与已知球同心的一个球面 S,它的半径为$\sqrt{3-2p^2}$.(长度单位为已知球半径,$p=|\overrightarrow{OP}|$)

3 全体正整数的集合可以分成两个互不相交的正整数子集

$$\{f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots\},\{g(1),g(2),\cdots,g(n),\cdots\}$$

其中 $f(1)<f(2)<\cdots<f(n)<\cdots$

$g(1)<g(2)<\cdots<g(n)<\cdots$

且有 $g(n)=f(f(n))+1,n\geqslant1$

求 $f(240)$.

英国命题

解法 1 设 $F=\{f(n)\},G=\{g(n)\},n=1,2,3,\cdots$,现在 $g(1)=f(f(1))+1>1$,因此 $f(1)=1,g(1)=2$.这里且先不作算术计算,应可以证明若 $f(n)=k$,则

$$f(k) = k + n - 1 \quad ①$$

$$g(n) = k + n \quad ②$$

$$f(k+1) = k + n + 1 \quad ③$$

先认为式①,②,③已成立,应用于$f(1) = 1$,发现$f(1) = 1$,$g(1) = 2$,$f(2) = 3$.若我们将等式①重复应用于$f(2) = 3$及其以后各数,可得到一组结果,即

$$f(3) = 4, f(4) = 6, f(6) = 9, f(9) = 14,$$

$$f(14) = 22, f(22) = 35, f(35) = 56,$$

$$f(56) = 90, f(90) = 145, f(145) = 234, f(234) = 378, \cdots$$

但$f(240)$不在这组数中.注意到等式③产生更大的数目.例如$f(145) = 234$,$f(235) = 380$.退回到这组数中,经过仔细的计算,可发现若将式③应用于$f(56) = 90$及其以后各数,得到$f(91) = 147$,$f(148) = 239$,$f(240) = 388$.

但这种解法必须先证明式①,②,③成立.假设$f(n) = k$,我们注意到两个互不相交的集合$\{f(1), f(2), f(3), \cdots, f(k)\}$和$\{g(1), g(2), g(3), \cdots, g(n)\}$中包含所有从①到$g(n)$的自然数,因为

$$g(n) = f(f(n)) + 1 = f(k) + 1$$

计算一下这两个集合中元素的数目,可得到$g(n) = k + n$或$g(n) = f(n) + n$,这样就得到了式②,并从

$$k + n = g(n) = f(k) + 1$$

中得到了式①.

从等式$g(n) - 1 = f(f(n))$中可看出$g(n) - 1$为F的元素.因此不可能有两个连续的整数都为G的元素.因为$k + n$是G的元素,可推出$k + n - 1$和$k + n + 1$均为F的元素,实际上是F的相邻的两元素.从等式①中可知

$$k + n + 1 = f(k+1)$$

解法 2 整数数列$\{f(k)\}$,$\{g(k)\}$,若两者所有的元素刚好包括所有整数(且没有重叠),则称两数列互补.S.贝特(S.Beatty)提出了特殊的互补数列,证明了对于任何一对无理数(α, β),若满足

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \quad ④$$

则数列$F(n) = \{[n\alpha]\}$,$G(n) = \{[n\beta]\}$,$n = 1, 2, \cdots$互补.这里$[z]$表示z的整数部分.

我们可称数列$\{f(n)\}$,$\{g(n)\}$是贝特数列,解题的关键在于等式②$g(n) = f(n) + n$,该式化为

$$[n\beta] = [n\alpha] + n = [n\alpha + n]$$

这个关系式对所有的 n 都成立,若 $n\beta = n\alpha + n$,即

$$\beta = \alpha + 1 \quad ⑤$$

在式 ④ 中代入 β,则

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} = 1$$

或者

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

我们选择正根 $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$,这样 $\beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$.

计算

$$f(240) = [240\alpha] = [120(1 + \sqrt{5})] = 120 + [120\sqrt{5}]$$

因为 $\sqrt{5} \approx 2.236, 120\sqrt{5} \approx 12 \cdot 22.36 = 264 + 4.32$

所以 $[120\sqrt{5}] = 268, f(240) = 120 + 268 = 388$

解法 3 设 $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 8, \cdots, b_i = F_{i+2}$ 等于第$(i + 2)$个斐波那契数,那么每一个正整数 n 均可惟一地表示为

$$n = a_k b_k + a_{k-1} b_{k-1} + \cdots + a_0 b_0$$

这里 $a_i = 0$ 或 1,且没有两个相邻的 a_i 都等于 1. 我们把形式 $a_k a_{k-1} \cdots a_0$ 叫做 n 在斐波那契基下的表示. 例如,1 = 1,2 = 10,3 = 100,4 = 101,5 = 1 000,6 = 1 001,7 = 1 010,等等. 最大的 d 位的数(相当于 F_{d+2-1}) 是 10 101….

尾部含有偶数个 0 的数(包括没有 0) 所构成的数列与尾部含有奇数个 0 的数所构成的数列组成互补数列. 我们把第一个数列中的第 n 个数记作$f(n)$,把第二个数列中的第 n 个数记为$g(n)$. 下面我们给出一种在斐波那契基下计算 $f(n)$ 的方法,而且用这种方法很容易验证,$g(n) = f(f(n)) + 1$,上述两个数列就是所给问题中的两个数列.

设 $a_k a_{k-1} \cdots a_0$ 在斐波那契基下表示为 n,我们这样规定 $f(n)$ 的值:它在斐波那契基下的表示是 $a_k a_{k-1} \cdots a_0 0$. 若它的尾部含有偶数个 0,则它就是 $f(n)$;若它的尾部含有奇数个 0,如 $\cdots 1\underbrace{00\cdots 0}_{\text{奇数个0}}$,那么把它所对应的数减去 1,在斐波那契基的意义下,相当于用一个等长的尾段 …0101…01 来替换尾段 …1000…0,由此可得 $f(n)$.

易知,用如上的方法就可得出全部尾部含有偶数个 0 的数的一个递增序列. 这就求出了所有的 $f(n)$.

对于每一个 $f(n) = c_k c_{k-1} \cdots c_0$,它的尾部含有偶数个 0,采用上述同样的做法,$f(f(n)) + 1$ 就等于 $c_k c_{k-1} \cdots c_0 0$. 由此,$f(f(n)) + 1$ 就给出了尾部含有奇数个 0 的一切数. 这就是 $g(n)$.

解法 4 先证 $f(\mu)$ 和 $g(\mu)$ 满足下列不等式,即

$$2 \leqslant g(\mu+1)-g(\mu) \leqslant 3 \quad ⑥$$

$$1 \leqslant f(\mu+1)-f(\mu) \leqslant 2 \quad ⑦$$

因为 $$g(\mu+1)=f(f(\mu+1))+1$$

所以 $$g(\mu+1)-1$$

是 f 的值. 又

$$f(\mathbf{Z}^{+}) \cap g(\mathbf{Z}^{+})=\varnothing$$

所以 $$g(\mu)<g(\mu+1)-1$$

进而 $$g(\mu)=g(\mu+1)-2$$

所以 ⑥ 的左端得证.

由此 $f(\mu)$ 和 $f(\mu+1)$ 之间,至多有一个 g 的值(若 $f(\mu+1)$ 和 $f(\mu)$ 之间有两个 g 的值 $g(k_1), g(k_2)$,不妨设 $g(k_1)>g(k_2)$,即

$$f(\mu+1)>g(k_1)>g(k_2)>f(u)$$

则 $$f(\mu+1)>g(k_1)-1>f(\mu)$$

因为 $g(k_1)-1$ 是 f 的值,这与 f 的严格单调性矛盾). ⑦ 得证.

设

$$g(\mu)=f(t)+1, g(\mu+1)=f(t+s)+1$$

于是 $$f(\mu)=t, f(\mu+1)=t+s$$

从 ⑦ 可知, s 只能取值 1 或 2. 故 ⑥ 的右端得证.

$g(1)=f(f(1))+1>1$, 只能 $f(1)=1$. 由此

$$g(1)=f(1)+1=2$$

由已知条件可将 f 和 g 的值逐个推算出来.

现在定义一个序列 P_N,规定 P_N 的第 k 项 $(1 \leqslant k \leqslant N)$ 是 f 或 g,视 $k \in f(\mathbf{Z}^{+})$ 或 $k \in g(\mathbf{Z}^{+})$ 而定.

例如, $P_1=\{f\}, P_2=\{f, g\}, P_3=\{f, g, f\}$,不难发现 P_N 与斐波那契数列 $F_1=1, F_2=2, \cdots, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 有关系.

P_{F_n} 是 $P_{F_{n-1}}$ 与 $P_{F_{n-2}}$ 依次合并,例如

$$P_{F_1}=P_1=\{f\}, P_{F_2}=P_2=\{f, g\}$$

$$P_{F_3}=P_3=\{f, g, f\}=P_{F_2} P_{F_1}$$

由归纳法立即可推出 P_{F_n} 中恰好有 F_{n-1} 个 f 和 F_{n-2} 个 g,上述结论可以归纳成公式

$$f(F_{n-1}+M)=F_n+f(M), 1 \leqslant M \leqslant F_{n-2} \quad ⑧$$

$$g(F_{n-2}+M)=F_n+g(M), 1 \leqslant M \leqslant F_{n-3} \quad ⑨$$

$$g(F_{k-1}+s+1)=f(F_k+r+t)+1$$

因此

$$g(F_{k-1}+s+1)-g(F_{k-1}+s)=t+2=g(s+1)-g(s)$$

这说明 $M+1$ 和 $F_{k+1}+M+1$ 同为 g 值或同为 f 值,故 $n=$

$k+1$ 时结论成立.

再用数学归纳法证明

$$f(\mu)=\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right]F_{n-1}<\mu\leqslant F_n,\mu\geqslant 3 \qquad ⑩$$

其中,$[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数.

先请注意,用归纳法易证 $F_k^2-F_{k-1}F_{k+1}=(-1)^k$,并再用一次归纳法可证明

$$\frac{F_k}{F_{k-1}}-\frac{F_{k+1}+1}{F_{k+1}}=\frac{(-1)^kF_1}{F_{k-1}F_{k+1}} \qquad ⑪$$

当 $n=3$ 时,$f(3)=\left[\frac{3}{2}\times 3\right]=4$,故 ⑩ 成立.

设 $3<n\leqslant k$ 时,式 ⑩ 成立,求证 $n=k+1$ 时,式 ⑩ 也成立.

令

$$\mu=F_k+M,1\leqslant M\leqslant F_{k-1}$$

有 $$M=1,\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=1;M=2,\left[\frac{2F_{k+1}}{F_k}\right]=2$$

故可设 $$M\geqslant 3,F_{l-1}<M\leqslant F_l,3\leqslant l\leqslant k-1$$

从 ⑪ 可知

$$\Delta=\left|\left(\frac{F_1}{F_{l-1}}-\frac{F_{k+1}}{F_k}\right)M\right|$$

现在用数学归纳法证明 P_{F_n} 是 $P_{F_{n-1}}P_{F_{n-2}}$ 的依次合并.

当 $n=3$ 时,可直接验证结论成立.

设 $n=k$ 时,命题成立,求证 $n=k+1$ 时命题也成立.

只要对 M 用归纳法证明 M 和 $F_{k+1}+M$ 同为 f 的值或同为 g 的值即可.

先考虑 $M=1$.

因 $P_{F_{k+1}}$ 由 $P_3P_2P_3P_3P_2\cdots$ 依次合并,它的尾部必是 P_3P_2 或 P_2P_3.当尾部是 P_3P_2,$F_{k+1}\in g(\mathbf{Z}^+)$,由 ⑥,$F_{k+1}+1\in g(\mathbf{Z}^+)$;若尾部是 P_2P_3,即 f,g,f,g,f,由 ⑥ 易证 f,g,f,g 序列决不会出现.由此 $F_{k+1}+1\in f(\mathbf{Z}^+)$.

再考虑 $1<M\leqslant F_{k-1}$.

若 $M\in g(\mathbf{Z}^+)$ 和 $F_{k+1}+M\in g(\mathbf{Z}^+)$.由 ①,$M+1\in f(\mathbf{Z}^+)$ 和 $F_{k+1}+M+1\in f(\mathbf{Z}^+)$;

若 $M-1,M\in f(\mathbf{Z}^+)$ 和 $F_{k+1}+M-1,F_{k+1}+M\in f(Z^+)$.由 ⑦,$M+1\in g(\mathbf{Z}^+)$ 和 $F_{k+1}+M+1\in g(\mathbf{Z}^+)$.

因此仅须考虑 $M-1\in g(\mathbf{Z}^+)$,$M\in f(\mathbf{Z}^+)$ 和 $F_{k+1}+M-1\in g(\mathbf{Z}^+)$,$F_{k+1}+M\in f(\mathbf{Z}^+)$ 这一情况.

设 P_M 中有 r 个 f 和 s 个 g.于是

$$f(r)=M,g(s)=M-1,f(s)=r-1$$

设 $f(s+1)=r+t$,由②,$t=0$ 或 1. 由此

$$g(s+1)-g(s)=t+2$$

由归纳假设

$$f(F_k+r)=F_{k+1}+M$$

$$g(F_{k-1}+s)=F_{k+1}+M-1$$

$$f(F_{k-1}+s)=F_k+f(s)=F_k+r-1$$

$$g(F_{k-1}+s)=f(F_k+r-1)+1$$

由⑧ $f(F_{k-1}+s+1)=F_k+f(s+1)=F_k+r+t=$

$$\frac{F_{k-1}M}{F_{l-1}F_k}\leqslant\frac{F_{k-1}F_l}{F_{l-1}F_k}$$

因 $F_{k-1}<F_l<F_k$,故 $\Delta<\frac{11}{F_{l-1}}$.

从归纳法假设 $f(M)=\left[\frac{F_1M}{F_{l-1}}\right]$.

F_l 与 F_{l-1} 互素,M 可能取值是:$F_{l-1}+1,\cdots,F_{l-1}+F_{l-2}$,故 $\frac{F_1M}{F_{l-1}}$ 一定不是整数,显然 $\frac{F_1M}{F_{l-1}}$ 的分数部分 S 有

$$\frac{1}{F_{l-1}}\leqslant S\leqslant\frac{F_{l-1}-1}{F_{l-1}}$$

从 $\Delta<\frac{1}{F_{l-1}}$,可得

$$\left[\frac{F_{k+1}M}{F_k}\right]=\left[\frac{F_lM}{F_{l-1}}\right]$$

于是

$$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}(F_k+M)\right]=F_{k+1}+\left[\frac{F_lM}{F_{k-1}}\right]=F_{k+1}+f(M)=f(F_k+M)$$

故 $n=k+1$ 时式⑩成立.

$\Delta<\frac{1}{F_{l-1}}$ 将对任意大的 k 成立,因此 $\left[\frac{F_lM}{F_{l-1}}\right]=\left[\frac{F_{k+1}M}{F_k}\right]$ 对 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}}{F_k}=\frac{1+\sqrt5}{2}$ 亦应成立.

于是可用 $\frac{1+\sqrt5}{2}$ 代替式⑩中 $\frac{F_n}{F_{n-1}}$,就有

$$f(\mu)=\left[\frac{1+\sqrt5}{2}\mu\right]$$

即得

$$f(2\mu)=[(1+\sqrt5)\mu]$$

解法 5 由题设知 f,g 的值都不互相重复,而且每一个正整数都有一个 f 值或 g 值和它相等,所以若 $g(n)=k$,则在首 k 个正

整数中，g 值出现 n 次，f 值出现 $k-n$ 次. 又因 $g(n)=f(f(n))+1$，故小于 $g(n)$ 的 f 值有 $f(n)$ 个. 由此可知 $f(n)=k-n$，即

$$g(n)=f(n)+n \quad ⑫$$

由 ⑫ 及 ①，开始 n 个函数值就可以算出.

设在 $g(n-1)$ 和 $g(n)$ 之间有 t 个 f 值，则下面的一组函数值

$$f(m-1),g(n-1),f(m),f(m-1),\cdots,f(m+t-1),g(n)$$

是连续整数，由于

$$g(n-1)=f(m-1)+1,g(n)=f(m+t-1)+1$$

故有 $f(f(n-1))=f(m-1),f(f(n))=f(m+t-1)$

又由于 f 的严格单调性，得

$$f(n-1)=m-1,f(n)=m+t-1$$

于是 $m,m+1,\cdots,m+t-2$ 这 $t-1$ 个数是 g 的 $t-1$ 个值. 但由 $g(n)=f(f(n))+1$ 知两个 g 值之间至少有一个 f 值，故 $t-1=0$ 或 1，即 $t=1$ 或 2. 故两个 g 值之间至多有两个 f 值. 由此又知

$$f(n)=f(n-1)+1 \text{ 或 } f(n-1)+2 \quad ⑬$$

现在我们用归纳法证明不等式

$$(f(n))^2-nf(n)<n^2<(f(n)+1)^2-n(f(n)+1) \quad ⑭$$

当 $n=1$ 时，$f(1)=1$，⑭ 显然成立.

假设当 $1\leqslant n\leqslant s$ 时，⑭ 都成立. 当 $n=s+1$ 时，则由 ⑬ 知

$$f(s+1)=f(s)+j,j=1,2$$

i $f(s+1)=f(s)+1$.

这时 ⑭ 的左边可写成

$$(f(s)+1)^2-(s+1)(f(s)+1)=(f(s))^2-sf(s)+f(s)-s \quad ⑮$$

由归纳假设，$(f(s))^2-sf(s)<s^2$，又显然 $f(s)<2s$，故 ⑮ 的左边小于

$$s^2+f(s)-s<s^2+s<(s+1)^2$$

这样就证明了 ⑭ 的左边的不等式.

因为 $f(s-1),g(t),f(s),f(s+1),g(t+1)$ 是连续整数，故

$$f(f(t))=f(s-1),f(f(t+1))=f(s+1)$$

于是 $\qquad f(t)=s-1,f(t+1)=s+1$

所以存在 $\qquad g(r)=s,f(f(r))=s-1=f(t)$

即 $\qquad f(r)=t$

而 $\qquad s=g(r)=f(r)+r=t+r$

即 $\qquad r=s-t$

又

$$f(s+1)=g(t+1)-1=f(t+1)+(t+1)-1=s+t+1$$

所以 $\qquad f(r)=t=f(s+1)-(s+1)$

$$r=s-t=(2s+1)-f(s+1)$$

因为 $r < s$，所以由归纳假设，⑭右边不等式成立．把 r 和 $f(r)$ 代入并移项得

$$r(f(r)+r+1) < (f(r)+1)^2$$

即
$$(2s+1-f(s+1))(s+1) < (f(s+1)-s)^2$$

展开并移项，得

$$(f(s+1))^2-(s-1)f(s+1)-s > s^2+2s+1$$

所以
$$(f(s+1)+1)^2-(s+1)(f(s+1)+1) > (s+1)^2$$

这样，⑭右边的不等式也证明了．

ii $f(s+1)=f(s)+2$．

由于 $f(s)$，$g(t)$，$f(s+1)$ 是连续整数，故

$$s=f(t),f(s+1)=g(t)+1=f(t)+t+1=s+t+1$$

即
$$t=f(s+1)-(s+1)$$

因为 $t \leqslant f(t)=s$，所以由归纳假设，⑭右边的不等式成立．把 t 和 $f(t)$ 代入得

$$t^2 < (f(t)+1)^2-t(f(t)+1)$$

即

$$(f(s+1)-(s+1))^2 < (s+1)^2-(f(s+1)-(s+1))(s+1)$$

展开并移项得

$$(f(s+1))^2-(s+1)f(s+1) < (s+1)^2$$

这样就证明了⑭左边的不等式．

再则

$$\begin{aligned}&(f(s+1)+1)^2-(s+1)(f(s+1)+1)=\\&((f(s)+1)+2)^2-(s+1)(f(s+1)+1)=\\&(f(s)+1)^2-s(f(s)+1)+3f(s)-2s+5>\\&s^2+3f(s)-2s+5\end{aligned}$$

要证明⑭右边的不等式成立，只要证明

$$s^2+3f(s)-2s+5 > (s+1)^2$$

或
$$3f(s)-4s+4 > 0$$

现在
$$f(s)=f(s+1)-2=f(t)+t-1,s=f(t)$$

故
$$\begin{aligned}3f(s)-4s+4&=3f(t)+3t-3-4f(t)+4=\\&3t-f(t)+1>t+1>0\end{aligned}$$

至此，我们证毕不等式⑭，即

$$(f(s))^2-sf(s)-s^2<0$$
$$(f(s)+1)^2-s(f(s)+1)-s^2>0$$

现在方程 $x^2-sx-s^2=0$ 的正根为 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s$，故若

$$x>0,x^2-sx-s^2<0$$

则
$$x<\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s$$

若 $$x > 0, x^2 - sx + x^2 > 0$$

则 $$x > \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s$$

这证明了 $f(s) < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s, f(s)+1 > \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s$

因 $f(s)$ 是正整数，故

$$f(s) = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s\right]$$

令 $s = 2u$，得

$$f(2u) = [(1+\sqrt{5})u]$$

解法 6 为求 $f(2\mu)$，先讨论函数 f, g 的一些性质.

性质 1：$f(1) = 1, g(1) = 2$.

事实上，由题意，数 1 只能被 $f(1)$ 或 $g(1)$ 所取到，但

$$g(1) = f(f(1)) + 1 > 1$$

所以，$f(1) = 1$，并且

$$g(1) = f(f(1)) + 1 = f(1) + 1 = 2$$

性质 2：对于给定的 n，设 k_n 为不等式 $g(x) < f(n)$ 的正整数解的个数，则

$$f(n) = n + k_n$$

事实上，由假设可知

$$f(1) = 1 < g(1) < \cdots < g(k_n) < \cdots < f(n)$$

是代表 $f(n)$ 个连续的正整数，但另一方面，它显然由 n 个正整数 $f(1), \cdots, f(n)$ 及 k_n 个正整数 $g(1), \cdots, g(k_n)$ 所组成，故

$$f(n) = n + k_n$$

性质 3：若 $f(n) = N$，则

i $f(N) = N + n - 1$;

ii $f(N+1) = (N+1) + n$.

事实上，因为

$$g(n-1) = f(f(n-1)) + 1 \leqslant f(N-1) + 1 \leqslant f(N)$$

及 $$g(n) = f(f(n)) + 1 = f(N) + 1 > f(N)$$

所以适合 $g(x) < f(N)$ 的最大整数 x 必为 $n-1$. 因此

$$f(N) = N + n - 1$$

同理可证 $$f(N+1) = N + n + 1$$

性质 4：$g(n) = f(n) + n$.

事实上，由性质 3 可得

$$g(n) = f(f(n)) + 1 = (f(n) + n - 1) + 1 = f(n) + n$$

性质 5：$1 \leqslant f(n+1) - f(n) \leqslant 2, 2 \leqslant g(n+1) - g(n) \leqslant 3$.

事实上，不等式 $f(n+1) - f(n) \geqslant 1$ 是显然的. 于是

$$g(n+1)-g(n)=(f(n+1)+n+1)-(f(n)+n)=$$
$$f(n+1)-f(n)+1\geqslant 2$$

不等式 $g(n+1)-g(n)\geqslant 2$ 说明了在 $g(n)$ 与 $g(n+1)$ 之间至少有一个函数 f 的值存在. 由此也就说明了在 $f(n)$ 与 $f(n+1)$ 之间至多只含有一个函数 g 的值. 所以

$$f(n+1)-f(n)\leqslant 2$$

从而可得
$$g(n+1)-g(n)\leqslant 3$$

如令 $f_n=f(n)$, $g_n=g(n)$, 那么从 $f(1)=1$ 出发, 利用上面的性质可以把 f 和 g 的值逐个推算出来, 即

$$f_1,g_1,f_2,f_3,g_2,f_4,g_3,f_5,f_6,g_4,f_7,f_8,g_5,\cdots$$

不难发现, 这个序列与斐波那契数列*

$$F_1=1,F_2=2,F_3=3,F_4=5,F_5=8,\cdots,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$

有密切关系. 为此, 我们定义一个序列 P_N, 规定 P_N 的第 $k(1\leqslant k\leqslant N)$ 项是 f 或 g, 视 $k\in f(\mathbf{Z}^+)$ 或 $k\in g(\mathbf{Z}^+)$ 而定, 例如

$$P_1=\{f\},P_2=\{f,g\},P_3=\{f,g,f\},P_4=\{f,g,f,f\},\cdots$$

并用记号 P_NP_M 表示两个序列 P_N, P_M 的依次合并, 即把序列 P_M 衔接于序列 P_N 的末尾. 那么

$$P_{F_3}=P_3=\{f,g,f\}=P_2P_1=P_{F_2}P_{F_1}$$
$$P_{F_4}=P_5=\{f,g,f,f,g\}=P_{F_3}P_{F_4}$$

一般地, 启发我们: $P_{F_{n+1}}$ 是 P_{F_n} 与 $P_{F_{n-1}}$ 的合并, 即

$$P_{F_{n+1}}=P_{F_n}P_{F_{n-1}}$$

也就有 $P_{F_{n+1}}$ 中恰好有 F_n 个 f 值及 F_{n-1} 个 g 值. 而且 $F_{n+1}+M$ 与 M 同为 f 值或同为 g 值 $(1\leqslant M\leqslant F_n)$, 这句话也就是等价于等式

$$f(F_n+r)=F_{n+1}+f(r),1\leqslant r\leqslant F_{n-1}$$
$$g(F_{n-1}+s)=F_{n+1}+g(s),1\leqslant s\leqslant F_{n-2}$$

下面我们继续讨论 f, g 的一些性质, 以证明这些猜测是正确的.

性质 6: $f(F_{2k-1})=F_{2k}-1$, $f(F_{2k})=F_{2k+1}$.

我们用数学归纳法来证明性质 6. 当 $k=1$ 时有

$$f(F_1)=f(1)=1=F_2-1$$
$$f(F_2)=f(2)=3=F_3$$

假定性质 6 对自然数 k 为真, 则由性质 3 可知

$$f(F_{2k+1})=f(f(F_{2k}))=F_{2k+1}+F_{2k}-1=F_{2(k+1)}-1$$
$$f(F_{2(k+1)})=f(f(F_{2k+1})+1)=F_{2(k+1)}+$$
$$F_{2k+1}=F_{2k+3}=F_{2(k+1)+1}$$

所以对自然数 $k+1$ 亦为真.

性质 6 说明, 当 n 为奇数时 F_n 为 f 值; 当 n 为偶数时, F_n 为 g

* 所谓斐波那契数列, 是指这样的一个数列, 即 $F_0=1,F_1=1,F_2=2,F_3=3,F_4=5,F_5=8,F_6=13,\cdots$ 它的通项满足循环方程

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$

也就是说, 斐波那契数列的每一项 $F_n(n\geqslant 2)$, 可以用它前面的两项 F_{n-1} 与 F_{n-2} 的和来表示.

斐波那契数列的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

值.

性质 7:若 $k>1$,则 F_k+1 恒为 f 值.

事实上,若 k 为偶数,则 F_k 为 g 值,故 F_k+1 为 f 值;若 k 为奇数,令 $k=2s+1$,则 $F_{2s+1}=f(F_{2s})$,要是

$$F_k+1=F_{2s+1}+1=f(F_{2s})+1$$

为 g 值,于是必可表示为 $f(f(t))+1$ 的形式,如此,$F_{2s}=f(t)$ 为 f 值,此为不可能,故 F_k+1 仍为 f 值.

性质 8:P_{F_n} 中恰有 F_{n-1} 个 f 值和 F_{n-2} 个 g 值.

事实上,若 n 为奇数 $n=2k+1$,则因

$$F_{2k+1}=f(F_{2k})$$

可知 $P_{F_{2k+1}}$ 中有 F_{2k} 个 f 值,于是 g 值有 $F_{2k+1}-F_{2k}=F_{2k-1}$ 个.

若 n 为偶数 $n=2k$,则由性质 6 知

$$F_{2k}=f(F_{2k-1})+1=f(f(F_{2k-2}))+1=g(F_{2k-2})$$

故 $P_{F_{2k}}$ 中有 F_{2k-2} 个 g 值,而有 $F_{2k}-F_{2k-2}=F_{2k-1}$ 个 f 值.总之,在 P_{F_n} 中不论 n 为奇数或偶数,恰有 F_{n-1} 个 f 值,而有 F_{n-2} 个 g 值.

性质 9:$F_{k+1}+M$ 与 $M(1\leqslant M\leqslant F_k)$ 同为 f 值或同为 g 值等价于等式

$$f(F_k+r)=F_{k+1}+f(r),1\leqslant r\leqslant F_{k-1}$$
$$g(F_{k-1}+s)=F_{k+1}+g(s),1\leqslant s\leqslant F_{k-2}$$

事实上,如果 $F_{k+1}+M$ 与 M 同为 f 值或同为 g 值,则可写成等式

$$P_{F_{k+1}+M}=P_{F_{k+1}}P_M$$

注意到在序列 $P_{F_{k+1}}$ 中恰有 F_k 个 f 值.现在考虑 $P_{F_{k+1}+M}$ 中第 F_k+r 个 f 值,它位于序列 $P_{F_{k+1}+M}$ 的第 $f(F_k+r)$ 项,而它又位于 $P_{F_{k+1}}P_M$ 中的第 $F_{k+1}+f(r)$ 项,故等式

$$f(F_k+r)=F_{k+1}+f(r)$$

成立.

同理可得另一等式.

性质 10:当 $n>1$ 时,F_n+M 与 $M(1\leqslant M\leqslant F_{n-1})$ 同为 f 值或同为 g 值.

当 $n=2,3$ 时,可直接检验结论为真.设 $n=k$ 时已为真,当 $n=k+1$ 时,再对 M 用归纳法,由性质 7 可知当 $M=1$ 时已为真,故假定对于 $1\leqslant m\leqslant M$ 已为真.要证明对于 $M+1$ 亦为真.

事实上,若 $M\in g(\mathbf{Z}^+)$,$F_{k+1}+M\in g(\mathbf{Z}^+)$,则必有

$$M+1\in f(\mathbf{Z}^+),F_{k+1}+M+1\in f(\mathbf{Z}^+)$$

又若 $$M-1\in f(\mathbf{Z}^+),M\in f(\mathbf{Z}^+)$$

$$F_{k+1}+M-1\in f(\mathbf{Z}^+),F_{k+1}+M\in f(\mathbf{Z}^+)$$

势必得出 $M+1\in g(\mathbf{Z}^+),F_{k+1}+M+1\in g(\mathbf{Z}^+)$

故在这两种情形之下,结论是正确的.接下来必须考虑当

$$M-1\in g(\mathbf{Z}^+),M\in f(\mathbf{Z}^+)$$

及 $F_{k+1}+M-1\in g(\mathbf{Z}^+),F_{k+1}+M\in f(\mathbf{Z}^+)$

这一情形.

令

$$M=f(r),M-1=g(s)$$

则

$$M=f(r)=r+s$$

$$f(s)=g(s)-s=(M-1)-(M-r)=r-1$$

若设 $f(s+1)=r+t,t=0,1$

则 $g(s+1)-g(s)=(s+1)+(r+t)-(M-1)=t+2$

由归纳假定 $F_{k+1}+m(1\leqslant m\leqslant M)$ 与 m 同为f值或同为g值,故由性质9可知

$$f(F_k+r)=F_{k+1}+f(r)=F_{k+1}+M$$

且 $g(F_{k-1}+s)=F_{k+1}+g(s)=F_{k+1}+M-1$

又因为 $g(F_{k-1}+s+1)=F_{k-1}+s+1+f(F_{k-1}+s+1)=$

$$F_{k-1}+s+1+F_k+f(s+1)=$$

$$F_{k-1}+s+1+F_k+r+t=$$

$$F_{k+1}+M+t+1$$

所以

$$g(F_{k-1}+s+1)-g(F_{k-1}+s)=t+2=g(s+1)-g(s)$$

利用这个等式,就可说明若 $t=0$,则

$$g(s+1)=g(s)+2=(M-1)+2=M+1\in g(\mathbf{Z}^+)$$

$$g(F_{k-1}+s+1)=g(F_{k-1}+s)+2=F_{k+1}+M-1+2=$$

$$F_{k+1}+M+1\in g(\mathbf{Z}^+)$$

即 $M+1$ 与 $F_{k+1}+M+1$ 同为 g 值.

若 $t=1$,则

$$g(s+1)=M+2\in g(\mathbf{Z}^+)$$

故

$$M+1\in f(\mathbf{Z}^+)$$

$$g(F_{k-1}+s+1)=F_{k+1}+M+2\in g(\mathbf{Z}^+)$$

故

$$F_{k+1}+M+1\in f(\mathbf{Z}^+)$$

即 $M+1$ 与 $F_{k+1}+M+1$ 同为 f 值.

有了以上这些准备,再利用斐波那契数列的性质就可以计算 $f(\mu)$ 了.由性质1,2,即得 $f(1)=1,f(2)=3$.对于给定的 $\mu\geqslant 3$,一定存在这样的 n,使 $F_{n-1}<\mu\leqslant F_n$.下面我们证明

$$f(\mu)=\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right],F_{n-1}<\mu\leqslant F_n,\mu\geqslant 3 \qquad ⑯$$

其中，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

用数学归纳法. 当 $n=3$ 时，μ 只能等于 3，此时 $f(3)=4$，而 $\left[\frac{F_3}{F_2}\times 3\right]=\left[\frac{3}{2}\times 3\right]=4$，所以等式成立.

假设对于 $3\leqslant n\leqslant k$ 的 n，式⑯成立，要证明 $n=k+1$ 时也成立. 令 $\mu=F_k+M(1\leqslant M\leqslant F_{k-1})$.

若 $M=1$，则一方面由性质 9，10 可得

$$f(F_k+1)=F_{k+1}+f(1)=F_{k+1}+1$$

另一方面，由于

$$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=\left[\frac{F_k+F_{k-1}}{F_k}\right]=\left[1+\frac{F_{k-1}}{F_k}\right]=1$$

故 $$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}(F_k+1)\right]=\left[F_{k+1}+\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=$$

$$F_{k+1}+\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=F_{k+1}+1$$

所以，当 $M=1$ 时，等式⑯成立.

若 $M=2$，则由于

$$\left[\frac{2F_{k+1}}{F_k}\right]=\left[\frac{2(F_k+F_{k-1})}{F_k}\right]=\left[\frac{3F_k+F_{k-1}-(F_k-F_{k-1})}{F_k}\right]=$$

$$3+\left[\frac{F_{k-1}-F_{k-2}}{F_{k-1}+F_{k-2}}\right]=3$$

及 $f(2)=3$，便可推知等式仍然成立. 于是可设 $M\geqslant 3$，并取 l，使

$$F_{l-1}<M\leqslant F_l,3\leqslant l\leqslant k-1$$

对于这样的 l，由归纳假定知

$$f(M)=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]F_{l-1}<M\leqslant F_l$$

因为 M 可能取值是 $F_{l-1}+1,\cdots,F_{l-1}+F_{l-2}$，所以 M 必不能被 F_{l-1} 所整除，又因为 F_l 与 F_{l-1} 互素*，故 F_lM 必不能被 F_{l-1} 所整除. 用 S 代表 $\frac{F_lM}{F_{l-1}}$ 的分数部分，即

$$\frac{F_lM}{F_{l-1}}=\left[\frac{F_lM}{F_{l-1}}\right]+S$$

那么 $$\frac{1}{F_{l-1}}\leqslant S\leqslant\frac{F_{l-1}-1}{F_{l-1}}$$

利用斐波那契数列的一个性质

$$\frac{F_k}{F_{k-1}}-\frac{F_{k+l+1}}{F_{k+l}}=\frac{(-1)^kF_l}{F_{k-1}F_{k+l}}$$

这个性质可对 l 用数学归纳法予以证明.

i 当 $l=0$ 时，即要证明

* 若用 (a,b) 表示两个整数 a 与 b 的最大公约数，则明显有 $(F_{l+1},F_l)=(F_{l-1}+F_l,F_l)=(F_l,F_{l-1})=\cdots=(F_1,F_0)=1$.

$$\frac{F_k}{F_{k-1}}-\frac{F_{k+1}}{F_k}=\frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}$$

因为 $$\frac{F_k}{F_{k-1}}-\frac{F_{k+1}}{F_k}=\frac{F_k^2-F_{k-1}F_{k+1}}{F_{k-1}F_k}$$

所以我们只要证明等式

$$F_k^2-F_{k-1}F_{k+1}=(-1)^k$$

对 k 用归纳法.当 $k=1,2$ 时,可直接验证是正确的.设等式对 k 成立,则有

$$\begin{aligned}F_{k+1}^2-F_kF_{k+2}&=(F_k+F_{k-1})^2-F_k(F_k+F_{k+1})=\\&F_{k-1}^2+2F_kF_{k-1}-F_kF_{k+1}=\\&F_{k-1}^2+2F_kF_{k-1}-F_k(F_k+F_{k-1})=\\&-F_k^2+F_kF_{k-1}+F_{k-1}^2=\\&-F_k^2+F_{k-1}F_{k+1}=(-1)^{k+1}\end{aligned}$$

即等式对 $k+1$ 也成立

Ⅱ 假定性质对于小于等于 $l-1$ 时为真,那么对于 l 也成立,因为

$$\begin{aligned}&F_k/F_{k-1}-F_{k+l+1}/F_{k+l}=\\&(F_k(F_{k+l-1}+F_{k+l-2})-F_{k-1}(F_{k+l}+F_{k+l-1}))/F_{k-1}F_{k+l}=\\&((F_kF_{k+l-1}-F_{k-1}F_{k+l})+(F_kF_{k+l-2}-F_{k-1}F_{k+l-1}))/\\&F_{k-1}F_{k+l}=((-1)^kF_{l-1}+(-1)^kF_{l-2})/(F_{k-1}F_{k+l})=\\&(-1)^kF_l/(F_{k-1}F_{k+l})\end{aligned}$$

就有 $$\left|\left(\frac{F_l}{F_{l-1}}-\frac{F_{k+1}}{F_k}\right)M\right|=\left|\left(\frac{F_l}{F_{l-1}}-\frac{F_{l+(k-l)+1}}{F_{l+(k-l)}}\right)M\right|=\frac{F_{k-l}M}{F_{l-1}F_k}\leqslant\frac{F_{k-1}F_l}{F_{l-1}F_k}$$

又当 $k>l$ 时,有

$$F_{k-l}F_l<F_k^*$$

所以 $$\left|\frac{F_l}{F_{l-1}}M-\frac{F_{k+1}}{F_k}M\right|<\frac{1}{F_{l-1}},k>l \qquad ⑰$$

去掉绝对值符号,从 ⑰ 可以得到

$$\begin{aligned}\frac{F_{k+1}}{F_k}M&<\frac{F_l}{F_{l-1}}M+\frac{1}{F_{l-1}}=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+S+\frac{1}{F_{l-1}}\leqslant\\&\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+\frac{F_{l-1}-1}{F_{l-1}}+\frac{1}{F_{l-1}}=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+1\end{aligned}$$

及 $$\frac{F_{k+1}}{F_k}M>\frac{F_l}{F_{l-1}}M-\frac{1}{F_{l-1}}\geqslant\frac{F_l}{F_{l-1}}M-S=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]$$

即 $$\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]<\frac{F_{k+1}}{F_k}M<\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+1$$

所以

* 这个不等式由下面的等式即可推得

$F_k=F_lF_{k-l}+F_{l-1}F_{k-(l+1)}$

我们对 l 用数学归纳法证明这个等式.

a.当 $l=1$ 时,等式为

$F_k=F_{k-1}+F_{k-2}$

即循环方程,显然是成立的;

b.假定等式对于 $l-1$ 成立,则有

$F_k=F_{l-1}F_{k-(l-1)}+F_{l-2}F_{k-l}=$

$F_{l-1}(F_{k-l}+F_{k-(l+1)})+$

$$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}M\right] = \left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right], k > l \qquad ⑱$$

于是$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}(F_k + M)\right] = F_{k+1} + \left[\frac{F_{k+1}}{F_k}M\right] = F_{k+1} + \left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right] =$

$$F_{k+1} + f(M) = f(F_k + M)$$

这样式 ⑯ 全部获证.

另一方面,从上面的证明中可以看出,形如 ⑰ 的不等式,从形如 ⑱ 的等式,只要 $k > l$,总是成立的.现在任取一个充分大的 $k > n$,就有

$$\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right] = \left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right], k > n$$

所以 $$f(\mu) = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right] = \left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right], k > n$$

既然上式对任意大的 $k(k > n)$ 都成立,于是可用

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

来代替等式 $$f(\mu) = \left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right]$$

中的比值$\frac{F_{k+1}}{F_k}$,可得

$$f(\mu) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu\right]$$

从而即有 $$f(2\mu) = [(1+\sqrt{5})\mu]$$

$F_{l-2}F_{k-l} =$
$(F_{l-1} + F_{l-2})F_{k-l} +$
$F_{l-1}F_{k-(l+1)} =$
$F_lF_{k-l} + F_{l-1}F_{k-(l+1)}$
即等式对 l 也成立.

4 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,一个圆内切于 $\triangle ABC$ 的外接圆,并与 AB,AC 分别相切于 P,Q,求证:线段 PQ 的中点是 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心.

美国命题

证法 1 已知 $AB = AC$,图形关于直径 AM 对称,如图 20.8 所示.M 为两圆的切点.AM 平分 $\angle BAC$,$\angle PMQ$ 和线段 PQ,$PQ /\!/ BC$,PQ 的中点用 I 表示.设 $\angle APQ = 2\beta$,得到 $\angle ABC = 2\beta$,且 $\angle PMQ = \angle APQ = 2\beta$,因为两者都等于 PQ 弧的一半.这样 $\angle PMI = \frac{1}{2}\angle PMQ = \beta$.

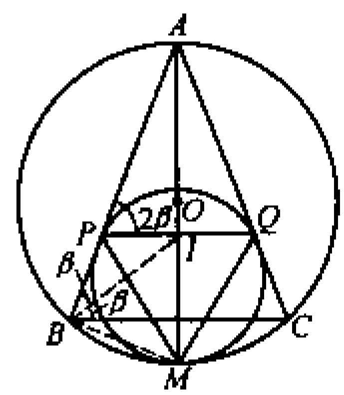


图 20.8

因为 $\angle ABM = \angle MIP = 90°$,$B$,$M$,$I$,$P$ 四点共圆且 $\angle PBI$ 和 $\angle PMI$ 对同弧,因此 $\angle PBI = \angle PMI = \beta$.这样在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 与 $\angle B$ 的平分线相交于点 I,I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

证法 2 如图 20.9 所示，D 是两圆切点，从圆和等腰 $\triangle ABC$ 的对称性看出：AD 是大圆直径(对称轴)，$AP = AQ$，因此 PQ 中点 E 在 AD 上，并且 $AE \perp PQ$. 由对称性有

$$\overset{\frown}{PD} = \overset{\frown}{QD}, \angle PQD = \angle QPD$$

因为 $\angle DQC = \angle DPQ$，所以 $\angle DQC = \angle EQD$. 又 DQ 是公共边，所以 $\text{Rt}\triangle EQD \cong \text{Rt}\triangle CQD$. 于是有 $EQ = QC$，从而 $\angle QCE = \angle QEC$. 所以 $PQ \parallel BC$，$\angle BCE = \angle QEC$.

这样就有 $\angle QCE = \angle BCE$，即 EC 平分 $\angle BCA$，E 就是 $\triangle ABC$ 的内心.

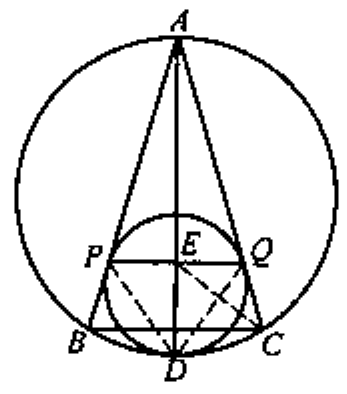


图 20.9

证法 3 如图 20.10 所示，连结 $OB, BD, O'P, PD$，则

$$\angle 1 = \angle 2 (PQ \parallel BC)$$
$$\angle 2 = \angle 3 (O, P, B, D \text{ 共圆})$$
$$\angle 3 = \angle 4 (O'P \parallel BD)$$
$$\angle 4 = \angle 5 (O'P = O'D)$$
$$\angle 5 = \angle 6 (O, P, B, D \text{ 共圆}).$$

因此，$\angle 1 = \angle 6$. 所以 BO 是 $\angle ABC$ 的平分线.

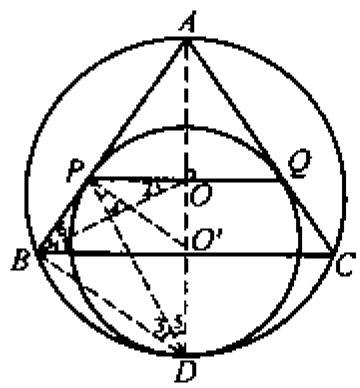


图 20.10

证法4 上面三种方法，都是通过证明"O 是 $\triangle ABC$ 的角分线的交点"来完成的. 下面，我们再利用"PQ 的中点 O 到等腰 $\triangle ABC$ 的腰的距离等于到底边的距离"的事实来证本题.

过 O 作 $OF \perp AC$，F 为垂足；分别连结 $O'Q, CD$，则 $O'Q \perp AC$，$CD \perp AC$；又设直径 AD 与 BC 交于 E，如图 20.11 所示.

由 $\text{Rt}\triangle OFA \backsim \text{Rt}\triangle O'QA$ 得

$$\frac{OF}{OA} = \frac{O'Q}{O'A}$$

由 $O'Q = O'D$(同圆半径)得

$$\frac{O'Q}{O'A} = \frac{O'D}{O'A}$$

由 $O'Q \parallel DC$ 知 $$\frac{O'D}{O'A} = \frac{QC}{QA}$$

由 $PQ \parallel BC$ 知 $$\frac{QC}{QA} = \frac{OE}{OA}$$

因此，$\frac{OF}{OA} = \frac{OE}{OA}$，故 $OF = OE$. 所以 PQ 的中点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心.

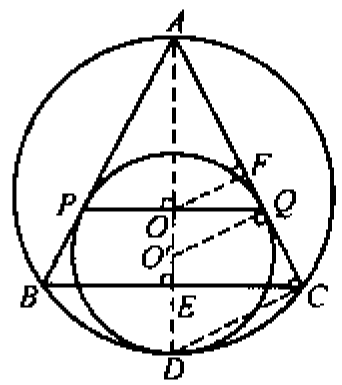


图 20.11

证法 5 以圆 O' 的圆心 O' 为原点，直径 DA 所在直线为纵轴，建立平面直角坐标系，如图 20.12 所示，为方便起见，设圆 O' 的半径为 1，大圆圆心坐标为 $O_1(0, a)$，则大圆 O_1 的半径为 $a + 1$，

圆 O' 与圆 O_1 的方程分别为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2+(y-a)^2=(a+1)^2\end{cases} \quad ①$$

又设点 Q 坐标为(x_1,y_1)，则圆 O' 的切线AC 的方程为

$$x_1x+y_1y=1 \quad ②$$

于是，我们有

$$\begin{cases}x_10+y_1(2a+1)=1\\x_2^1+y_1^2=1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\pm 2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}\\y_1=\dfrac{1}{2a+1}\end{cases}$$

由此知点 Q 坐标为$(\frac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1},\frac{1}{2a+1})$，点 O 坐标为$(0,\frac{1}{2a+1})$，AC 的方程为

$$\frac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}x+\frac{1}{2a+1}y-1=0 \quad ③$$

它以直线 ② 为法线，故 O 到AC 的距离

$$d_{AC}=\left|\frac{2\sqrt{a^2+a}}{2a+1}\cdot 0+\frac{1}{2a+1}\cdot\frac{1}{2a+1}-1\right|=\frac{4a(a+1)}{(2a+1)^2}$$

同理

$$d_{AB}=\frac{4a(a+1)}{(2a+1)^2}$$

又将 ① 与 ③ 联立求解，分别得 A 与 C 的坐标为

$$A(0,2a+1),C(\frac{4(a+1)\sqrt{a^2+a}}{(2a+1)^2},\frac{-4a^2-2a+1}{(2a+1)^2})$$

因此，O 到BC 的距离

$$d_{BC}=\frac{1}{2a+1}-\frac{-4a^2-2a+1}{(2a+1)^2}=\frac{4a(a+1)}{(2a+1)^2}$$

这就是说，PQ 的中点 O 与 $\triangle ABC$ 的三边等距．所以 O 是 $\triangle ABC$ 的内心．

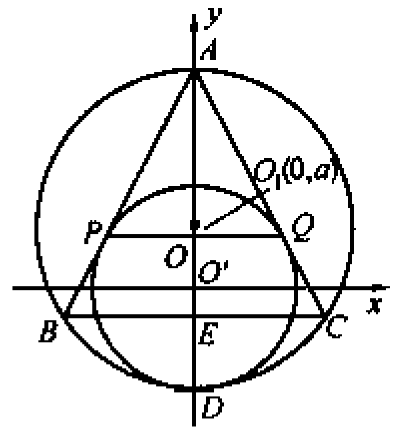


图 20.12

注　本题可推广如下，即去掉条件 $AB=AC$，结论仍然成立，其证明如下．

利用三角法．

设 M 为 PQ 中点，则 AM 平分 $\angle PAC$，延长 AM 交外接圆 $O(R)$ 于 E，则 AE 必过它的内切圆 $O_1(r')$ 的圆心 O_1，连结 BE，如能证明 $EB=EM$，则 M 为 $\triangle ABC$ 的内心立即可得．

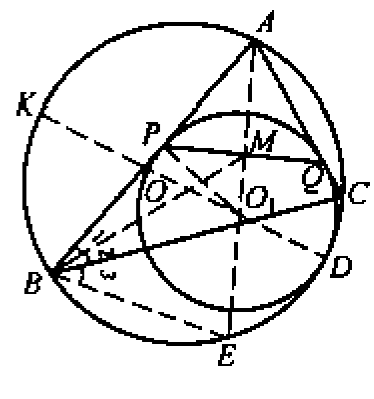


图 20.13

连结 BE,BM,O_1P．再连结 OO_1 并延长交圆 O 于K,D，这里 D 是二圆的切点．在 $\triangle ABE$ 中，由正弦定理得 $BE=2R\cdot\sin\frac{A}{2}$，另一方面，由于

$$EM = EO_1 + O_1M \qquad ④$$

由交弦线段定理得 $EO_1 \cdot O_1A = DO_1 \cdot O_1K$,即

$$EO_1 \cdot \frac{r'}{\sin\frac{A}{2}} = r'(2R - r')$$

由此得

$$EO_1 = (2R - r')\sin\frac{A}{2}$$

由 $\text{Rt}\triangle O_1PM$ 得 $O_1M = r' \cdot \sin\frac{A}{2}$,代入 ④ 得

$$EM = (2R - r')\sin\frac{A}{2} + r' \cdot \sin\frac{A}{2} = 2R \cdot \sin\frac{A}{2} = EB$$

所以

$$\angle EBM = \angle EMB$$

即

$$\angle 2 + \angle 3 = \frac{A}{2} + \angle 1$$

但 $\angle 3 = \frac{A}{2}$,所以 $\angle 1 = \angle 2$,即 BM 平分 $\angle B$,所以 M 为 $\triangle ABC$ 的内心.

5 若 $\{a_k\}(k = 1,2,3,\cdots,n,\cdots)$ 是由一系列各不相等的正整数构成的数列.求证:对所有的自然数 n 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

法国命题

证法 1 有一由正整数构成的单调数列 $\{m_i\}$,其中 $m_i < m_j(i < j)$,那么对于任何 k,$m_k \geqslant k$,故 $m_k/k^2 \geqslant 1/k$,且

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad (对任何\ n)$$

但是题中数列 $\{a_i\}$ 的单调性并不一定是必需的.下面我们来证明一个“排序不等式”来帮助说明这一点.

设 $\{r_i\}$ 和 $\{s_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 为两个由实数构成的集合,且 $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_n$ 及 $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$.那么,若 $\{t_i\}$ 为 s_i 的某种排列,则

$$\sum_{i=1}^{n} r_is_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} r_it_i \geqslant r_1s_n + r_2s_{n-1} + \cdots + r_ns_1 \qquad ①$$

证明 假设某 j,k,若 $j < k$,有 $t_j \geqslant t_k$.那么

$$r_jt_k + r_kt_j - (r_jt_j + r_kt_k) = (t_j - t_k)(r_k - r_j) \geqslant 0$$

因此

$$r_jt_k + r_kt_j \geqslant r_jt_j + r_kt_k$$

在 $\sum_{i=1}^{n} r_it_i$ 中,将 t_j 与 t_k 对换,其值不会下降.经过类似的有限次对换,得到 t_i 的一个不断上升的数列,故 $\sum_{i=1}^{n} r_is_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} r_it_i$.

对式 ① 右边的不等式也可做类似证明.

式 ① 有一个直观的物理解释.我们把跷跷板一端的某个位置

到支点之间的距离记为 r_i,把坐在该位置上的人的质量记为 t_i.那么当最重的人坐在跷跷板的顶端,其余的人由重而轻依次坐下.此时,围绕支点产生的力矩和最大.

为解此题,设 T 为由各不相同正整数组成的给定数列 $\{a_k\}$ 的前 n 个元素构成的集合.设 R 为 n 与 $1/k^2$ 的乘积构成的集合,$k=1,2,\cdots,n$.那么

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant(\text{最小的 }a)\cdot\frac{1}{1^2}+(\text{次小的 }a)\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+(\text{最大的 }a)\cdot\frac{1}{n^2} \quad ②$$

因最小的 a 大于等于 1,次小的一个 a 大于等于 2,最大的 a 大于等于 n,故式 ② 右边总和大于等于

$$1+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

证法 2 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时,显然有 $\frac{a_1}{1^2}\geqslant\frac{1}{1}$.

设当 $n=h$(h 为自然数)时,有

$$\sum_{k=1}^{h}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}$$

我们来证明,当 $n=k+1$ 时,有

$$\sum_{k=1}^{h+1}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{k}$$

我们分 $a_{h+1}\geqslant h+1$ 和 $a_{h+1}<h+1$ 两种情况进行研究.

ⅰ 如果 $a_{h+1}\geqslant h+1$,则有

$$\sum_{k=1}^{h+1}\frac{a_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{h}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{h+1}}{(h+1)^2}\geqslant\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{h+1}{(h+1)^2}=\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{1}{h+1}=\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{k}$$

故不等式成立.

ⅱ 如果 $a_{h+1}<h+1$,则必至少有一个 $a_i^*\geqslant h+1$,$i\leqslant h+1$(否则,$a_1,a_2,\cdots,a_{h+1}$ 这 $h+1$ 个互不相等的正整数就都小于 $h+1$ 了,这是不可能的).

现在将第 i 个元改写为

$$a_i^*=a_{h+1}+a_i^*-a_{h+1}$$

则

$$\sum_{k=1}^{h+1}\frac{a_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_i^*}{i^2}+\sum_{k=i+1}^{h}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{h+1}}{(h+1)^2}=$$

$$\sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{h+1}+a_i^*-a_{h+1}}{i^2}+\sum_{k=i+1}^{h}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{h+1}}{(h+1)^2}=$$

$$\sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{h+1}}{i^2}+\sum_{k=i+1}^{h}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{h+1}}{(h+1)^2}+\frac{a_i^*-a_{h+1}}{i^2}=$$
$$\sum_{k=1}^{h}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{h+1}}{(h+1)^2}+\frac{a_i^*-a_{h+1}}{i^2}\geqslant$$
$$\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{a_{h+1}}{(h+1)^2}+\frac{a_i^*-a_{h+1}}{i^2}(\text{归纳法假设})\geqslant$$
$$\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{a_{h+1}}{(h+1)^2}+\frac{a_i^*-a_{h+1}}{(h+1)^2}(i\leqslant h+1)=$$
$$\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{a_i^*}{(h+1)^2}\geqslant$$
$$\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{h+1}{(h+1)^2}(a_i^*\geqslant h+1)=$$
$$\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}+\frac{1}{h+1}=\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{k}$$

证毕.

证法 3 用比较法证明.要证

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

成立,只须证下式成立,即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k^2}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\geqslant 0$$

为此,考虑到“$a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots$ 为两两互不相同的正整数”这一已知条件,易知

$$a_1\geqslant 1$$
$$a_1+a_2\geqslant 1+2$$
$$\vdots$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 1+2+\cdots+n$$

即
$$\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{m}k\geqslant 0,m=1,2,\cdots,n$$

因此
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}k}{n^2}\geqslant 0$$

证毕.

6 一个国际性社团的成员来自六个国家,成员名单上有 1 978 个名字,分别标为第 1,2,…,1 978 个.求证:至少有一个成员的标号为来自同一国家的其他两个成员的标号之和,或者为来自同一国家的其他一个成员的标号的二倍.

荷兰命题

证法1 该题可以这样来表达:若集合$\{1,2,3,\cdots,1\ 978\}$被分成六个互不相交的子集A,B,C,D,E和F,那么该六个子集中至少有一个子集中的一个元素为该子集中其他两个元素之和(这两个元素也可能相等).

首先,我们注意到不管1 978个元素如何分布在六个子集中,至少其中一个子集,不妨称为A,包括$[1\ 978/6]+1=330$个元素,这些元素我们用a_i表示,并按大小顺序排列$a_1<a_2<\cdots<a_{330}$.若下述329个差中的任何一个

$$b_1=a_{330}-a_{329},b_2=a_{330}-a_{328},\cdots,b_{329}=a_{330}-a_1$$

属于集合A,问题就解决了,因为那样对于某个k有

$$a_{330}-a_k=a_1\in A$$

所以

$$a_k+a_1=a_{330}$$

因此假设这329个差中没有一个落在集合A内,相反都分布在其他五个子集中.同样,我们又可证得,这五个子集中至少有一个子集,称为B集,至少包括$[329/5]+1=66$个这些元素.我们用c_j表示其差

$$c_j=b'_{66}-b'_{66-j}$$

可以更详细地说明一下这个过程:将包括在B集中的差值$b_j=a_{330}-a_{330-j}$按从小到大顺序排列,并以$b'_1,b'_2,\cdots,b'_{66}$重新命名.并构成

$$c_j=b'_{66}-b'_{66-j}=(a_{330}-a_i)-(a_{330}-a_k)=a_k-a_i$$

$$j=1,2,\cdots,65;i<k<330;1\leqslant a_i<a_k\leqslant 1\ 978$$

其中,c_j是满足$1<c_j<1\ 977$的整数.

若有某个c_j值落在A集或B集,问题就得到解答;如果没有,它们将分布在其他的4个子集中,其中至少有一个子集,称为C,至少包含$[65/4]+1=17$个这样的元素c_j.我们又将其16个差值$c_{17}-c_j$按从小到大顺序排列,重新命名为c'_i. $c'_i<c'_j$,若$i<j$.若没有一个c'_i元素落于集合A,B,C,它们将分布在另外的三个子集中,而这三个子集中至少有一个子集(称为集合D)包括至少$[17/3]+1=6$个元素,并命名为d'_i.

类似地,我们可证明,若d'_i元素的5个差值没有落在A,B,C,D中的任一个内,那么另外两个子集中至少有一个子集,称为E,包含至少$[5/2]=3$个这种值.相似地,若这3个值的两个差值e'_1,e'_2没有落在A,B,C,D,E,F中,它们必定落在剩余的集合F中.其差$e'_2-e'_1<1\ 978$,一定属于六个子集中的一个.

证法2 把这六个国家分别用$M_i(i=1,2,3,4,5,6)$表示.假设命题不成立,则任何一个成员的编号数一定和他的两个同胞编

号数之和及一个同胞编号数二倍都不相等，换言之，任一国的任两代表的编号数之差一定不是此国中代表的编号．我们记此结论为（T）．由 $1\,978 = 6 \times 329 + 4$ 可知，成员最多的国家（设为 M_1）至少有 330 人，设他们的编号为 $k_1 > k_2 > \cdots > k_{330}$，根据（$T$），$k_1 - k_i$（$i = 2,3,\cdots,330$）不在 M_1 中．又 $1\,978 > k_1 - k_i \geqslant 1$，所以这 329 个编号必在 M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 中．

从 $329 = 5 \times 65 + 4$ 知，包含（$k_1 - k_i$）最多的国家（记 M_2）至少有 66 人，设此 66 人的编号为 $l_1 > l_2 > \cdots > l_{66}$，由（$T$）知 $l_1 - l_i$（$i = 2,\cdots,66$）不在 M_2 中．再设 $L_1 = k_1 - k_i, L_i = k_1 - k_p$，则根据（$T$），$l_1 - l_i = k_p - k_i$ 也不在 M_1 中，换言之，$l_1 - l_i$ 这 65 个编号必在 M_3, M_4, M_5, M_6 中．

从 $65 = 4 \times 16 + 1$ 知，包含（$l_1 - l_i$）最多的国家（记 M_3）至多有 17 人，设他们的编号 $m_1 > m_2 > \cdots > m_{17}$，根据（$T$），$m_1 - m_i$（$i = 2,\cdots,17$）不在 M_3 中，又因

$$m_1 - m_i = (l_1 - l_i) - (l_1 - l_{i2}) = l_{i2} - l_{i1} =$$
$$(k_1 - k_{i2}) - (k_1 - k_{i1}) = k_{i1} - k_{i2}$$

它们也不在 M_1 和 M_2 中，换言之，它们必在 M_4, M_5, M_6 中．

又 $17 = 3 \times 5 + 2$，设包含（$m_1 - m_i$）最多的国家为 M_4，其中至少有 6 人，设他们的编号为 $u_1 > u_2 > \cdots > u_6$，同理 $u_1 - u_i$（$i = 2,3,\cdots,6$）不在 M_1, M_2, M_3, M_4 中，因此必在 M_5, M_6 中．

又 $5 = 2 \times 2 + 1$，设包含（$u_1 - u_i$）最多的国家为 M_5，其中至少有 3 人，设他们的编号为 $v_1 > v_2 > v_3$，同理，$v_1 - v_2$ 和 $v_1 - v_3$ 不在 M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 中，因此必在 M_6 中．又因 $(v_1 - v_3) - (v_1 - v_2) = (v_2 - v_3)$，根据（$T$），它不在 M_6 中，同时也不在 M_i（$i = 1,2,3,4,5$）中，但是 $1\,978 > v_2 - v_3 \geqslant 1$，$v_2 - v_3$ 应该是一个成员的编号，于是推出矛盾，所以原命题必须成立．

证法 3　正整数或一个阿贝尔（Able）群的子集 A 称为无和的，如果对于 $x, y, z \in A$，方程 $x + y = z$ 无解．当然这里允许 $x = y$．与费马猜想有关，舒尔（Schur）在 1916 年考虑了下一问题：集合 $\{1,2,\cdots,f(n)\}$ 可以分成 n 个无和子集的最大 $f(n)$ 是多少？

我们只知道舒尔函数 $f(n)$ 的四个值．尝试可知 $f(1) = 1$，$f(2) = 4$，$f(3) = 13$，Baumert 在 1961 年借助于计算机找到了 $f(4) = 44$．$\{1,2,\cdots,44\}$ 的一个无和分划是

$$S_1 = \{1,3,5,15,17,19,26,28,40,42,44\}$$
$$S_2 = \{2,7,8,18,21,24,27,33,37,38,43\}$$
$$S_3 = \{4,6,13,20,22,23,25,30,32,39,41\}$$
$$S_4 = \{9,10,11,12,14,16,29,31,34,35,36\}$$

舒尔发现了下面的估计式

$$\frac{3^n-1}{2} \leqslant f(n) \leqslant [en!]-1$$

现在我们证明把集$\{1,2,\cdots,[en!]\}$分成 n 个子集时，至少在一个子集中方程 $x+y=z$ 是有解的.

设

$$\{1,2,\cdots,[en!]\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

是分成 n 个子集的划分. 我们考虑有$[en!]+1$ 个顶点的完全图 G，并把顶点标为 $1,2,\cdots,[en!]+1$. 用 n 种颜色 $1,2,\cdots,n$ 来对 G 染色. 边 rs 染为第 m 色，如果 $|r-s| \in A_m$. 则图 G 有同色三角形，即存在正整数 r,s,t 使 $r<s<t \leqslant [en!]+1$ 且 rs,rt,st 有同一种颜色 m，即

$$s-r,t-s,t-r \in A_m$$

因为$(s-r)+(t-s)=t-r$，A_m 不是无和的. 这就推出

$$f(n) \leqslant [en!]-1$$

特别有 $f(6) \leqslant [720e]-1$.

这可视为是较简单的证明. 其中数 1 978 可换成 1 957.

推广　可以从相反方面提出问题，不出现原题指出的现象，可以有多少人参加 n 个国家组成的国际社团？

此推广属于人民大学分校数学教研究苏亚贵先生

若一个自然数集合中任二数之正差 $\triangle_A$ 不属于这个集合，则称此集合为正则集合，或说它是正则的，用这定义，可以把上面的问题抽象为如下的数学问题：

n 个正则集合，能包含多少个(从 1 开始的) 连续自然数？

现给出一个数学命题和一个猜想.

1. 一个数学命题

(1) n 个正则集合包含的连续自然数.

由于 n 个正则集合 P_n 的形式很多，它包含连续自然数的个数 H_n 就不确定. 去掉 P_n 中大于 H_n 的数字，得到 n 个正则子集合 A_n，以后称它们为正则组合. A_n 与 P_n 包含同样多的连续自然数，随着 n 的增加，A_n 的形式和 H_n 都急剧增多.

$n=3$ 时，A_n 已有多种，只写三个，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 12 \\ 2 & 3 & 7 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

相应的 H_3 为 9,10,12.

但不论 n 多大，A_n 绝不能包含全体自然数. 换句话说，H_n 一定有上界，因此有最大值.

本文的命题给出一类正则组合 A_n 的表达式和计算 H_n 的公式.

(2) 几个定义.

定义 1 称$\{[N]^{(k)}\}$为自然数 N 的 k 级集合,即

$$\{[N]^{(k)}\} = \{[9N-4]^{(k-1)},[9N-3]^{(k-1)},[9N-2]^{(k-1)},[9N-1]^{k-1},[9N]^{(k-1)}\}, k = 1,2,\cdots \qquad ①$$

规定 $$[N]^{(0)} = N$$

用符集$[N]^{(k)}$可写出 n 个数集合的表达式:

设 $n = \begin{cases}2m+1(n\text{ 为奇数})\\2m+2(n\text{ 为偶数})\end{cases}, m = 0,1,2,\cdots$

以 C_s 表示第 s 个自然数集合($s = 1,2,\cdots,n$). C_s 中的各数由②,③确定,即

$$C_s = \begin{cases}C_{2k+1} = \{[1+3i]^{(k)}\} & ②\\ C_{2k+2} = \{[2+9i]^{(k)},[3+9i]^{(k)}\} & ③\end{cases}$$

其中,$k = 0,1,2,\cdots,m$; $i = 0,1,2,\cdots$.

定义 2 $b_P = \frac{1}{2}\times 3^{P-1} - \frac{1}{2}, P = 1,2,\cdots,n$ ④

在由②,③表示出的 C_s 中,令 $i = 0,1,2,\cdots,b_{n-s+1}$,则得 C_s 的子集合,记为 $C_{s,b_{n-s+1}}(s = 1,2,\cdots,n)$.

定义 3 $M_{n,s} = C_{s,b_{n-s+1}}$ 中的最大数($s = 1,2,\cdots,n$).

(3) 一个命题.

命题:可以找到 n 个正则组合 A_n,包含 H_n 个连续自然数,即

$$A_n = \begin{pmatrix} C_{1,b_n} \\ C_{2,b_{n-1}} \\ \vdots \\ C_{s,b_{n-s+1}} \\ \vdots \\ C_{n,b_1}\end{pmatrix} \qquad ⑤$$

$$H_n = \max(C_{1,b_n}) = M_{n,1} = \frac{1}{2}\times 3^n - \frac{1}{2} \qquad ⑥$$

下面写出前几个 A_n 和 H_n,即

$$A_1 = (1), A_2 = \begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 10 & 13\\2 & 3 & 7 & 11 & 12\\5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & 25 & 28 & 31 & 34 & 37 & 40\\2 & 3 & 7 & 11 & 12 & 16 & 20 & 21 & 25 & 29 & 30 & 34 & 38 & 39\\5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 19 & 20 & 21 & 22 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36\\14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27\end{pmatrix}$$

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	…
1	4	13	40	121	364	…

要证明上述命题只须证明:

i A_n 中每个组合都是正则的;

ii $H_n = M_{n,1} = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$ 为 A_n 中的最大数;

iii $H_{n+1} \notin \{C_s\}(s = 1,2,\cdots,n)$;

iv $\{1,2,\cdots,M_{n,1}\} = C_{1,b_n} + C_{2,b_{n-1}} + \cdots + C_{n,b_1}$.

写成四个定理加以证明,就证明了命题.为便于计算,将 ②,③ 改写成如下形式,即

$$C_s = \begin{cases} C_{2k+1} = \{9^k + 3 \times 9^k i - \sum_{j=0}^{k} d_j 9^{k-j}\} & ②' \\ C_{2k+2} = \{e 9^k + 9^{k+1} i - \sum_{j=0}^{k} d_j 9^{k-j}\} & ③' \end{cases}$$

其中,$k = 0,1,2,\cdots,m; i = 0,1,2,\cdots; e = 2,3$.

$$d_j = \begin{cases} 0(k = 0, j = 0) \\ 0,1,2,3,4(k > 0, j = 1,2,\cdots,k) \end{cases}$$

2.命题的证明

定理 1 A_n 中 $C_{s,b_{n-s+1}}(s = 1,2,\cdots,n)$ 是正则的.

定理 1 的证明 $C_{s,b_{n-s+1}}$ 是 C_s 的一部分,故只要证明 C_s 是正则的即可,设

$$n = \begin{cases} 2m + 1(n \text{ 为奇数}) \\ 2m + 2(n \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

i $s = 2k + 1$ 时,$C_s = C_{2k+1}(k = 0,1,\cdots,m)$.

以 ΔC_{2k+1} 表示 C_{2k+1} 中任二数的正差 Δa 组成的集合,由 ②′ 可得

$$\Delta C_{2k+1} = \{|\Delta_1|\} + \{3 \times 9^k P \pm \Delta_1\}, P = 1,2,\cdots \quad ⑦$$

当 $k > 0$ 时

$$\Delta_1 = l_1 9^{k-1} \pm \{l_2 9^{k-2} \pm (\cdots \pm (l_{l-1} 9 \pm l_k)\cdots)\}$$

$$l_j = 0,1,2,3,4; j = 1,2,\cdots,k$$

当 $k = 0$ 时,$\Delta_1 = 0$,$\{|\Delta_1|\}$ 是空集只要证 ΔC_{2k+1} 中没有属于 C_{2k+1} 的数,即要证

$$C_{2k+1} \cap \Delta C_{2k+1} = \varnothing \quad ⑧$$

对同一个 C_s 而言,⑧ 中 k 为定数($0 \leqslant k \leqslant m$).用 3×9^k 除式 ⑧ 中二集合的每一个数,各得由余数组成的集合,记为 $\{R_{2k+1}\}$ 和 $\{\Delta R_{2k+1}\}$.因 C_{2k+1} 中的数都不是 3×9^k 的倍数,故只要二余数集合没有共同数 ⑧ 就成立,即只要证

$$\{R_{2k+1}\} \cap \{\Delta R_{2k+1}\} = \varnothing, 0 \leqslant k \leqslant m \quad ⑨$$

由 ②′
$$\{R_{2k+1}\} = \{9^k - \sum_{j=0}^{k} d_j q^{k-j}\}$$

$$\min\{R_{2k+1}\} = 9^k - 4\sum_{j=1}^{k} q^{k-j} =$$

$$9^k - \frac{1}{2}(9^k - 1) = \frac{1}{2} \times 9^k + \frac{1}{2}$$

$$\max\{R_{2k+1}\} = 9^k$$

所以

$$\frac{1}{2} \times 9^k + \frac{1}{2} \leqslant R_{2k+1} 9^k \quad ⑩$$

由 ⑦ 有 $\{\Delta R_{2k+1}\} = \{|\Delta_1|\} + \{3 \times 9^k - |\Delta_1|\}$

$$\max\{|\Delta_1|\} = 4(9^{k-1} + 9^{k-2} + \cdots + 1) = \frac{1}{2} \times 9^k - \frac{1}{2}$$

$$\min\{3 \times 9^k - |\Delta_1|\} = 3 \times 9^k - \left(\frac{1}{2} \times 9^k - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \times 9^k + \frac{1}{2}$$

所以
$$\Delta R_{2k+1} \leqslant \frac{1}{2} \times 9^k - \frac{1}{2}$$

或

$$\Delta R_{2k+1} \geqslant \frac{5}{2} \times 9^k + \frac{1}{2} \quad ⑪$$

比较 ⑩ 与 ⑪ 可得

$$\max\{|\Delta_1|\} < \min\{R_{2k+1}\}$$

$$\max\{R_{2k+1}\} < \min\{3 \times 9^k - |\Delta_1|\}$$

故 ⑨ 成立，即当 s 为奇数时，C_s 是正则的.

ⅱ $s = 2k + 2$ 时，$C_s = C_{2k+2}(k = 0,1,\cdots,m)$.

由 ③ 得

$$\Delta C_{2k+2} = \{|\Delta_2|\} + \{9^{k+1}P \pm \Delta_2\}, P = 1,2,\cdots \quad ⑫$$

当 $k > 0$ 时

$$\Delta_2 = q9^k \pm (l_1 9^{k-1} \pm (\cdots \pm (l_{k-1}9 \pm l_k)\cdots))$$

$$q = 0,1; l_j = 0,1,2,3,4, j = 1,2,\cdots,k$$

当 $k = 0$ 时，$\Delta_2 = 0$，$\{|\Delta_2|\}$ 是空集.

同理，可用 9^{k+1} 除 C_{2k+2} 和 ΔC_{2k+2} 中的每个数，各得由余数组成的集合 $\{R_{2k+2}\}$ 和 $\{\Delta R_{2k+2}\}$. 只要证

$$\{R_{2k+2}\} \cap \{\Delta R_{2+2}\} = \varnothing, 0 \leqslant k \leqslant m \quad ⑬$$

由 ③′
$$\{R_{2k+2}\} = \{e9^k - \sum_{j=0}^{k} d_j 9^{k-j}\}$$

$$\min\{R_{2k+2}\} = 2 \times 9^k - 4\sum_{j=1}^{k} 9^{k-j} = \frac{3}{2} \times 9^k + \frac{1}{2}$$

$$\max\{R_{2k+2}\} = 3 \times 9^k$$

所以

$$\frac{3}{2}\times 9^k+\frac{1}{2}\leqslant R_{2k+2}\leqslant 3\times 9^k \quad ⑭$$

由 ⑫ 得 $\{\Delta R_{2k+2}\}=\{|\Delta_2|\}+\{9^{k+1}-|\Delta_2|\}$

$$\max\{|\Delta_2|\}=9^k+4\sum_{j=1}^{k}9^{k-j}=\frac{3}{2}\times 9^k-\frac{1}{2}$$

$$\min\{9^{k+1}-|\Delta_2|\}=9^{k+1}-\left(\frac{3}{2}\times 9^k-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}\times 9^k+\frac{1}{2}$$

故

$$\Delta R_{2k+2}\leqslant\frac{3}{2}\times 9^k-\frac{1}{2}$$

或

$$\Delta R_{2k+2}\geqslant\frac{15}{2}\times 9^k+\frac{1}{2} \quad ⑮$$

比较 ⑭ 与 ⑮ 可得

$$\max\{|\Delta_2|\}<\min\{R_{2k+2}\}$$

$$\max\{R_{2k+2}\}<\min\{9^{k+1}-|\Delta_2|\}$$

这证明 ⑬ 成立,故 s 为偶数时,C_s 是正则的. 由 i,ii 的证明,定理 1 成立.

定理 2 正则组合 $C_{s,b_{n-s+1}}$ 中最大数记为 $M_{n+s}(s=1,2,\cdots,n)$ 则有

$$M_{n,n}<M_{n,n-1}<\cdots<M_{n,2}<M_{n,1}=H_n=\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2} \quad ⑯$$

定理 2 的证明 设 $n=\begin{cases}2m+1(n\text{ 为奇数})\\2m+2(n\text{ 为偶数})\end{cases}$

i $s=2k+1$ 时,$C_{s,b_{n-s+1}}=C_{2k+1,b_{n-2k}}(k=0,1,\cdots,m)$.

$$C_{2k+1,b_{n-2k}}=\{9^k+3\times 9^k i-\sum_{j=0}^{k}d^j9^{k-j}\},i=0,1,\cdots,b_{n-2k} \quad ⑰$$

$$\max(C_{2k+1},b_{n-2k})=9^k+3\times 9^k b_{n-2k}=$$

$$9^k+3\times 9^k\left(\frac{1}{2}\times 3^{n-2k-1}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}\times 3^{2k}=$$

$$\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}\times 3^{s-1} \quad ⑱$$

ii $s=2k+2$ 时,$C_{s,b_{n-s+1}}=C_{2k+2,b_{n-2k-1}}(k=0,1,\cdots,m)$.

$$C_{2k+2,b_{n-2k-1}}=\{e9^k+9^{k+1}i-\sum_{j=0}^{K}d_j9^{k-j}\},i=0,1,\cdots,b_{n-2k-1} \quad ⑲$$

$$\max(C_{2k+2,b_{n-2k-1}})=3\times 9^k+9^{k+1}b_{n-2k-1}=$$

$$3\times 9^k+9^{k+1}\left(\frac{1}{2}\times 3^{n-2k-2}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$3\times 9^k+\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{9}{2}\times 9^k=$$
$$\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}\times 3^{2k+1}=\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}\times 3^{s-1}$$
⑳

由 ⑱ 与 ⑳ 可得

$$\max(C_{s,b_{n-s+1}})=\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}\times 3^{s-1}=M_{n,s},s=1,2,\cdots,n \quad ㉑$$

由 ㉑ 可见 ⑯ 成立，定理 2 证毕.

定理 3 $M_{n,1}+1\notin C_s(s=1,2,\cdots,n)$.

定理 3 的证明 将 C_s 中的数从小到大依次排列，令 $\mu_{n,s}$ 表示 C_s 中比 $M_{n,s}$ 大的下一个数. 由定理 2，$M_{n,s}<M_{n,1}+1$，故只要证

$$M_{n,1}+1<\mu_{n,s},s=1,2,\cdots,n \quad ㉒$$

Ⅰ $s=2k+1$ 时，据 ⑰ 有

$$\mu_{n,s}=9^k+3\times 9^k(b_{n-2k+1})-4\sum_{j=1}^{k}9^{k-j}=$$
$$9^k+3\times 9^k\left(\frac{1}{2}\times 3^{n-2k-1}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(9^k-1)=$$
$$\frac{1}{2}\times 3^n+9^k\left(1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=$$
$$\frac{1}{2}\times 3^n+2\times 3^{s-1}+\frac{1}{2} \quad ㉓$$

Ⅱ $s=2k+2$ 时，据 ⑲ 有

$$\mu_{n,s}=2\times 9^k+9^{k+1}(b_{n-2k+1}+1)-4\sum_{j=1}^{k}9^{k-j}=$$
$$2\times 9^k+9^{k+1}\left(\frac{1}{2}\times 3^{n-2k-2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(9^k-1)=$$
$$\frac{1}{2}\times 3^n+9^k\left(2+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=$$
$$\frac{1}{2}\times 3^n+2\times 3^{s-1}+\frac{1}{2} \quad ㉔$$

由 ㉓ 与 ㉔ 得

$$\mu_{n,s}=\frac{1}{2}\times 3^n+2\times 3^{s-1}+\frac{1}{2},s=1,2,\cdots,n \quad ㉕$$

由 ⑯ $$M_{n,1}+1=H_n+1=\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}$$

与 ㉕ 比较得 $$M_{n,1}+1<\mu_{n,s}$$

即 ㉒ 成立，定理 3 证毕.

定理 4

$$C_{1,b_n}+C_{2,b_{n-1}}+\cdots+C_{n,b_1}=\{N\},N=1,2,\cdots,M_{n,1} \quad ㉖$$

定理 4 的证明 由定理 2，若 $N\geq M_{n,1}+1$ 则

$$N\notin C_{1,b_n}+\cdots+C_{n,b_1}$$

故只要证明

$$\{N\}\subset\{C_s\},N=1,2,\cdots,M_{n,1};s=1,2,\cdots,n \qquad ㉗$$

用数学归纳法，$n=1,M_{1,1}=1,N=1\subset C_1$，㉗成立，假设 $n=1,2,\cdots,P$ 时㉗成立，求证 $n=P+1$ 时㉗成立．即设

$$\{N\}=\{1,2,\cdots,M_{l,1}\}\subset\{C_s\}$$

$$s=1,2,\cdots,l;l=1,2,\cdots,P \qquad ㉘$$

求证

$$\{N\}=\{1,2,\cdots,M_{P+1,1}\}\subset\{C_s\},s=1,2,\cdots,P+1 \qquad ㉙$$

先将 N 值分成三组，分别证明每组属于$\{C_s\}$，令

$$\{N\}=\{N_{1j}\}+\{N_{2j}\}+\{N_{3j}\}$$

其中 $\{N_{1j}\}=\{1,4,7,\cdots,M_{P+j,1}-6,M_{P+1,1}-3,M_{P+1,1}\}=\{1+3j\}\subset C_1$

$\{N_{1j}\}$ 中 $j=0,1,\cdots,b_{P+1}$，这是因为从④，⑥有

$$M_{r,1}=b_{r+1}=1+3b_r,r=1,2,\cdots \qquad ㉚$$

故只要证

$$\{N_{2j}\}+\{N_{3j}\}\subset\{C_s\},s=1,2,\cdots,P+1 \qquad ㉛$$

其中 $\{N_{2j}\}=\{3,6,\cdots,M_{P+1,1}-4,M_{P+1,1}-1\}=\{3_j\},j=1,2,\cdots,b_{P+1}$

$\{N_{3j}\}=\{2,5,\cdots,M_{P+1,1}-5,M_{P+1,1}-2\}=\{3j-1\},j=1,2,\cdots,b_{P+1}$

再把全部 j 值分为三组，求证对于每组 j 值，㉛都成立．

ⅰ $j=1,4,7,\cdots,b_{P+1}=1+3t,t=0,1,\cdots,b_P$.

$\{N_{2j}\}=\{3_j\}=\{3+9t\}=\{3,12,\cdots,M_{P+1,1}-1\}\subset C_2$

$\{N_{3j}\}=\{3j-1\}=\{2+9t\}=\{2,11,\cdots,M_{P+1,1}-2\}\subset C_2$

故只要证明下面 ⅱ 与 ⅲ 两种情形㉛成立．

ⅱ $j=3,6,\cdots,b_{P+1}-1=3t,t=1,2,\cdots,b_P$.

$$\{N_{2j}\}=\{3_j\}=\{9t\}=\{9,18,\cdots,M_{P+1,1}-4\}\subset\{C_s\} \qquad ㉜$$

$$\{N_{3j}\}=\{3_j-1\}=\{9t-1\}=\{8,17,\cdots,M_{P+1,1}-5\}\subset\{C_s\} \qquad ㉝$$

ⅲ $j=2,5,\cdots,b_{P+1}-2=3t-1,t=1,2,\cdots,b_P$.

$$\{N_{2j}\}=\{3j\}=\{9t-3\}=\{6,15,\cdots,M_{P+1,1}-7\}\subset\{C_s\} \qquad ㉞$$

$$\{N_{3j}\}=\{3j-1\}=\{9t-4\}=\{5,14,\cdots,M_{P+1,1}-8\}\subset\{C_s\} \qquad ㉟$$

㉜，㉝，㉞，㉟中，$s=1,2,\cdots,P+1$.

先证㉜，其中，$t=1,2,\cdots,b_P$，据㉚$b_P=M_{P-1,1}$，由归纳假设㉘知

$$\{t\}\subset\{C_s\},s=1,2,\cdots,P-1$$

那么 $\{9t\} \subset \{9C_s\}$

设

$$P - 1 = \begin{cases} 2m + 1(P - 1\text{ 为奇数}) \\ 2m + 2(P - 1\text{ 为偶数}) \end{cases}$$

由 ②′,③′,$9C_s(s = 1,2,\cdots,P-1)$ 可写成

$$9C_s = \begin{cases} 9C_{2k+1} = \{9^{k+1} + 3\times 9^{k+1}i - \sum_{j=0}^{k+1} d_j 9^{k+1-j}\} = \\ \qquad C_{2(k+1)+1} = C_{s+2} & ㊱ \\ 9C_{2k+2} = \{e9^{k+1} + 9^{(k+1)+1}i - \sum_{j=0}^{k+1} d_j 9^{k+1-j}\} = & ㊲ \\ \qquad C_{2(k+1)+1} = C_{s+2} \end{cases}$$

㊱,㊲ 中 $d_{k+1} = 0, k = 0,1,\cdots,m$ 时,$s = 1,2,\cdots,P-1$,由 ㊱,㊲ 有

$$\{9t\} \subset \{C_s\}, t = 1,2,\cdots,b_P; s = 3,4,\cdots,P+1$$

故 ㉜ 成立.不难看出,只要 $t \leqslant b_P$,$9t-1,9t-3,9t-4$ 必与 $9t$ 属于同一个 $C_s(3 \leqslant s \leqslant P+1)$.这时 C_s 中的 d_{k+1} 不是 0,而是分别取值 1,3,4.所以 ㉝,㉞,㉟ 都成立.于是 ㉛ 成立.这证明 ㉙ 成立.根据数学归纳法,㉗ 成立,故定理 4 成立.

4.一个数学猜想

能否找到其他形式的 A'_n 包含 H'_n 个连续自然数,使 $H'_n > H_n$ 呢?若找不到,⑤ 中的 A_n 就是最佳形式,H_n 就是最优解,⑤ 中的 A_n 还有若干性质,特别是

(1)$\min(C_{s+1,b_{n-s}}) = \min(C_{s+1}) = H_{s+1}, 1 \leqslant s \leqslant n-1$;

(2) 在 $C_{s+1,b_{n-s}}$ 中若添加比 $H_s + 1$ 小的自然数,就一定破坏 $C_{s+1,b_{n-s}}$ 的正则性.

因为 C_s 包含数字的平均密度很高,所以性质(1) 和(2) 具有很强的优越性.

当 $n = 1,2,3$ 时,A_1,A_2,A_3 显然是最佳形式,H_1,H_2,H_3 都是最优解.⑤ 中 A_n 里的正则组合又具有 ②,③ 中的 k 级集合的特殊形式.这使人猜想:由 ⑤ 中 A_n 得到 H_n 可能是最优解.进一步讨论已超出了本书的范围.

第 21 届国际数学奥林匹克

英国,1979

联邦德国命题

1 若 p 和 q 均为自然数,并且
$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\ 318}+\frac{1}{1\ 319}$$
求证:p 能被 1 979 整除.

证法 1 负项中的分母为偶数,我们将每个 $-\frac{1}{2k}$ 化为
$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}$$
所以
$$\frac{p}{q}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\ 319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1\ 318}\right)=$$
$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\ 319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{659}\right)=$$
$$\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1\ 319}$$
因为
$$\frac{1}{660+j}+\frac{1}{1\ 319-j}=\frac{1\ 319+660}{(660+j)(1\ 319-j)}$$
对所有的 j 将上述分数配对相加,得到常数分子
$$\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1\ 319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1\ 318}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)=$$
$$\frac{1\ 979}{660\cdot 1\ 319}+\frac{1\ 979}{661\cdot 1\ 318}+\cdots+\frac{1\ 979}{989\cdot 990}=$$
$$1\ 979\,\frac{p'}{q'}$$
其中,q' 为从 660 到 1 319 的所有整数之积,每个整数与 1 979 互素(因为 1 979 是个素数).

因为 $pq'=1\ 979p'q$,且 1 979 不能整除 q',它须能整除 p.

解法 2 (1) 我们先证明 1 979 是一个素数. 因为要判别一个自然数 N 是否是素数,只要判别 N 能否被小于等于$\sqrt{N}$ 的素数除

尽就够了.现有

$$1\,979 < 2\,025 = 45^2$$

所以

$$\sqrt{1\,979} < 45$$

因此只要判别小于等于$\sqrt{1\,979} < 45$的素数 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43 能否除尽 1 979.可以验证,以上这 14 个素数都不能除尽 1 979,所以 1 979 是一个素数.

(2) 若对模数 m,整数 a 有

$$(a, m) = 1$$

即 a 与 m 互素时,方程(其中 x 是未知数,b 是已知整数)

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

有惟一的解,这个解可以用符号分数$\frac{b}{a}$来记,它表示以 m 为模的一个剩余数类.当 m 固定时,对满足$(a, m) = 1$和$(a', m) = 1$的 a 和 a',这种符号分数有如下的性质.

ⅰ 若 $a \equiv a' \pmod{m}$,$b \equiv b' \pmod{m}$,那么

$$\frac{b}{a} \equiv \frac{b'}{a'} \pmod{m}$$

ⅱ
$$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} \equiv \frac{ba' + ab'}{aa'} \pmod{m}$$

ⅲ
$$\frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} \equiv \frac{bb'}{aa'} \pmod{m}$$

即符号分数可以像普通分数那样进行加、减、乘三种运算.特别要注意,符号分数中的分母一定要与模 m 互素,否则是没有意义的.当 m 是一个素数时,符号分数中的分母与模 m 互素的要求就转变为分母不能被模 m 除尽.

(3) 将素数 1 979 取作模,即 $m = 1\,979$,我们来进行对符号分数

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{1\,318}, \frac{1}{1\,319}$$

(注意这些符号分数对模 1 979 都是有意义的,因为它们的分母都不能被 1 979 除尽)的一次代数运算,即计算

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1\,318} + \frac{1}{1\,319}$$

利用费马定理,我们可知对 $1 \leqslant k \leqslant 1\,319$ 有

$$k^{1\,978} \equiv 1 \pmod{1\,979}$$

亦即

$$k \cdot k^{1\,977} \equiv 1 \pmod{1\,979}$$

所以

$$\frac{1}{k} \equiv k^{1\,977} \pmod{1\,979}$$

此外有

$$2^{1\,978} \equiv 1 \pmod{1\,979}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}\equiv\\
&1^{1\,977}-2^{1\,977}+3^{1\,977}-4^{1\,977}+\cdots-1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977}\equiv\\
&(1^{1\,977}+2^{1\,977}+3^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977})-\\
&2(2^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977})\equiv\\
&(1^{1\,977}+2^{1\,977}+3^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977})-\\
&2\cdot 2^{1\,977}(1^{1\,977}+2^{1\,977}+\cdots+659^{1\,977})\equiv\\
&(1^{1\,977}+2^{1\,977}+3^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977})-\\
&2^{1\,978}(1^{1\,977}+2^{1\,977}+\cdots+659^{1\,977})\equiv\\
&(1^{1\,977}+2^{1\,977}+3^{1\,977}+4^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977})-\\
&(1^{1\,977}+2^{1\,977}+\cdots+659^{1\,977})\equiv\\
&660^{1\,977}+661^{1\,977}+\cdots+1\,318^{1\,977}+1\,319^{1\,977}\equiv\\
&(660^{1\,977}+661^{1\,977}+\cdots+989^{1\,977})+\\
&(990^{1\,977}+991^{1\,977}+\cdots+1\,319^{1\,977})\equiv\\
&(660^{1\,977}+661^{1\,977}+\cdots+989^{1\,977})+\\
&((-989)^{1\,977}+(-988)^{1\,977}+\cdots+(-660)^{1\,977})\equiv\\
&(660^{1\,977}+661^{1\,977}+\cdots+988^{1\,977}+989^{1\,977})-\\
&(989^{1\,977}+988^{1\,977}+\cdots+661^{1\,977}+660^{1\,977})\equiv\\
&0 \pmod{1\,979}
\end{aligned}
$$

所以 $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}\equiv 0 \pmod{1\,979}$

(4) 另一方面,因为

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}$$

是一个有理数,所以它可以表示为一个既约分数,即

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}=\frac{p'}{q'}$$

其中,p',q' 是整数,而且 $(p',q')=1$.另外因为如果将

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}$$

以 1 319!作为公分母进行通分,那么通分后的公分母 1 319!中没有因子 1 979,所以既约以后的分母 g' 中更不会有因子 1 979,所以 q' 不会被 1 979 除尽,因此 $\frac{p'}{q'}$ 对模 1 979 作为符号分数是有意义的.但由(3)知

$$\frac{p'}{q'}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}\equiv 0 \pmod{1\,979}$$

故
$$\frac{p'}{q'}\equiv 0 \pmod{1\,979}$$

这样
$$p'=q'\cdot\frac{p'}{q'}\equiv q'\cdot 0=0 \pmod{1\,979}$$

即
$$p'\equiv 0 \pmod{1\,979}$$

所以若 p,q 是自然数,而

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1\,318}+\frac{1}{1\,319}$$

那么
$$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$$

因此
$$p=q\cdot\frac{p'}{q'}$$

因为 $(p',q')=1$,所以 $q'\mid q$,即 $\frac{q}{q'}$ 是整数,所以

$$p=\frac{q}{q'}\cdot p'$$

故
$$p'\equiv 0(\bmod 1\,979)$$

所以
$$p\equiv 0(\bmod 1\,979)$$

即 p 能被 1 979 除尽.本题证毕.

保加利亚命题

2 已知一棱柱体,其顶面与底面分别为五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 和 $B_1B_2B_3B_4B_5$.两个五边形的每一边,以及每一条 A_iB_j 线段 $(i,j=1,\cdots,5)$,都被涂上红色或蓝色.以该棱柱的顶点为顶点所构成的三角形,若组成该三角形的是各边都被涂上了颜色的线段,那么其中必有两个边被涂上不同的颜色.证明:棱柱顶面与底面的10条边必须被涂上同样的颜色.

证法1 首先我们用反证法证明边 $A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_5,A_5A_1$ 上具有同一种颜色.假如不是这样,设 A_1A_2 为红色,A_2A_3 为绿色.五条线段 $A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_2B_4,A_2B_5$ 中的三条具有相同的颜色,我们设为红色,这也不影响证明的普遍性,并标为 A_2B_i,A_2B_j,A_2B_k.那么线段 B_iB_j,B_jB_k,B_kB_i 中有一个为底面的一边,称其为 B_rB_s.若 B_rB_s 为红色,我们就得到一个红色 $\triangle A_2B_rB_s$.所以 B_rB_s 必须为绿色,而线段 A_1B_r 和 A_1B_s 也必须为绿色.否则我们就会得到红色 $\triangle A_1A_2B_r$ 和 $\triangle A_1A_2B_s$.这样,$\triangle A_1B_rB_s$ 为一个绿色三角形.这个矛盾表明 A_1A_2 和 A_2A_3 须具有同种颜色.同样可以证明上、下底面的各边分别具有同种颜色.

现假设顶面的各边为红色而底面各边为绿色,若连结 A_1 与底面各顶点的各线段中有三条都为绿色,那么其中的两条线段必以底面相邻的两顶点为端点,称为 B_r,B_s,那么 $\triangle A_1B_rB_s$ 为一绿色三角形,这是矛盾的.因此 A_1 与底面各点相连的各线段中至少有三条为红色.同样,也至少有三条将 A_2 与底面相连的线段为红色.现在我们有了六条红线,其中至少有两条终止于底面上的同一顶点 B_i,这样 $\triangle A_1A_2B_i$ 为一个同色三角形,这与题中所给条件矛盾.

注　若顶面、底面为有 $2n+1$ 边的多边形，上述结论都成立．但顶面和底面若为有 $2n$ 边的多边形，则上述结论就不成立了．例如，若将顶面各边涂成红色，底面涂成绿色，而根据 A_iB_j 中 $i-j$ 为偶数与奇数的情况分别涂成红色与绿色．

证法 2　为讨论方便起见，我们将红色用 0 表示，绿色用 1 表示．题述棱柱体如图 21.1 所示，而对 $A_iB_j(1\leqslant i,j\leqslant 5)$ 的颜色登记如图 21.2 所示那样的阵列中（此处登记的仅是一个例子）．

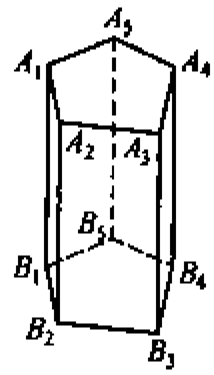


图 21.1

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	0	1	0	1	0
B_2	0	0	1	0	0
B_3	1	0	0	0	0
B_4	0	1	0	1	0
B_5	1	0	1	0	0

图 21.2

现证明：

(1) 如果将图 21.2 中那样的阵列视为一个矩阵，其矩阵元素记为 c_{ij}．那么任何相邻的两行（我们将横的称行，竖的称列，而且将第一行和第五行亦视为相邻的行，第一列和第五列为相邻的列）

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & c_{i4} & c_{i5} \\ c_{i+1,1} & c_{i+1,2} & c_{i+1,3} & c_{i+1,4} & c_{i+1,5} \end{pmatrix}$$

必定属于下列两种类型之一：

甲．只包含 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，而且至少包含一个 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；

乙．只包含 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，而且至少包含一个 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$．

这是因为不能同时包含 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$．因为如果是同时包含，那么五边形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的一边 B_iB_{i+1} 既不能是 0，亦不能是 1，故矛盾．而且若既没有 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，亦没有 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，那么这相邻两行全由 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 组成．但如果 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 接着相邻出现，亦即出现

$$\begin{pmatrix} \cdots 1 & 1 \cdots \\ \cdots 0 & 0 \cdots \end{pmatrix}$$

那么从列的观点上来看，就出现了矛盾．所以 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 不能接着相邻出现，对 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 亦是如此．因此若既没有 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，亦没有 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，那么这相邻两行只能是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

但注意不论以上情况中哪一种，第一列和第五列还是相邻出现了 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$．而这从列的观点上来看是不允许的，因此是矛盾的．故结论成立．

(2) 相邻三行，其第一、第二行组成的类型和第二、第三行组成的类型必定是相同的，这样就可以证明所有的底边是同一种颜色. 同理也就证明了所有的顶边亦是同一种颜色.

这是因为若相邻三行中前两行是甲型，后两行是乙型，那么前两行中一定有一个$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 今证其相邻列不能再是$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$或是$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，若其相邻列是$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，则必定出现

$$\begin{pmatrix}\cdots 1\ 1\cdots\\ \cdots 1\ 1\cdots\\ \cdots 0\ 0\cdots\end{pmatrix}$$

若其相邻列是$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则必定出现

$$\begin{pmatrix}\cdots 1\ 0\cdots\\ \cdots 1\ 1\cdots\\ \cdots 0\ 0\cdots\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}\cdots 0\ 1\cdots\\ \cdots 1\ 1\cdots\\ \cdots 0\ 0\cdots\end{pmatrix}$$

这三种情况从列的观点来看都是矛盾的. 所以这三行中的前两行一定是下列四种情况之一，即

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

这是因为这两行的第一、第五列上不能再出现$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，如果出现的话，那么从列的观点来看又要出现矛盾了. 现在在这四种情况中，前三种情况中因为第一列和第五列亦认为是相邻的，这样又出现了和$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$相邻的$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，而这是不允许的，在最后一种情况中，第一列和相邻的第五列都是$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$；这样顶边 A_1A_5 的颜色既不能是 0，亦不能是 1，所以又产生了矛盾. 所以这四种情况都不能出现，亦即相邻三行中前两行是甲型，后两行是乙型，是不可能的. 如果相邻三行中前两行是乙型，后两行是甲型，那么同理可证亦是不可能的. 这样，可知所有相邻的行组成同一种类型. 这样，若第一、第二行组成甲型，因为甲型中一定出现$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，所以 B_1B_2 一定是 0；同样从第二、第三行组成甲型，可知 B_2B_3 是 0…. 所以所有的底边有相同的颜色. 因为顶和底的位置是对称的，将棱柱倒过来，顶成了底，底成了顶，而棱柱边的着色特征仍然维持，所以证得所有的顶边亦是有相同的颜色，这样(2) 的性质就完全证得了.

(3) 最后只要证明底和顶这十条边的颜色是一样的.

这是因为若底边各边的颜色是 0,那么相邻两行都是甲型的,因为甲型中一定会出现$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,所以任意选择相邻两行,一定有下列五种情况之一出现,即

$$\begin{pmatrix}\cdots 1\ 1\cdots\\ \cdots 1\ 0\cdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdots 1\ 1\cdots\\ \cdots 0\ 1\cdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdots 1\ 0\cdots\\ \cdots 1\ 1\cdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdots 0\ 1\cdots\\ \cdots 1\ 1\cdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdots 1\ 1\cdots\\ \cdots 1\ 1\cdots\end{pmatrix}$$

但不论哪一种情况,所列的相邻两列所对应的顶边的颜色一定是 0,这样所有的顶边的颜色都是 0.对底边各边的颜色是 1 的情况,同理可证所有顶边的颜色亦是 1.这样就证明了本题.

3 平面上两圆相交,设点 A 为其中的一个交点.有两个点同时从点 A 出发,各以恒速沿其中的一个圆绕行,并在绕行一周后同时回到点 A.证明在平面上存在一点 P,且在任何时候点 P 到两动点的距离都相等.

苏联命题

证法 1 两个动点具有相同的角速度(因为它们旋转一周后同时回到点 A).如图 21.3 所示,圆 C_1 上的点 Q_1 和圆 C_2 上的点 Q_2 都按逆时针方向绕过了一个角度 θ,B 为两圆的另一交点,MAN 为垂直于 AB 的线段.因为 $\angle ABQ_1=\theta/2$,$\angle ABQ_2=\pi-\theta/2$,对于任何 θ,线段 Q_1Q_2 过点 B.因为 $\angle MAB=\angle NAB=90^\circ$,$MB$ 和 NB 为直径,因此 $\angle MQ_1B=\angle BQ_2N=90^\circ$.这样推出 $MQ_1 /\!/ NQ_2$.即不论 Q_1Q_2 运动到何处,Q_1Q_2 的垂直平分线(所有与 Q_1,Q_2 等距的点的集合)与固定线段 MN 相交于其中点 P.

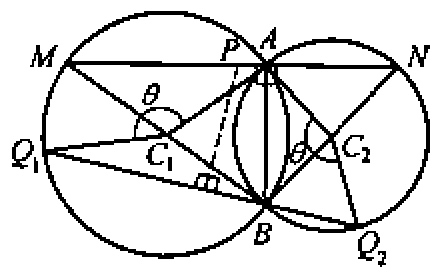


图 21.3

证法 2 设两圆半径各为 R_1 和 R_2,圆心距为 d,两圆圆心各为 O_1 和 O_2,如图 21.4 所示.再设 $\angle AO_1O_2=\theta_1$,$\angle AO_2O_1=\theta_2$.令

$$d_1=R_1\cdot\cos\theta_1,d_2=R_2\cdot\cos\theta_2 \tag{①}$$

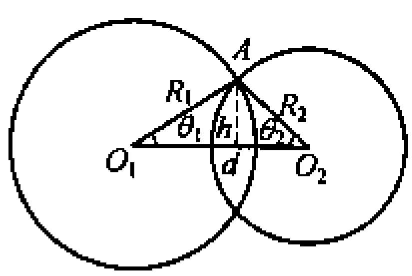


图 21.4

则不论 $\triangle AO_1O_2$ 是锐角三角形或是钝角三角形,如图 21.5 所示,都有

$$d_1+d_2=d \tag{②}$$

$$R_1\cdot\sin\theta_1=h=R_2\cdot\sin\theta_2 \tag{③}$$

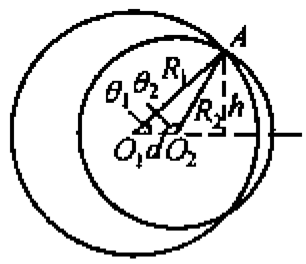


图 21.5

其中,h 是 $\triangle AO_1O_2$ 中边 O_1O_2 的高.

今建立一个直角坐标系,坐标原点在 O_1,x 轴与 O_1O_2 重合,且正向是从 O_1 朝向 O_2,y 轴的正向保证使点 A 的纵坐标是正的,如图 21.6 所示.

又设两点分别绕完一周所需的时间是 T,而线速度分别是 v_1

和 v_2，则根据题意有

$$\frac{2\pi R_1}{v_1}=T=\frac{2\pi R_2}{v_2}$$

亦即

$$\frac{v_1}{R_1}=\frac{2\pi}{T}=\frac{v_2}{R_2}$$

这就是说两点分别绕行各圆周时，其角速度是相等的，均为$\frac{2\pi}{T}$. 这样，在时刻 t(起始时 $t=0$)，两点分别绕过的圆心角为

$$\frac{v_1}{R_1}t=\frac{2\pi}{T}t=\omega t$$

$$\frac{v_2}{R_2}t=\frac{2\pi}{T}t=\omega t$$

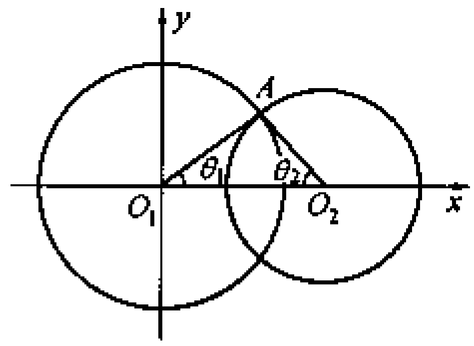


图 21.6

再因为两点绕行的转向是同为顺时针方向或者同为逆时针方向，所以在时刻 t 时两点的坐标(x_1,y_1)，(x_2,y_2) 分别有

$$\begin{cases}(x_1,y_1)=(R_1\cdot\cos(\theta_1+kt),R_1\cdot\sin(\theta_1+kt))\\(x_2,y_2)=(d+R_2\cdot\cos(\pi-\theta_2+kt),R_2\cdot\sin(\pi-\theta_2+kt))\end{cases}\quad ④$$

其中，$k=\omega$ 或 $-\omega$，视两点同逆时针方向还是同顺时针方向而定. 今过(x_1,y_1)，(x_2,y_2) 这两点的垂直平分线，其直线方程为

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

即

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)=0\quad ⑤$$

现将④代入⑤，而寻求一对与 t 无关的(x_0,y_0)，使式⑤中的 $x=x_0$，$y=y_0$后，对每一个 t，式⑤都成立. 这样就得到关于 t 的恒等式

$$\begin{aligned}&2(d-R_2\cdot\cos(kt-\theta_2)-R_1\cdot\cos(\theta_1+kt))x_0+\\&2(-R_2\cdot\sin(kt-\theta_2)-R_1\cdot\sin(\theta_1+kt))y_0+\\&(R_1^2-R_2^2-d^2+2dR_2\cdot\cos(kt-\theta_2))\equiv 0\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&2R_2(d-x_0)\cos(kt-\theta_2)-2y_0R_2\cdot\sin(kt-\theta_2)-\\&2R_1x_0\cdot\cos(kt+\theta_1)-2y_0R_1\cdot\sin(\theta_1+kt)+\\&R_1^2-R_2^2-d^2+2x_0d\equiv 0\end{aligned}$$

整理后得到

$$\begin{aligned}&2(R_2(d-x_0)\sin\theta_2-y_0R_2\cdot\cos\theta_2+R_1x_0\cdot\sin\theta_1-\\&y_0R_1\cdot\cos\theta_1)\sin kt+2(R_2(d-x_0)\cos\theta_2+\\&y_0R_2\cdot\sin\theta_2-R_1x_0\cdot\cos\theta_1-y_0R_1\cdot\sin\theta_1)\cos kt+\\&(R_1^2-R_2^2-d^2+2x_0d)\equiv 0\end{aligned}$$

因为上式是三角恒等式. 故 $\sin kt$，$\cos kt$ 前的系数和常数项均要为 0，这样就得到

$$\begin{cases}(R_1\cdot\sin\theta_1-R_2\cdot\sin\theta_2)x_0-(R_1\cdot\cos\theta_1+\\ R_2\cdot\cos\theta_2)y_0=-R_2d\cdot\sin\theta_2\\ -(R_1\cdot\cos\theta_1+R_2\cdot\cos\theta_2)x_0+(R_2\cdot\sin\theta_2-\\ R_1\cdot\sin\theta_1)y_0=-R_2d\cdot\cos\theta_2\\ 2xd+R_1^2-R_2^2-d^2=0\end{cases}\quad ⑥$$

因式②,③成立,故

$$R_1\cdot\sin\theta_1=R_2\cdot\sin\theta_2$$

$$R_1\cdot\cos\theta_1+R_2\cdot\cos\theta_2=d$$

再在 $\triangle AO_1O_2$ 内对边 AO_1 使用余弦定理,得到

$$R_1^2=R_2^2+d^2-2R_2d\cdot\cos\theta_2$$

故利用这些关系式,式⑥变成为

$$\begin{cases}dy_0=R_2d\cdot\sin\theta_2\\ dx_0=R_2d\cdot\cos\theta_2\\ dx_0=R_2d\cdot\cos\theta_2\end{cases}\quad ⑦$$

因为两圆至少有一个交点,故若再有 $d=0$,那么此两圆重合.此时平面上任一点均是所求的 (x_0,y_0),这从方程组⑦在 $d=0$ 时自动成立为等式亦可看出.而当 $d\neq 0$ 时,即两圆至少有一交点而不重合时,从⑦解得

$$\begin{cases}x_0=R_2\cdot\cos\theta_2\\ y_0=R_2\cdot\sin\theta_2\end{cases}\quad ⑧$$

而此点 (x_0,y_0) 正是点 A 对 O_1O_2 垂直平分线的轴对称点 P,如图 21.7 所示.所以我们得到结论:当两圆至少有一交点而不重合时,点 A 对圆心连线 O_1O_2 的垂直平分线的轴对称点 P,平面上就这一个惟一的点 P 满足本题的要求;而当两圆重合时,平面上任何一点都满足本题的要求.

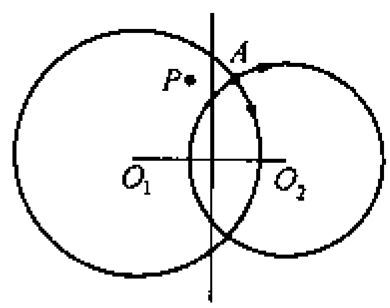


图 21.7

注 我们感兴趣的是:当两点从 A 不是同时绕相同的转向转动时,即有一点朝逆时针方向旋转,而另一点朝顺时针方向旋转时,有没有与这两个动点任何时刻都等距离的点呢?为此,我们进行分析.此时有

$$(x_1,y_1)=(R_1\cdot\cos(\theta_1+kt),R_1\cdot\sin(\theta_1+kt))$$

$$(x_2,y_2)=(d+R_2\cdot\cos(\pi-\theta_2-kt),R_2\cdot\sin(\pi-\theta_2-kt))\quad ④$$

其中,$k=\omega$ 或 $-\omega$,视绕圆 O_1 转的点是逆时针转还是顺时针转(此时绕圆 O_2 转的点相应是顺时针转或逆时针转)而定.因此相应求 (x_0,y_0) 的方程为

$$2(d-R_2\cdot\cos(-kt-\theta_2)-R_1\cdot\cos(\theta_1+kt))x_0+$$
$$2(-R_2\cdot\sin(-kt-\theta_2)-R_1\cdot\sin(\theta_1+kt))y_0+$$
$$(R_1^2-R_2^2-d^2+2dR_2\cdot\cos(-kt-\theta_2))=0$$

即
$$2R_2(d-x_0)\cos(-kt-\theta_2)-2y_0R_2\cdot\sin(-kt-\theta_2)-$$
$$2R_1x_0\cdot\cos(kt+\theta_1)-2y_0R_1\cdot\sin(\theta_1+kt)+$$

$$(R_1^2 - R_2^2 - d^2 + 2x_0d) = 0$$

整理后得到

$$2(-R_2(d-x_0)\cdot\sin\theta_2 + y_0R_2\cdot\cos\theta_2 + R_1x_0\cdot\sin\theta_1 -$$
$$y_0R_1\cdot\cos\theta_1)\sin kt + 2(R_2(d-x_0)\cos\theta_2 +$$
$$y_0R_2\cdot\sin\theta_2 - R_1x_0\cdot\cos\theta_1 - y_0R_1\cdot\sin\theta_1)\cos kt +$$
$$(R_1^2 - R_2^2 - d^2 + 2x_0d) = 0$$

因此

$$\begin{cases}(R_1\cdot\sin\theta_1 + R_2\cdot\sin\theta_2)x_0 - (R_1\cdot\cos\theta_1 - \\ R_2\cdot\cos\theta_2)y_0 = R_2d\cdot\sin\theta_2 \\ -(R_1\cdot\cos\theta_1 + R_2\cdot\cos\theta_2)x_0 + (R_2\cdot\sin\theta_2 - \\ R_1\cdot\sin\theta_1)y_0 = -R_2d\cdot\cos\theta_2 \\ R_1^2 - R_2^2 - d^2 + 2x_0d = 0\end{cases} \quad ⑥'$$

注意利用关系式②,③,所以上述方程组的第二个方程为

$$dx_0 = dd_2$$

这样在 $d\neq0$ 时,$x_0 = d_2$.

将它代入第三个方程中,得到了一个等式,它就是 $\triangle AO_1O_2$ 中对边 AO_1 的余弦定理,如果将 $x_0 = d_2$ 代入第一个方程,那么得到

$$2hd_2 - (d_1 - d_2)y_0 = hd$$

即

$$(d_1 - d_2)y_0 = h(2d_2 - d_1 - d_2) = h(d_2 - d_1)$$

故当 $d_1 - d_2 \neq 0$ 时

$$y_0 = -h$$

而当 $d_1 - d_2 = 0$ 时,即两圆半径相等时,任何值均可作为 y_0 的值.

而当 $d = 0$ 时(此时两圆重合,故 $R_1 = R_2, h = 0, d_1 = d_2$).方程组⑥′成为

$$\begin{cases}-2d_1y_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ R_1 = R_2\end{cases}$$

此即示意 x 轴上的任一点均可作为点 (x_0, y_0).

综合上述,我们得到结论:

当从点 A 出发的两点旋转所绕的方向相异时,而当两圆半径不相等而至少有一交点时,设两圆连心线 O_1O_2 的垂直平分线与 O_1O_2 的交点为 O,取 A 对点 O 的中心对称点 P,平面上就这一个惟一的点 P 满足与两动点等距离的要求,如图 21.8 所示;而当两圆半径相等,至少有一交点而不重合时,两圆连心线 O_1O_2 的垂直平分线上的每一点都满足与两动点等距离的要求,如图 21.9 所示;当两圆重合时,则直线 AO 上的每一点都满足与两动点等距离的要求.

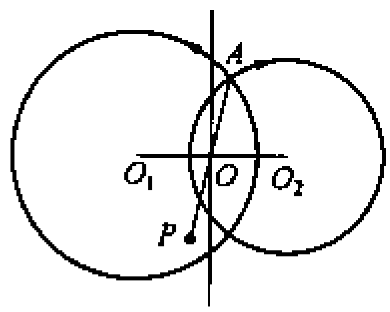


图 21.8

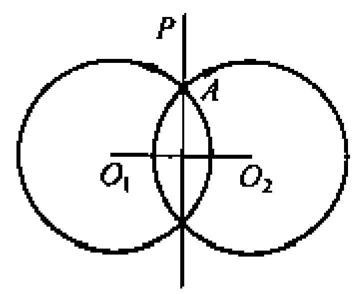


图 21.9

4 已知平面 π 和该平面上的一点 P 以及不在该平面上的一点 Q，在平面 π 上找出所有的点 R，使得 $(QP+PR)/QR$ 为极大值.

美国命题

解法 1 对任何点 R(待求)，将通过 R 和 P 的直线用 l 表示. 设 $\angle QPR=2\theta$. 我们在 l 中确定一点 S，使 $QP=SP$，如图 21.10 所示.

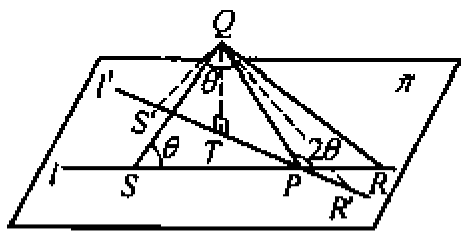


图 21.10

那么 $SR=QP+PR$. 由正弦定律

$$\lambda=\frac{QP+PR}{QR}=\frac{SR}{QR}=\frac{\sin\angle SQR}{\sin\theta}$$

对 l 上的所有点 R，当 $\angle SQR=90^\circ$ 时，λ 达到最大值. 现还须使 $1/\sin\theta$ 极大化. 当 2θ 为极小值时，$1/\sin\theta$ 达到最大. 此时直线 l 经过点 P 和 Q 在平面 π 内的射影 T.

若 T,P 为不同点，就惟一确定了点 R；若 T,P 为同一点，则 R 是以 P 为圆心，半径为 QP 的圆上的任何一点.

解法 2 如图 21.11 所示，由点 Q 向平面 π 作垂直线，其垂足为 Q_0. 今先证在 $P\neq Q_0$ 时，欲找的点 R 必定位于一条半无限直线(即射线) Q_0S 上. 此半无限直线 Q_0S 是无限直线 PQ_0 的一部分，它的起点是 Q_0，而朝向是没有点 P 的那一侧，这是因为以 Q 为顶点，以 QQ_0 为对称轴的正圆锥与平面 π 的截口是一个以 Q_0 为圆心的圆，如图 21.12 所示. 现在考虑平面 π 上此圆周上的点 R，因为此时 QR 为常值，故为使 $(QP+PR)/QR$ 最大，就是要使 $QP+PR$ 最大. 而 QP 又是常值，故就是要使 PR 最大，因此 R 必定位于 R' 上. 再者因为平面 π 上的不是 Q_0 的所有点必定位于上述这样的某一个圆周之内，故我们的结论成立.

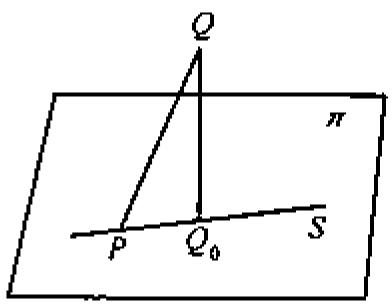


图 21.11

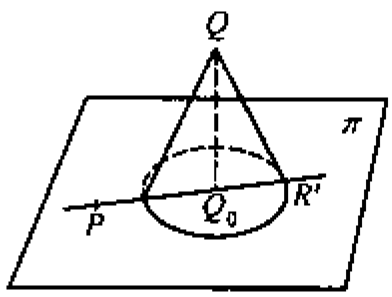


图 21.12

今过三点 P,Q,Q_0 作一平面 Ω，如图 21.13 所示. 限制 R 在半无限直线 Q_0S 上活动. 今设

$$PQ=r,QQ_0=h,PQ_0=d,\angle Q_0RQ=\theta$$

那么 $$PR=d+h\cdot\cot\theta,QR=h/\sin\theta$$

因此 $(QP+PR)/QR=(r+d+h\cdot\cot\theta)/(h/\sin\theta)=$

$$\frac{r+d}{h}\sin\theta+\cos\theta\equiv f(\theta)$$

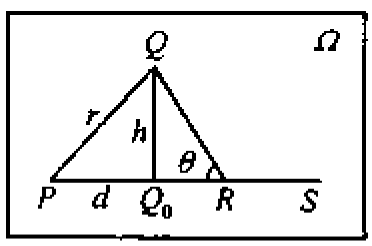


图 21.13

而当点 R 在半无限直线 Q_0S 上活动时，相当于 θ 在变化，但

$$0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

今求 $(QP+PR)/QR$ 的最大值，也就相当于求函数 $f(\theta)$ 当 θ 在 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 范围内的最大值，利用正弦和角公式，可以得到函数

$f(\theta)$ 的恒等变形，即

$$f(\theta)=\frac{r+d}{h}\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\left(\frac{r+d}{h}\right)^2+1}\cdot$$

$$\left(\sin\theta\frac{\frac{r+d}{h}}{\sqrt{\left(\frac{r+d}{h}\right)^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r+d}{h}\right)^2+1}}\cos\theta\right)=$$

$$\sqrt{\left(\frac{r+d}{h}\right)^2+1}(\sin\theta\cdot\cos\varphi+\cos\theta\cdot\sin\varphi)=$$

$$\sqrt{\left(\frac{r+d}{h}\right)+1}\cdot\sin(\theta+\varphi)$$

其中 $$\tan\varphi=\frac{h}{r+d},0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

所以只有当 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ 时，$f(\theta)$ 取得最大值

$$\sqrt{\left(\frac{r+d}{h}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{(r+d)^2}{h^2}+1}=\sqrt{\frac{(r+d)^2}{r^2+d^2}+1}=\sqrt{\frac{2r}{r-d}}$$

所以此时

$$Q_0R=h\cdot\cot\theta=h\cdot\cot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=h\cdot\cot\varphi=$$

$$h\cdot\frac{h}{r+d}=\frac{h^2}{r+d}=\frac{r^2-d^2}{r+d}=r-d$$

$$PR=PQ_0+Q_0R=d+r-d=r$$

因此我们得到结论：在 $P\neq Q_0$ 时，所求的点 R 仅一点，即在半无限直线 Q_0S 上满足 $PR=r$ 的那一点，如图 21.14 所示. 此时 $(QP+PR)/QR$ 的最大值为$\sqrt{\frac{2r}{r-d}}$.

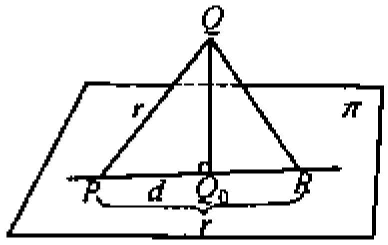


图 21.14

而当 $P=Q_0$ 时，设 $PQ=r$，$PR=x$，如图 21.15 所示. 这样

$$(PQ+PR)/QR=\frac{r+x}{\sqrt{r^2+x^2}}=g(x)$$

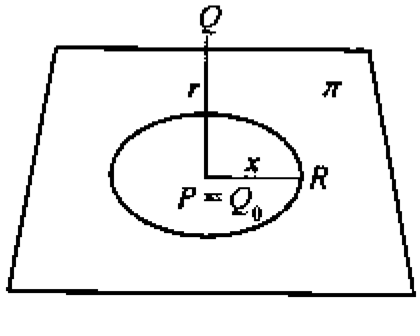


图 21.15

令 R 在平面 π 内变动，而求 $(PQ+PR)/QR$ 的最大值，就是相当于 $x\geqslant 0$ 时求 $g(x)$ 的最大值. 注意因为

$$(r+x)^2\leqslant 2(r^2+x^2)$$

所以 $$r+x\leqslant\sqrt{2}\sqrt{r^2+x^2}$$

亦即 $$f(x)\leqslant\sqrt{2}$$

而且在 $x=r$ 时，达到这个最大值$\sqrt{2}$. 因此我们得到结论：当 $P=Q_0$ 时，点 R 是以 P 为圆心，以 r 为半径的平面 π 内的一个圆周，如图 21.16 所示. 而此时相应的 $(PQ+PR)/QR$ 的最大值为$\sqrt{2}$.

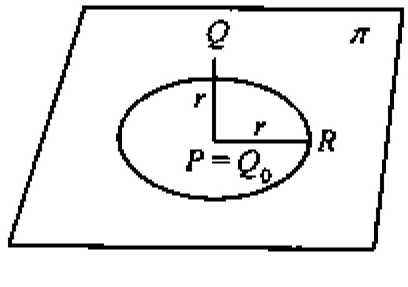


图 21.16

注 对于学过初等微积分的读者来说，本题中函数 $f(\theta)$ 与 $g(x)$ 的极值和极值点是可以用求导数，再使之为零的方法来得到的. 即因为

$$f(\theta)=\frac{r+d}{h}\sin\theta+\cos\theta$$

所以
$$f'(\theta)=\frac{r+d}{h}\cos\theta-\sin\theta$$

若
$$f'(\theta)=0$$

亦即
$$\frac{r+d}{h}\cos\theta-\sin\theta=0$$

那么
$$\tan\theta=\frac{r+d}{h}=\cot\varphi=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

亦即
$$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$$

是其极值点.而对于

$$g(x)=\frac{r+x}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$g'(x)=\frac{\sqrt{r^2+x^2}-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{r^2+x^2}}(r+x)}{(r^2+x^2)}=\frac{r^2+x^2-xr-x^2}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{r(r-x)}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

所以若有
$$g'(x)=0$$

那么就有
$$x=r$$

即此是其极值点.

此外,注意 $P=Q_0$ 时的极值点位置及最大值,可以通过在 $P\neq Q_0$ 时的极值点位置和最大值 $\sqrt{\frac{r}{r-d}}$,再令 $P\to Q_0$(亦即 $d\to 0$)而得到.

5 找出所有的实数 a,对于该实数存在着非负实数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,满足关系

$$\sum_{k=1}^{5}kx_k=a,\sum_{k=1}^{5}k^3x_k=a^2,\sum_{k=1}^{5}k^5x_k=a^3$$

以色列命题

解法 1 所要求的关系式为

$$a^2\sum_{k=1}^{5}kx_k+\sum_{k=1}^{5}k^5x_k=2a\sum_{k=1}^{5}k^3x_k$$

或者
$$\sum_{k=1}^{5}k(a-k^2)^2x_k=0$$

因此,这五个非负项中的每一项须等于0,即

$$k(a-k^2)^2x_k=0,k=1,2,3,4,5$$

这样,或者 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$,或者 x_k 中的某四个均为0;若对某个 j,$x_j\neq 0$,那么 $a=j^2$,将此式代入题中所给的任一关系式中,得 $x_j=j$.这样,a 的六个可能值为

$$0,1,2^2=4,3^2=9,4^2=16,5^2=25$$

解法 2　对于实数 b_i,c_i 的柯西不等式说明

$$(\sum b_kc_k)^2 \leqslant (\sum b_k^2)(\sum c_k^2) \quad ①$$

当且仅当 $c_k = \lambda b_k, k = 1,2,3,4,5$ 时,等式成立.

设 $b_k = \sqrt{kx_k}, c_k = \sqrt{k^5x_k}$,那么 $b_kc_k = k^3x_k$,代入式①得

$$(\sum k^3x_k)^2 = (a^2)^2 \leqslant (\sum kx_k)(\sum k^5x_k) = a^4$$

因该式应是等式,故 $c_k = \lambda b_k$,或者 $k^5x_k = \lambda^2kx_k$,即

$$x_k(k^4 - \lambda^2) = 0, k = 1,2,3,4,5 \quad ②$$

如果对某个 $j, x_j \neq 0$,从式②得出 $\lambda = j^2$,且 $x_k = 0$. 这样,在所要求的关系式中只剩下一项,并得 $a = j^2$. 所以 $\lambda = a$. 我们可得出结论:a 可能的取值为 0,1,4,9,16,25.

6 设 $\angle A$ 和 $\angle E$ 为一个正八边形中相对的两个顶角. 一个青蛙从顶点 A 开始跳. 在八边形除 E 外的其他顶点,该青蛙可能跳向相邻两个顶点中的任何一个. 当青蛙到达点 E 后就停下来. 若青蛙跳到点 E 共跳了 n 次,用 a_n 表示这 n 次跳动可能采取的路径的数目. 证明

$$a_{2n-1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}), n = 1,2,3,\cdots$$

其中　$x = 2 + \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2}$

民主德国命题

提示　n 次跳采取的某一路径是顶点的一个数列 $(P_0,\cdots,P_n)$,其中

(1) $P_0 = A, P_n = E$;

(2) 对于任何 $i, 0 \leqslant i \leqslant n-1, P_i$ 不等于 E;

(3) 对于任何数 $i, 0 \leqslant i \leqslant n-1, P_i$ 和 P_{i+1} 相邻.

解法 1　青蛙不能在跳 4 次之内到达点 E,故 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$;它能按两条路径跳 4 次跳到点 E. 故 $a_4 = 2$.

从点 A 作奇数次跳,青蛙可能到达点 B,D,F,H,但不可能到达点 E,如图 21.17 所示,故 $a_{2n-1} = 0$(对于所有的 n).

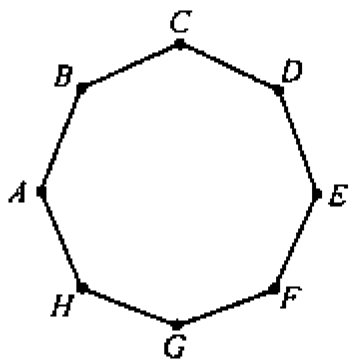


图 21.17

现在,用 b_n 表示从点 C 开始以 n 次跳最后跳到点 E 的各不同路径的数目(这与从点 G 开始一样). 从点 C 跳 2 次到点 E 只有一种路径,故

$$b_2 = 1$$

青蛙从点 A 起跳跳 2 次之后,它可能在点 C,G 或返回到点 A. 它可以有两种路径返回 A,即 $A \to B \to A$ 或 $A \to H \to A$. 故从 A 到 E 跳 n 次的路径数 a_n 等于从点 C,G 跳 $n-2$ 次到达点 E 的路径数加上从 A 到 E 跳 $n-2$ 次的路径数的 2 倍. 即

$$a_n = 2b_{n-2} + 2a_{n-2} \quad ①$$

当青蛙从点 C 开始跳并跳了大于 2 次的次数,前 2 次跳的结果或落在点 A 或落在点 C(因为若落在点 E 它不能再跳,即只跳了 2 次). 所以路径数 $b_n(n > 2)$ 等于从 A 起跳跳 $n-2$ 次到点 E 的

路径数加上从 C 起跳跳 $n-2$ 次到点 E 的路径数的 2 倍(因为前 2 次跳可能为 $C\to D\to C$ 或 $C\to B\to C$). 故

$$b_n=2b_{n-2}+a_{n-2},n>2 \qquad ②$$

① - ② 得 $$b_n-a_n=-a_{n-2}$$

用 $n-2$ 代替 n 得

$$b_{n-2}=a_{n-2}-a_{n-4}$$

代入式 ① 得

$$a_n=4a_{n-2}-2a_{n-4},n>4 \qquad ③$$

很清楚,由 $a_2=0,a_4=2$ 及式 ③ 可以惟一地确定 a_n 数列. 因此我们只须证明题中所给的答案

$$c_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1})$$

满足 $c_2=0,c_4=2$(式 ③ 的初值) 及式 ③(其中 n 值已用 $2n$ 代换),即

$$c_{2n}=4c_{2n-2}-2c_{2n-4}$$

因为 $x=2+\sqrt{2},y=2-\sqrt{2}$ 为方程

$$t^2-4t+2=0$$

的根,同时也是方程

$$p(t)=t^{n-1}-4t^{n-2}+2t^{n-3}=0$$

的根,因此

$$(1/\sqrt{2})(p(x)-p(y))=0$$

或 $$\frac{x^{n-1}-y^{n-1}}{2}-4\frac{x^{n-2}-y^{n-2}}{2}+2\frac{x^{n-3}-y^{n-3}}{2}=0$$

且 $$c_{2n}=4c_{2n-2}-2c_{2n-4}$$

由于式 ③ 在给定条件下的解是惟一的,我们可将 a_{2n} 与 c_{2n} 相等同

$$a_{2n}=c_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1})$$

在这个解中,我们使用了题中给出的公式且证明它满足我们推导出的关系式 ③. 但假如没有给出任何公式,我们自己能求出吗?回答是肯定的,下面我们就证实这一点.

解法 2 和解法 1 一样,我们推出式 ① 和式 ②,然后并不减去数 b_n. 相反,将同时考虑 a_n,b_n.

注意到 $a_2=0,b_2=1$. 因为青蛙不可能从点 A 或点 C 跳奇数次而到达点 E,我们令 $n=2m$,将数列关系

$$a_n=2a_{n-2}+2b_{n-2} \qquad ④$$

$$b_n=a_{n-2}+2b_{n-2} \qquad ⑤$$

看成矢量 v_{m-1} 与 $v_m = \begin{pmatrix} a_{2m} \\ b_{2m} \end{pmatrix}$，通过矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的变换关系，因此

$$v_m = Tv_{m-1}, v_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

T 的特征值是 T 的特征方程

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$$

的解 λ_1, λ_2。它们为 $\lambda_1 = 2+\sqrt{2}, \lambda_2 = 2-\sqrt{2}$。相应的特征矢量 u_1，u_2 具有性质

$$Tu_i = \lambda_i u, T[Tu_i] = \lambda_i^2 u_i, \cdots, T^{(n)} u_i = \lambda_i^n u_i, i = 1,2 \quad ⑥$$

从式⑥，也就是求解

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$$

可得到特征矢量，并得

$$\alpha_1/\beta_1 = \sqrt{2}, \alpha_2/\beta_2 = -\sqrt{2}$$

令
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

那么 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 u_1 和 u_2 的线性组合

$$v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

且
$$v_m = T^{(m-1)} v_1 = \lambda_1^{m-1} u_1 + \lambda_2^{m-2} u_2 = \begin{pmatrix} a_{2m} \\ b_{2m} \end{pmatrix}$$

当写出 v_m 的第一个元素时，得到方程

$$a_{2m} = \frac{1}{\sqrt{2}}((2+\sqrt{2})^{m-1} - (2-\sqrt{2})^{m-1})$$

注 对所有的 m，a_{2m} 都为整数。因为 $\lambda_2 = 2-\sqrt{2} < 0.6 < 1$，$a_{2m}$ 中的第二项 $\lambda_2^{m-1}/\sqrt{2} < \frac{1}{2}$（甚至当 $m=2$ 时），并当 m 增大时可忽略不计。这样对于所有的 m，a_{2m} 为第一项的整数部分 $a_{2m} = [\lambda_1^{m-1}/\sqrt{2}]$。

解法3 如图21.18所示，标出此正八角形的各顶点，如图21.19所示。再用 a_n, b_n, c_n, d_n 分别表示自 A, B, C, D 各点出发经 n 步后跳至点 E 的所有不同跳法的种数。利用 B' 与 B 两点对 A, E 两点是对称的性质，从直观分析我们就可以得到 a_n, b_n, c_n, d_n 与

此解法及解法后"注"均属于顾可敬

$a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}$ 之间的递归关系,即

$$\begin{cases} a_n = 2b_{n-1} & ⑦ \\ b_n = a_{n-1} + c_{n-1}, n \geqslant 2 & ⑧ \\ c_n = b_{n-1} + d_{n-1} & ⑨ \\ d_n = c_{n-1} & ⑩ \end{cases}$$

而且

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ c_1 = 0 \\ d_1 = 1 \end{cases} \quad ⑪$$

这样,我们当 $n \geqslant 1$ 时,从式⑦得

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{2} \quad ⑫$$

又从式⑧得

$$c_n = b_{n+1} - a_n = \frac{a_{n+2}}{2} - a_n \quad ⑬$$

再从式⑨得

$$d_n = c_{n+1} - b_n = \frac{a_{n+3}}{2} - a_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n+3} - 3a_{n+1}}{2} \quad ⑭$$

最后利用式⑩,可知当 $n \geqslant 2$ 时

$$\frac{a_{n+3} - 3a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n+1}}{2} - a_{n-1}$$

即

$$a_{n+3} - 4a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0$$

亦即

$$a_{n+4} - 4a_{n+2} + 2a_n = 0, n \geqslant 1 \quad ⑮$$

再从⑪及⑫,⑬,⑭中可得

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 2 \end{cases} \quad ⑯$$

这样从 $a_1 = 0$ 及 $a_3 = 0$ 和⑮,可知

$$a_{2k+1} = 0, k = 0,1,2,\cdots$$

再设

$$a'_n = a_{2n}$$

那么从式⑮得到

$$a'_{n+2} - 4a'_{n+1} + 2a'_n = 0, n \geqslant 1 \quad ⑰$$

再由 $a_2 = 0$ 及 $a_4 = 2$,可得

$$\begin{cases} a'_1 = 0 \\ a'_2 = 2 \end{cases} \quad ⑱$$

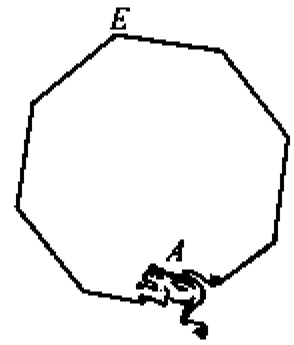


图 21.18

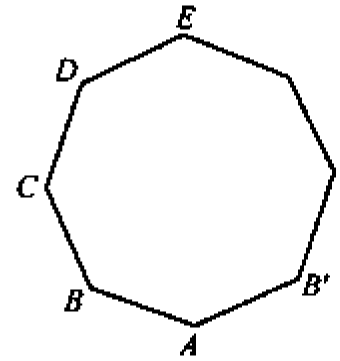


图 21.19

这样序列 a'_n 满足二阶常系数线性递归方程 ⑰ 以及其初始值为 ⑱,为求方程 ⑰ 的解,首先要求出和 ⑰ 相对应的特征方程

$$q^2-4q+2=0$$

的解.求之得

$$q=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

因此

$$q_1=2+\sqrt{2},q_2=2-\sqrt{2}$$

而 ⑰ 的通解为

$$a'_n=\delta_1q_1^{n-1}+\delta_2q_2^{n-1}=\delta_1(2+\sqrt{2})^{n-1}+\delta_2(2-\sqrt{2})^{n-1},n\geqslant 1$$

其中,δ_1,δ_2 是两个待定常数,我们再从 a'_n 满足的初始条件 ⑱ 得到

$$\begin{cases}\delta_1+\delta_2=0\\\delta_1(2+\sqrt{2})+\delta_2(2-\sqrt{2})=2\end{cases}$$

因此

$$\begin{cases}\delta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\delta_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

故

$$a'_n=\frac{1}{\sqrt{2}}((2+\sqrt{2})^{n-1}-(2-\sqrt{2})^{n-1}),n\geqslant 1$$

所以

$$a_n=\begin{cases}0,n\text{ 为奇数}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}((2+\sqrt{2})^{m-1}-(2-\sqrt{2})^{m-1}),n=2m,m\text{ 为自然数}\end{cases}\qquad ⑲$$

这就求得了本题要求的结果.

注 (1)从所求得的 a_n 的表达式及 ⑫,⑬,⑭ 可得到 b_n,c_n 及 d_n 的表达式,即

$$b_n=\begin{cases}0,n\text{ 为偶数}\\\dfrac{1}{2\sqrt{2}}((2+\sqrt{2})^{m-1}-(2-\sqrt{2})^{m-1}),n=2m-1,m\text{ 为自然数}\end{cases}\qquad ⑳$$

$$c_n=\begin{cases}0,n\text{ 为奇数}\\\dfrac{1}{2}((2+\sqrt{2})^{m-1}+(2-\sqrt{2})^{m-1}),n=2m,m\text{ 为自然数}\end{cases}\qquad ㉑$$

$$d_n=\begin{cases}0,n\text{ 为偶数}\\\dfrac{1}{2}((2+\sqrt{2})^{m-2}+(2-\sqrt{2})^{m-2}),n=2m-1,m\text{ 为自然数}\end{cases}\qquad ㉒$$

此外,利用二项展开公式,可以得到关于 a_{2m} 更为明确的计算式,即

$$a_{2m}=2\sum_{2r\leqslant m}\binom{m-1}{2r-1}2^{m-r-1},m\geqslant 2$$

下两表分别列出了 $m \leqslant 7$ 时的 a_{2m} 值及 $n \leqslant 10$ 时 a_n, b_n, c_n, d_n 的值. 它们可以根据已经求出的表达式逐一求得, 也可以利用递归关系 ⑦, ⑧, ⑨, ⑩ 从初始条件 ⑪ 开始, 逐次求得其值.

n	m	$a_n = a_{2m}$
2	1	0
4	2	$2\left(\binom{1}{1}2^0\right) = 2$
6	3	$2\left(\binom{2}{1}2^1\right) = 8$
8	4	$2\left(\binom{3}{1}2^2 + \binom{3}{3}2^1\right) = 28$
10	5	$2\left(\binom{4}{1}2^3 + \binom{4}{3}2^2\right) = 96$
12	6	$2\left(\binom{5}{1}2^4 + \binom{5}{3}2^3 + \binom{5}{5}2^2\right) = 328$
14	7	$2\left(\binom{6}{1}2^5 + \binom{6}{3}2^4 + \binom{6}{5}2^3\right) = 1\ 160$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	0	0	2	0	8	0	28	0	96
b_n	0	0	1	0	4	0	14	0	48	0
c_n	0	1	0	2	0	6	0	20	0	68
d_n	1	0	1	0	2	0	6	0	20	0

(2) 我们在前面解题过程中, 为从 a_n, b_n, c_n, d_n 之间的递归关系 ⑦, ⑧, ⑨, ⑩ 求出 a_n, b_n, c_n, d_n 的表达式, 采用了得到一个关于 a_n 的递归关系 ⑮, 从而再解这个递归方程, 得到 a_n 的表达式这条途径来求解此题的. 现在我们换一种方法, 即采用线性代数的方法来处理关系 ⑦, ⑧, ⑨, ⑩. 这种处理方法更有一般性.

我们记

$$R_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

这样关系式 ⑦, ⑧, ⑨, ⑩ 就综合成关系

$$R_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_{n-1} = GR_{n-1}, n \geqslant 2 \quad ㉓$$

而初始条件 ⑩ 就等价于

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = H \qquad ㉔$$

从式㉓,我们得到

$$R_n = GR_{n-1} = G^2R_{n-2} = \cdots = G^{n-1}R_1 = G^{n-1}H$$

即
$$R_n = G^{n-1}H, n \geqslant 1$$

所以要求 R_n,就要求 G^{n-1},但怎样求出 G^{n-1} 的表达式呢?我们先要求出 G 的约当(Jordan)分解式.为此先要求出 G 的特征值,即求代数方程

$$|G - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^2 + 2 = 0 \qquad ㉕$$

的根,此方程有四个单根,即

$$\lambda_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \lambda_2 = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$$
$$\lambda_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, \lambda_4 = -\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad ㉖$$

对于每一个特征值 $\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$,再分别求其特征向量

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$$

即如果有
$$G\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$$

亦即
$$\begin{cases} 2t_2 = \lambda t_1 \\ t_1 + t_3 = \lambda t_2 \\ t_2 + t_4 = \lambda t_3 \\ t_3 = \lambda t_4 \end{cases}$$

若令
$$t_4 = 1$$

那么
$$\begin{cases} t_1 = \lambda^3 - 2\lambda \\ t_2 = \lambda^2 - 1 \\ t_3 = \lambda \end{cases}$$

所以可知,若 λ 是特征值,则

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 - 2\lambda \\ \lambda^2 - 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ㉗$$

是与此特征值相对应的一个特征向量，今用 $\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 分别代入式㉗，就得到了相应于每一个特征值 λ_i 的一个特征向量.将这些特征向量自左向右排列成一个 4×4 矩阵 T，即

$$T=\begin{pmatrix}\sqrt{2(2+\sqrt{2})} & -\sqrt{2(2+\sqrt{2})} & -\sqrt{2(2-\sqrt{2})} & \sqrt{2(2-\sqrt{2})}\\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 & -(\sqrt{2}-1) & -(\sqrt{2}-1)\\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad ㉘$$

因此
$$GT=T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4\end{pmatrix}$$

因此

$$G=T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4\end{pmatrix}T^{-1} \quad ㉙$$

其中，T^{-1} 为 T 的逆阵，我们可从 T 直接求得(我们有一个不必直接从 T 求 T^{-1} 的方法，这在(3)中介绍)

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{2-\sqrt{2}}{8}\\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{2-\sqrt{2}}{8}\\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{2+\sqrt{2}}{8}\\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{2+\sqrt{2}}{8}\end{pmatrix} \quad ㉚$$

表达式㉙称为 G 的约当分解式，利用这个分解式，将它代入 G^{n-1}，就有

$$R_n=G^{n-1}H=\left(T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4\end{pmatrix}T^{-1}\right)^{n-1}H=$$

$$T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4\end{pmatrix}^{n-1}T^{-1}H=$$

$$T\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1} & & & \\ & \lambda_2^{n-1} & 0 & \\ & 0 & \lambda_3^{n-1} & \\ & & & \lambda_4^{n-1}\end{pmatrix}T^{-1}H=$$

$$T\begin{pmatrix} (\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1} & & & \\ & (-1)^{n-1}(\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1} & 0 & \\ & 0 & (\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1} & \\ & & & (-1)^{n-1}(\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{8} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{8} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{8} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{2(2+\sqrt{2})} & -\sqrt{2(2+\sqrt{2})} & -\sqrt{2(2-\sqrt{2})} & \sqrt{2(2-\sqrt{2})} \\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 & -(\sqrt{2}-1) & -(\sqrt{2}-1) \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1} \\ (-1)^{n-1}(2-\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1} \\ (2+\sqrt{2})(\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1} \\ (-1)^{n-1}(2+\sqrt{2})(\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1} \end{pmatrix}$$

因此
$$a_n = \frac{1}{8}(\sqrt{2}(2-\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{2}})^n - \sqrt{2}(2+\sqrt{2})(\sqrt{2-\sqrt{2}})^n)(1+(-1)^n) = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}((2+\sqrt{2})^{m-1} - (2-\sqrt{2})^{m-1}), n = 2m, m \text{ 为自然数}; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{8}((\sqrt{2}+1)(2-\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1} - (\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})(\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1})(1+(-1)^{n-1}) = \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}((2+\sqrt{2})^{m-1} - (2-\sqrt{2})^{m-1}), n = 2m-1, m \text{ 为自然数} \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{8}((\sqrt{2+\sqrt{2}})^n(2-\sqrt{2}) + (\sqrt{2-\sqrt{2}})^n(2+\sqrt{2}))(1+(-1)^n) = \begin{cases} 0, n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2}((2+\sqrt{2})^{m-1} + (2-\sqrt{2})^{m-1}), n = 2m, m \text{ 为自然数} \end{cases}$$

$$d_n = \frac{1}{8}((\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1}(2-\sqrt{2}) + (\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1}(2+\sqrt{2}))(1+(-1)^{n-1}) =$$

$$\begin{cases}0, n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{2}((2+\sqrt{2})^{m-2}+(2-\sqrt{2})^{m-2}), n=2m-1, m \text{ 为自然数}\end{cases}$$

(3) 在(2)的求解过程中,我们需要计算矩阵 T(见式㉘)的逆矩阵 T^{-1},这当然可以直接计算.但亦可利用 T^{-1} 所满足的关系而更简捷地算得.这是因为

$$GT = T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4\end{pmatrix}$$

故
$$T^{-1}G = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4\end{pmatrix}T^{-1}$$

今设 T^{-1} 的某一行是

$$(s_1, s_2, s_3, s_4)$$

则
$$(s_1, s_2, s_3, s_4)G = \lambda(s_1, s_2, s_3, s_4)$$

即
$$\begin{cases}s_2 = \lambda s_1 \\ 2s_1 + s_3 = \lambda s_2 \\ s_2 + s_4 = \lambda s_3 \\ s_3 = \lambda s_4\end{cases}$$

故
$$(s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(\frac{\lambda(\lambda^2 - s)}{2}s_4, (\lambda^2 - 1)s_4, \lambda s_4, s_4\right)$$

再利用
$$T^{-1}T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

和式㉗,因此

$$s_4\left(\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{2}, \lambda^2 - 1, \lambda, 1\right)\begin{pmatrix}\lambda(\lambda^2-2) \\ \lambda^2 - 1 \\ \lambda \\ 1\end{pmatrix} = 1$$

所以
$$s_4\left(\frac{\lambda^2(\lambda^2-2)^2}{2} + (\lambda^2-1)^2 + \lambda^2 + 1\right) = 1$$

再因为 λ 是特征值,故而满足特征方程

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 + 2 = 0$$

所以
$$s_4 = \left(\frac{\lambda^2(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4)}{2} + \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 + \lambda^2 + 1\right)^{-1} =$$
$$(\lambda^2 + \lambda^4 - \lambda^2 + 2)^{-1} = \frac{1}{4\lambda^2}$$

所以

$$(s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(\frac{\lambda^2 - 2}{8\lambda}, \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda^2}, \frac{1}{4\lambda}, \frac{1}{4\lambda^2}\right) \quad ㉛$$

然后将 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$(见式㉖)依次代入式㉛,再顺次从第一行排到第四

行,就得到了

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{2-\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{2-\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{2+\sqrt{2}}{8} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{2+\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$$

推广

此推广属于周持中

1.问题的一般提法

跳蛙问题 设 $A_0A_1A_2\cdots A_{m-1}A_mA'_{m-1}A'_{m-2}\cdots A'_2A'_1$ 是一个正 $2m$ 边形,一只青蛙从点 A_0 开始跳跃.如果青蛙在任一个不是 A_m 的顶点,那么它可以跳向两个相邻顶点中的任一点,当它跳到点 A_m 时就停在那里.设 $e_n(m)$ 为经过 n 步到达A_m 的不同的路径的个数,试求 $e_n(m)$.(一个 n 步路是指顶点的一个序列($P_0,P_1,\cdots,P_n$)满足:

(1)$P_0=A_0,P_n=A_m$;

(2)对每个 $i,0\leqslant i\leqslant n-1,P_i\neq A_m$;

(3)对每个 $i,0\leqslant i\leqslant n-1,P_i$ 与 P_{i+1} 是相邻顶点.)

我们令 $A_0,A_1,\cdots,A_m$ 分别对应于数 $0,1,\cdots,m$,令 $A'_1,A'_2,\cdots,A'_{m-1},A'_m=A_m$ 分别对应于数 $-1,-2,\cdots,-(m-1),-m$.又规定正$2m$边形上依A_0到 A_1 的绕行方向为正.当青蛙从顶点 P_{i-1} 跳到相邻的顶点 P_i 时,令它对应于一数 y_i,且跳的方向为正(即与多边形的正方向一致)时令 $y_i=1$,否则令 $y_i=-1$.这样,如果($P_0,P_1,\cdots,P_n$)是一个 n 步路径,那么它对应的有序数组($y_1,y_2,\cdots,y_n$)将适合混合组

$$\begin{cases}\left|\sum_{i=1}^{n}y_i\right|=m\\ \left|\sum_{i=1}^{l}y_i\right|<m,l=1,2,\cdots,n-1\end{cases} \quad ①$$

反之,① 的任一个解($y_1,y_2,\cdots,y_n$)完全确定一个 n 步路径($P_0,P_1,\cdots,P_n$).故 n 步路径的集合与 ① 的解的集合一一对应.所以不同的 n 步路径的个数等于 ① 解的个数.

定理 1 设 t 为自然数,则 $e_{2n-1}(2t)=0,e_{2n}(2t+1)=0$

定理 1 的证明 设在 ① 中有 r 个 y_i 为 1,s 个 y_i 为 -1,则 $r+s=n,r-s=\pm m$,所以 $n\pm m=2r$,亦即 n 必须与 m 同奇偶时 ① 才可能有解.故得证.

2. $m = 2t$ 的情形

由定理1,只须求 $e_{2n}(2t)$.为简单,记 $e_{2n}(2t) = u_n(t)$.设 j 为绝对值不超过 t 的整数,并以 $f_n(j)$ 表示混合组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2n} y_i = 2j \\ \left|\sum_{i=1}^{2l} y_i\right| < 2t, l = 1,2,\cdots,n-1 \end{cases} \quad ②$$

的解$(y_1, y_2, \cdots, y_{2n})$ 的个数.那么,由对称性显然有

$$f_n(j) = f_n(-j) \quad ③$$

及

$$u_n(t) = f_n(t) + f_n(-t) = 2f_n(t) \quad ④$$

引理 1 $m = 2t$ 时,$f_n(j)$ 适合下列递推等式:

$t = 1$ 时

$$\begin{cases} f_n(0) = 2f_{n-1}(0) & ⑤ \\ f_{n-1}(0) = f_n(1) & ⑥ \end{cases}$$

$t = 2$ 时

$$\begin{cases} f_n(0) = 2f_{n-1}(0) + 2f_{n-1}(1) & ⑦ \\ f_{n-1}(0) = f_n(1) - 2f_{n-1}(1) & ⑧ \\ f_{n-1}(1) = f_n(2) & ⑨ \end{cases}$$

$t \geqslant 3$ 时

$$\begin{cases} f_n(0) = 2f_{n-1}(0) + 2f_{n-1}(1) & ⑩ \\ f_{n-1}(j-1) = f_n(j) - 2f_{n-1}(j) - f_{n-1}(j+1), & ⑪ \\ j = 1,2,\cdots,t-2 \\ f_{n-1}(t-2) = f_n(t-1) - 2f_{n-1}(t-1) & ⑫ \\ f_{n-1}(t-1) = f_n(t) & ⑬ \end{cases}$$

引理 1 的证明 只须证 ⑪ 及 ⑫ 两式,其余同理可证.

将 ② 的解分为以下四种情形讨论.

ⅰ 适合 $y_{2n-1} = 1, y_{2n} = -1$ 的,此时可得 $\sum_{i=1}^{2(n-1)} y_i = 2j$,故此种解的个数为 $f_{n-1}(j)$;

ⅱ 适合 $y_{2n-1} = -1, y_{2n} = 1$ 的,同样有 $f_{n-1}(j)$ 个;

ⅲ 适合 $y_{2n-1} = y_{2n} = 1$ 的,此时可得 $\sum_{i=1}^{2(n-1)} y_i = 2(j-1)$,故此种解的个数为 $f_{n-1}(j-1)$;

ⅳ 适合 $y_{2n-1} = y_{2n} = -1$ 的,此时可得 $\sum_{i=1}^{2(n-1)} y_i = 2(j+1)$.由于 $1 \leqslant j \leqslant t-2$,所以 $4 \leqslant 2(j+1) \leqslant 2t-2 < 2t$.故此种解仍存在,并有 $f_{n-1}(j+1)$ 个.

综上所述，即得

$$f_n(j)=2f_{n-1}(j)+f_{n-1}(j-1)+f_{n-1}(j+1)$$

移项后就得 ⑪.

至于 ⑫，也可对 $f_n(t-1)$ 仿上分类讨论. 不过当 $y_{2n-1}=y_{2n}=-1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{2(n-1)} y_i=2t$$

这与 ② 的第二式矛盾，故此种解不存在.

下面我们来看，当 $t=1,2,3$ 时，由引理 1 可导出什么结果.

例 1 $t=1$ 时，在 ⑥ 中以 $n+1$ 代 n 得

$$f_n(0)=f_{n+1}(1) \tag{14}$$

以 ⑭ 和 ⑥ 分别代入 ⑤ 的两边得

$$f_{n+1}(1)=2f_n(1)$$

由 ④ 知也有 $u_{n+1}(1)=2u_n(1)$. 这说明 $\{u_n(1)\}$ 是一阶循环数列，其特征多项式可写成

$$F_1(x)=x-2 \tag{15}$$

例 2 $t=2$ 时，在 ⑧ 中以 $n+1$ 代 n 得

$$f_n(0)=f_{n+1}(1)-2f_n(1) \tag{16}$$

以 ⑯ 和 ⑧ 分别代入 ⑦ 的左右两边得

$$f_{n+1}(1)-2f_n(1)=2(f_n(1)-2f_{n-1}(1))+2f_{n-1}(1)$$

整理得

$$f_{n+1}(1)-4f_n(1)+2f_{n-1}(1)=0 \tag{17}$$

在 ⑨ 中分别以 $n+1$ 和 $n+2$ 代 n 得

$$f_n(1)=f_{n+1}(2) \tag{18}$$

及

$$f_{n+1}(1)=f_{n+2}(2) \tag{19}$$

以 ⑲，⑱ 及 ⑨ 代入 ⑰ 得

$$f_{n+2}(2)-4f_{n+1}(2)+2f_n(2)=0 \tag{20}$$

由 ④ 知也有 $u_{n+2}(2)-4u_{n+1}(2)+2u_n(2)=0$

这说明 $\{u_n(2)\}$ 是二阶循环数列，其特征多项式可写成

$$F_2(x)=x^2-4x+2 \tag{21}$$

例 3 $t=3$ 时，由 ⑩ ~ ⑬ 可得

$$\begin{cases} f_n(0)=2f_{n-1}(0)+2f_{n-1}(1) & (22)\\ f_{n-1}(0)=f_n(1)-2f_{n-1}(1)-f_{n-1}(2) & (23)\\ f_{n-1}(1)=f_n(2)-2f_{n-1}(2) & (24)\\ f_{n-1}(2)=f_n(3) & (25)\end{cases}$$

由㉓可得

$$f_n(0)=f_{n+1}(1)-2f_n(1)-f_n(2) \quad ㉖$$

以㉖和㉓中关于 $f_n(0)$ 和 $f_{n-1}(0)$ 的式子代入㉒并整理得

$$f_{n+1}(1)-4f_n(1)+2f_{n-1}(1)=f_n(2)-2f_{n-1}(2) \quad ㉗$$

由㉔可得

$$f_n(1)=f_{n+1}(2)-2f_n(2) \quad ㉘$$

及

$$f_{n+1}(1)=f_{n+2}(2)-2f_{n+1}(2) \quad ㉙$$

以㉙,㉘和㉔中关于 $f_{n+1}(1),f_n(1)$ 和 $f_{n-1}(1)$ 的式子代入㉗并整理得

$$f_{n+2}(2)-6f_{n+1}(2)+9f_n(2)-2f_{n-1}(2)=0 \quad ㉚$$

同样,由㉕和㉚可推出

$$f_{n+3}(3)-6f_{n+2}(3)+9f_{n+1}(3)-2f_n(3)=0 \quad ㉛$$

故有 $u_{n+3}(3)-6u_{n+2}(3)+9u_{n+1}(3)-2u_n(3)=0$

这说明 $\{u_n(3)\}$ 是三阶循环数列,其特征多项式可写成

$$F_3(x)=x^3-6x^2+9x-2 \quad ㉜$$

引理 2 设有递推式

$$\varphi_{n+t-2}(t-2)+a_1\varphi_{n+t-3}(t-2)+\cdots+a_{t-2}\varphi_n(t-2)+a_{t-1}\varphi_{n-1}(t-2)=\varphi_{n+t-3}(t-1)+b_1\varphi_{n+t-4}(t-1)+\cdots+b_{t-3}\varphi_n(t-1)+b_{t-2}\varphi_{n-1}(t-1) \quad ㉝$$

$$\varphi_{n-1}(t-2)=\varphi_n(t-1)-2\varphi_{n-1}(t-1) \quad ㉞$$

$$\varphi_{n-1}(t-2)=\varphi_n(t-1)-2\varphi_{n-1}(t-1)-\varphi_{n-1}(t) \quad ㉟$$

那么,当㉝和㉞同时成立时,可推得

$$\varphi_{n+t-1}(t-1)+c_1\varphi_{n+t-2}(t-1)+\cdots+c_{t-2}\varphi_n(t-1)+c_t\varphi_{n-1}(t-1)=0 \quad ㊱$$

而当㉝和㉟同时成立时,可推得

$$\varphi_{n+t-1}(t-1)+c_1\varphi_{n+t-2}(t-1)+\cdots+c_{t-2}\varphi_n(t-1)+c_t\varphi_{n-1}(t-1)=\varphi_{n+t-2}(t)+a_1\varphi_{n+t-3}(t)+\cdots+a_{t-2}\varphi_n(t)+a_{t-1}\varphi_{n-1}(t) \quad ㊲$$

其中,a_i,b_i 均与 n 无关,而 $c_1=a_1-2,c_2=a_2-2a_1-1,c_i=a_i-2a_{i-1}-b_{i-2}(i=3,4,\cdots,t-1),c_t=-2a_{t-1}-b_{t-2}$.

引理 2 的证明 在㉞中依次以 $n+1,n+2,\cdots,n+t-1$ 代 n 可得

$$\varphi_n(t-2)=\varphi_{n+1}(t-1)-2\varphi_n(t-1)$$

$$\varphi_{n+1}(t-2)=\varphi_{n+2}(t-1)-2\varphi_{n+1}(t-1),\cdots,$$

$$\varphi_{n+t-2}(t-2)=\varphi_{n+t-1}(t-1)-2\varphi_{n+t-2}(t-1)$$

以 ㉞ 及上述各式代入 ㉝ 并整理，即得 ㊱. 同样可证 ㊲.

引理 3 当 $t \geqslant 3$ 时有

$$f_{n+t-2}(t-2)+a_1f_{n+t-3}(t-2)+\cdots+a_{t-2}f_n(t-2)+a_{t-1}f_{n-1}(t-2)=f_{n+t-3}(t-1)+b_1f_{n+t-4}(t-1)+\cdots+b_{t-3}f_n(t-1)+b_{t-2}f_{n-1}(t-1) \quad ㊳$$

其中，a_i, b_i 均与 n 无关.

引理 3 的证明 $t=3$ 时，由例 3 的 ㉗ 知引理成立.

现设 $t=k$ 时引理已成立，即

$$f_{n+k-2}(k-2)+a_1f_{n+k-3}(k-2)+\cdots+a_{k-2}f_n(k-2)+a_{k-1}f_{n-1}(k-2)=f_{n+k-3}(k-1)+b_1f_{n+k-4}(k-1)+\cdots+b_{k-3}f_n(k-1)+b_{k-2}f_{n-1}(k-1) \quad ㊴$$

其中，a_i, b_i 与 n 无关.

则 $t=k+1$ 时，式 ⑩ 和 ⑪ 中前 $k-1$ 个式子与 $t=k$ 时相同. 因而 ⑰ 仍成立. 另外由 ⑪，当

$$j=t-2=(k+1)-2=k-1$$

时可得

$$f_{n-1}(k-2)=f_n(k-1)-2f_{n-1}(k-1)-f_{n-1}(k) \quad ㊵$$

根据引理 2，由 ㊴ 和 ㊵ 可推出

$$f_{n+k-1}(k-1)+c_1f_{n+k-2}(k-1)+\cdots+c_{k-1}f_n(k-1)+c_kf_{n-1}(k-1)=f_{n+k-2}(k)+a_1f_{n+k-3}(k)+\cdots+a_{k-2}f_n(k)+a_{k-1}f_{n-1}(k) \quad ㊶$$

其中，c_i, a_i 均与 n 无关. 故结论也成立.

由上知当 $t \geqslant 3$ 时 ㊳ 成立.

定理 2 $\{u_n(t)\}$ 是 t 阶循环数列.

定理 2 的证明 $t=1,2,3$ 时由例 1,2,3 知定理成立.

$t>3$ 时，由引理 3 和引理 1 知 ㊳ 和 ⑫ 两式成立. 再由引理 2 知

$$f_{n+t-1}(t-1)+c_1f_{n+t-2}(t-1)+\cdots+c_{t-1}f_n(t-1)+c_tf_{n-1}(t-1)=0$$

其中，c_i 与 n 无关.

最后由 ⑬ 及 ④ 可得

$$u_{n+t}(t)+c_1u_{n+t-1}(t)+\cdots+c_{t-1}u_{n+1}(t)+c_tu_n(t)=0$$

故得所证.

定理 3 设 $F_t(x)$ 是 $\{u_n(t)\}$ 的特征多项式，则

$$F_{t+2}(x)=(x-2)F_{t+1}(x)-F_t(x)$$

定理 3 的证明 由例 1,2,3 知

$$F_1(x)=x-2,F_2(x)=x^2-4x+2$$
$$F_3(x)=x^3-6x^2+9x-2$$

同时不难求得

$$F_4(x)=x^4-8x^3+20x^2-16x+2$$

由直接验算知

$$F_3(x)=(x-2)F_2(x)-F_1(x)$$
$$F_4(x)=(x-2)F_3(x)-F_2(x)$$

故 $t=1,2$ 时定理成立.

对于 $t\geqslant 3$. 由引理 3 的证明过程知, $t=k$ 时 ㊴ 成立, $t=k+1$ 时 ㊶ 成立. 同理 $t=k+2$ 时应有

$$f_{n+k}(k)+d_1f_{n+k-1}(k)+\cdots+d_kf_n(k)+d_{k+1}f_{n-1}(k)=$$
$$f_{n+k-1}(k+1)+c_1f_{n+k-2}(k+1)+\cdots+$$
$$c_{k-1}f_n(k+1)+c_kf_{n-1}(k+1) \quad ㊷$$

再在 ⑫ 中分别以 $t=k,k+1,k+2$ 代入,依次得

$$f_{n-1}(k-2)=f_n(k-1)-2f_{n-1}(k-1) \quad ㊸$$
$$f_{n-1}(k-1)=f_n(k)-2f_{n-1}(k) \quad ㊹$$
$$f_{n-1}(k)=f_n(k+1)-2f_{n-1}(k+1) \quad ㊺$$

于是根据引理 2,由 ㊴ 和 ㊸ 可得

$$f_{n+k-1}(k-1)+c_1f_{n+k-2}(k-1)+\cdots+c_{k-1}f_n(k-1)+$$
$$c_kf_{n-1}(k-1)=0 \quad ㊻$$

由 ㊶ 和 ㊹ 可得

$$f_{n+k}(k)+d_1f_{n+k-1}(k)+\cdots+d_kf_n(k)+d_{k+1}f_{n-1}(k)=0 \quad ㊼$$

由 ㊷ 和 ㊺ 可得

$$f_{n+k+1}(k+1)+l_1f_{n+k}(k+1)+\cdots+l_{k+1}f_n(k+1)+$$
$$l_{k+2}f_{n-1}(k+1)=0 \quad ㊽$$

最后,根据 ⑬ 及 ④ 不难由上三式依次推得

$$u_{n+k}(k)+c_1u_{n+k-1}(k)+\cdots+c_{k-1}u_{n+1}(k)+c_ku_n(k)=0$$
$$u_{n+k+1}(k+1)+d_1u_{n+k}(k+1)+\cdots+d_ku_{n+1}(k+1)+$$
$$d_{k+1}u_n(k+1)=0$$
$$u_{n+k+2}(k+2)+l_1u_{n+k+1}(k+2)+\cdots+l_{k+1}u_{n+1}(k+2)+$$
$$l_{k+2}u_n(k+2)=0$$

由此
$$F_k(x)=x^k+c_1x^{k-1}+\cdots+c_{k-1}x+c_k$$
$$F_{k+1}(x)=x^{k+1}+d_1x^k+\cdots+d_kx+d_{k+1}$$
$$F_{k+2}(x)=x^{k+2}+l_1x^{k+1}+\cdots+l_{k+1}x+l_{k+2}$$

但由引理2知

$$l_1 = d_1 - 2, l_2 = d_2 - 2d_1 - 1$$

$$l_i = d_i - 2d_{i-1} - c_{i-2}, i = 3,4,\cdots,k+1$$

$$l_{k+2} = -2d_{k+1} - c_k$$

由此即得 $F_{k+2}(x) = (x-2)F_{k+1}(x) - F_k(x)$

定理得证.

定理4

$$F_t(x) = \left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^t + \left(\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^t \quad ㊾$$

定理4的证明 由定理3知，$\{F_t(x)\}$ 关于 t 为二阶循环数列，其特征方程是

$$\lambda^2 - (x-2)\lambda + 1 = 0$$

解得

$$\lambda_1 = \frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}, \lambda_2 = \frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}$$

所以有 $F_t(x) = \varphi(x)\lambda_1^{t-1} + \psi(x)\lambda_2^{t-1}$

以初始条件 $F_1(x) = x-2, F_2(x) = x^2-4x+2$

代入得

$$\varphi(x) = \frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}, \psi(x) = \frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}$$

由此即得所证.

定理5 $F_t(x)$ 的 t 个特征根恰为 $x_k = 2(1+\cos\theta_k)$，其中

$$\theta_k = \frac{2k+1}{2t}\pi, k = 0,1,2,\cdots,t-1$$

定理5的证明 解方程

$$\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^t + \left(\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^t = 0$$

因为 $x-2-\sqrt{x^2-4x} = 0$ 不成立，所以此方程可化为

$$\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{x-2-\sqrt{x^2-4x}}\right)^t + 1 = 0$$

即

$$\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^{2t} = -1 \quad ㊿$$

故知 $\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}$ 必为虚数．因此，若 x 为实数，则 $x^2-4x<0$．这时由㊿得

$$\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\sqrt{4x-x^2}\cdot \mathrm{i}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2t}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{2t},$$
$$k=0,1,2,\cdots,2t-1$$

根据复数相等条件得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(x-2)=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2t}=\cos\theta_k & ⑤①\\ \frac{1}{2}\sqrt{4x-x^2}=\sin\frac{(2k+1)\pi}{2t}=\sin\theta_k & ⑤②\end{cases}$$

由 ⑤① 得 $x=2(1+\cos\theta_k)$，以之代入 ⑤② 得

$$\sqrt{\sin^2\theta_k}=\sin\theta_k$$

上式成立的充要条件是 $\sin\theta_k>0$. 所以 $0<\theta_k<\pi$. 由此得

$$-\frac{1}{2}<k<t-\frac{1}{2}$$

故 $k=0,1,2,\cdots,t-1$. 反之，对于上述 k 值不难验证 $x_k=2(1+\cos\theta_k)$ 是 $F_t(x)=0$ 的根. 又 $F_t(x)$ 为 t 次多项式，仅有 t 个根. 故上述 x_k 即为全部特征根.

定理 6

$$u_n(t)=\frac{1}{2^{t-2}}\sum_{k=0}^{t-1}p_k(2+2\cos\theta_k)^{n-1} \qquad ⑤③$$

其中，$\theta_k=\frac{2k+1}{2t}\pi$；$t=1$ 时，$p_0=1$；$t\geqslant 2$ 时

$$p_k=\prod_{i\neq k}(\cos\theta_k-\cos\theta_i)^{-1},k=0,1,\cdots,t-1 \qquad ⑤④$$

定理 6 的证明 由定理 5 知 $F_t(x)$ 有 t 个互异的特征根 x_k. 所以有

$$u_n(t)=\sum_{k=0}^{t-1}a_kx_k^{n-1}$$

由于 $m=2t$ 时青蛙至少要 $2t$ 步才能跳到顶点 A_m，故有初始条件

$$u_1(t)=u_2(t)=\cdots=u_{t-1}(t)=0,u_t(t)=2$$

以此代入上述 $u_n(t)$ 之表达式，得方程组

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{t-1}x_k^{i-1}a_k=0,i=1,2,\cdots,t-1\\ \sum_{k=0}^{t-1}x_k^{t-1}a_k=2\end{cases}$$

利用范得蒙(Vandermonde) 行列式的性质，可得此方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{t-1}\\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{t-1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_0^{t-1} & x_1^{t-1} & \cdots & x_{t-1}^{t-1}\end{vmatrix}=\prod_{i>j}(x_i-x_j)=$$

$$\prod_{i>j}2(\cos\theta_i-\cos\theta_j)=2^{\frac{t(t-1)}{2}}\prod_{i>j}(\cos\theta_i-\cos\theta_j)$$

又 a_k 的分子的行列式为

$$D_k=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{k-1} & 0 & x_{k+1} & \cdots & x_{t-1}\\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{k-1}^2 & 0 & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{t-1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_0^{t-1} & x_1^{t-1} & \cdots & x_{k-1}^{t-1} & 2 & x_{k+1}^{t-1} & \cdots & x_{t-1}^{t-1}\end{vmatrix}=(-1)^{t+(k+1)}\cdot$$

$$2\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & \cdots & x_{k-1} & x_{k+1} & \cdots & x_{t-1}\\ x_0^2 & \cdots & x_{k-1}^2 & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{t-1}^2\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_0^{t-2} & \cdots & x_{k-1}^{t-2} & x_{k+1}^{t-2} & \cdots & x_{t-1}^{t-2}\end{vmatrix}=(-1)^{t+k+1}\cdot$$

$$2\prod_{\substack{i>j\\(i\neq k,j\neq k)}}(x_i-x_j)=(-1)^{t+k+1}\cdot 2\cdot 2^{\frac{(t-1)(t-2)}{2}}\cdot$$

$$\prod_{\substack{i>j\\(i\neq k,j\neq k)}}(\cos\theta_i-\cos\theta_j)$$

又 $t\geqslant 3$ 时，D 可改写为

$$D=2^{\frac{t(t-1)}{2}}(\cos\theta_k-\cos\theta_0)\cdots(\cos\theta_k-\cos\theta_{k-1})(\cos\theta_{k+1}-\cos\theta_k)\cdots(\cos\theta_{t-1}-\cos\theta_k)\prod_{\substack{i>j\\(i\neq k,j\neq k)}}(\cos\theta_i-\cos\theta_j)=$$

$$2^{\frac{t(t-1)}{2}}\cdot(-1)^{t-k-1}\prod_{i\neq k}(\cos\theta_k-\cos\theta_i)\cdot\prod_{\substack{i>j\\(i\neq k,j\neq k)}}(\cos\theta_i-\cos\theta_j)$$

再由 $a_k=\dfrac{D_k}{D}$ 即可证明定理(至于 $t=1,2$ 时可直接验证).

例 4 对于正十二边形

$$m=6,t=3.\ \theta_0=\frac{\pi}{6},\theta_1=\frac{\pi}{2},\theta_2=\frac{5\pi}{6}$$

$$p_0^{-1}=\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$$

$$p_1^{-1}=\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}$$

$$p_2^{-1}=\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$$

所以
$$p_0=p_2=\frac{2}{3},p_1=-\frac{4}{3}$$

又
$$x_0=2+2\cos\frac{\pi}{6}=2+\sqrt{3},x_1=2+2\cos\frac{\pi}{2}$$
$$x_2=2+2\cos\frac{5\pi}{6}=2-\sqrt{3}$$

故依㊿得

$$e_{2n}(6)=u_n(3)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(2+\sqrt{3})^{n-1}-\frac{4}{3}\cdot 2^{n-1}+\frac{2}{3}(2-\sqrt{3})^{n-1}\right)=\frac{1}{3}((2+\sqrt{3})^{n-1}+(2-\sqrt{3})^{n-1}-2^n)$$

例 5 对于正十六边形

$$m=8,t=4.\theta_0=\frac{\pi}{8},\theta_1=\frac{3\pi}{8},\theta_2=\frac{5\pi}{8},\theta_3=\frac{7\pi}{8}$$

$$p_0^{-1}=\left(\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{7\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

所以
$$p_0=\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}$$

同样求得
$$p_1=-\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}},p_2=\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}},p_3=-\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}$$

又
$$x_0=2+2\cos\frac{\pi}{8}=2+\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

同样求得

$$x_1=2+\sqrt{2-\sqrt{2}},x_2=2-\sqrt{2-\sqrt{2}},x_3=2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

代入㊿得

$$e_{2n}(8)=u_n(4)=\frac{1}{2^2}\left(\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1}-\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}(2+\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1}+\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}(2-\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1}-\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1}\right)=$$
$$\frac{1}{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}((2+\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1}-$$

$$(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})^{n-1})-$$
$$\frac{1}{2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}((2+\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1}-$$
$$(2-\sqrt{2-\sqrt{2}})^{n-1})$$

例6 对于正二十边形，$m=10,t=5$。按照前面同样的方法，并利用

$$\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

可得

$$e_{2n}(10)=u_n(5)=\frac{\sqrt{5}-1}{10}\left(\left(2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1}+\left(2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1}\right)-\frac{\sqrt{5}+1}{10}\left(\left(2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1}+\left(2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1}\right)+\frac{1}{5}\cdot 2^n$$

3. $m=2t+1$ 的情形

这种情形与 $m=2t$ 时所用方法很类似，故只简述如下.

令 $g_n(j)$ 表示混合组

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{2n+1}y_i=2j+1\\ \left|\sum\limits_{i=1}^{2l+1}y_i\right|<2t+1,l=1,2,\cdots,n-1\end{cases}$$

的解 $(y_1,y_2,\cdots,y_{2n+1})$ 的个数.那么，由对称性有

$$g_n(j)=g_n(-j-1)$$

及 $e_{2n+1}(2t+1)=v_n(t)=g_n(t)+g_n(-t-1)=2g_n(t)$

引理1' $m=2t+1$ 时，$g_n(j)$ 适合下列递推等式.

$t=1$ 时

$$\begin{cases}g_n(0)=3g_{n-1}(0)\\ g_{n-1}(0)=g_n(1)\end{cases}$$

$t=2$ 时

$$\begin{cases}g_n(0)=3g_{n-1}(0)+g_{n-1}(1)\\ g_{n-1}(0)=g_n(1)-2g_{n-1}(1)\\ g_{n-1}(1)=g_n(2)\end{cases}$$

$t\geq 3$ 时

$$\begin{cases} g_n(0)=3g_{n-1}(0)+g_{n-1}(1) \\ g_{n-1}(j-1)=g_n(j)-2g_{n-1}(j)-g_{n-1}(j+1), j=1,2,\cdots,t-2 \\ g_{n-1}(t-2)=g_n(t-1)-2g_{n-1}(t-1) \\ g_{n-1}(t-1)=g_n(t) \end{cases}$$

证明从略. 根据此引理, 可直接验证 $\{v_n(1)\}$, $\{v_n(2)\}$, $\{v_n(3)\}$, $\{v_n(4)\}$ 分别为一、二、三、四阶循环数列, 且其特征多项式分别为

$$G_1(x)=x-3, G_2(x)=x^2-5x+5$$
$$G_3(x)=x^3-7x^2+14x-7$$
$$G_4(x)=x^4-9x^3+27x^2-30x+9$$

定理 2′ $\{v_n(t)\}$ 是 t 阶循环数列.(证略)

定理 3′ 设 $G_t(x)$ 是 $\{v_n(t)\}$ 的特征多项式, 则

$$G_{t+2}(x)=(x-2)G_{t+1}(x)-G_t(x)$$

(证略)

定理 4′

$$G_t(x)=\frac{x-4+\sqrt{x^2-4x}}{2\sqrt{x^2-4x}}\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^t-\frac{x-4-\sqrt{x^2-4x}}{2\sqrt{x^2-4x}}\left(\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^t$$

定理 4′ 的证明 仿定理 4 的证明可得

$$G_t(x)=\varphi(x)\lambda_1^{t-1}+\psi(x)\lambda_2^{t-1}$$

以初始条件 $G_1(x)=x-3, G_2(x)=x^2-5x+5$

代入得 $\varphi(x)=\dfrac{x^2-5x+4+(x-3)\sqrt{x^2-4x}}{2\sqrt{x^2-4x}}=\dfrac{(x-4+\sqrt{x^2-4x})(x-2+\sqrt{x^2-4x})}{4\sqrt{x^2-4x}}$

$$\psi(x)=-\frac{(x-4-\sqrt{x^2-4x})(x-2-\sqrt{x^2-4x})}{4\sqrt{x^2-4x}}$$

由此即可得证.

定理 5′ $G_t(x)$ 的 t 个特征根恰为 $x_k=2(1+\cos\theta_k)$, 其中

$$\theta_k=\frac{2k+1}{2t+1}\pi, k=0,1,\cdots,t-1$$

定理 5′ 的证明 解方程

$$\frac{x-4+\sqrt{x^2-4x}}{2\sqrt{x^2-4x}}\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^t-$$

$$\frac{x-4-\sqrt{x^2-4x}}{2\sqrt{x^2-4x}}\left(\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^t=0$$

因为 $x-2\pm\sqrt{x^2-4x}=0$ 不成立，又 $x\neq 4$(否则方程无意义)，所以

$$x-4+\sqrt{x^2-4x}\neq 0$$

故原方程可化为

$$\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{x-2-\sqrt{x^2-4x}}\right)^t=\frac{x-4-\sqrt{x^2-4x}}{x-4+\sqrt{x^2-4x}}$$

即
$$\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^{2t}=\frac{-2}{x-2+\sqrt{x^2-4x}}$$

或化为
$$\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)^{2t+1}=-1$$

所以

$$\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2t+1}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{2t+1}$$
$$k=0,1,\cdots,2t$$

因为 $k=t$ 时，$\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}=-1$，但此时 $x=0$，原方程无意义. 所以$\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}$ 只能为虚数. 以下推导可仿定理 5.

定理 6′

$$v_n(t)=\frac{1}{2^{t-2}}\sum_{k=0}^{t-1}p_k(2+2\cos\theta_k)^{n-1}$$

其中，$\theta_k=\frac{2k+1}{2t+1}\pi$；$t=1$ 时，$p_0=1$；$t\geqslant 2$ 时

$$p_k=\prod_{i\neq k}(\cos\theta_k-\cos\theta_i)^{-1},k=0,1,\cdots,t-1$$

可完全仿定理 6 证.

4. 综合结论

综合 $m=2t$ 和 $m=2t+1$ 的情形，可得

$$e_n(m)=(1+(-1)^{n+m})\frac{1}{2^{[\frac{m}{2}]-1}}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]-1}p_k(2+2\cos\theta_k)^{[\frac{n}{2}]-1}$$

其中，$\theta_k=\frac{2k+1}{m}\pi$；$m=2$ 或 3 时，$p_0=1$；$m\geqslant 4$ 时

$$p_k=\prod_{i\neq k}(\cos\theta_k-\cos\theta_i)^{-1},k=0,1,\cdots,\left[\frac{m}{2}\right]-1$$

第 22 届国际数学奥林匹克

美国,1981

英国命题

❶ 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内的一点,从点 P 向 BC,CA,AB 作垂线,垂足分别为点 D,E,F,找到所有的点 P,使

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

为极小值.

解法 1 将与点 A,B,C 相对的各边边长用 a,b,c 表示,将线段 PD,PE,PF 的长度用 x,y,z 表示,如图 22.1 所示.

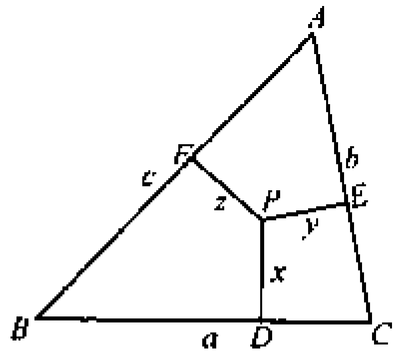


图 22.1

三角形面积 K 满足关系

$$2K=ax+by+cz \quad ①$$

我们将在满足式 ① 的条件下,极小化

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \quad ②$$

有几种方法,最简单的是运用柯西不等式

$$(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2\leqslant(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)$$

将 $\sqrt{ax},\sqrt{by},\sqrt{cz}$ 用 u_i 表示,$\sqrt{a/x},\sqrt{b/y},\sqrt{c/z}$ 用 v_i 表示,那么

$$(a+b+c)^2\leqslant(ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=$$
$$2K\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \quad ③$$

或
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2K}$$

当且仅当 $(a/x,b/y,c/z)$ 与 (ax,by,cz) 成比例,即当且仅当 $x=y=z$ 时,上述等式成立.这样,当点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时,式 ② 取最小值.

这个结论也可推广到三维空间的四面体,或用几种方法推广应用于 n 维欧几里得(Euclid) 空间中的单体(n 维"三角形").这些都包含在下述的极值问题中:

给定 $\sum x_i=1$,求 $S=\sum a_ix_i^p$ 的极值.这里是对 $i=1,2,\cdots,n,x_i\geqslant 0$ 求和;a_i 和 p 是已知的,且 $a_i>0$.

一种简单的方法是应用赫尔德(Hölder) 不等式,该不等式是

柯西不等式的一般形式.

熟悉微积分的读者可以运用拉格朗日(Lagrange)方法使函数 $f(x,y,z)$ 极大化(当 $g(x,y,z)$ 等于常数时).但是,对于解还必须验证确定达到了极大值或极小值,对于所给的题中有三个变量的情况,做到这点并不难;但对于 n 个变量的情形,还必须检验限制条件在较低维空间的"面"上的情况,这个任务是很艰巨的.微积分方法是普遍应用的方法,但通过一个已知的不等式来求解会更简单.

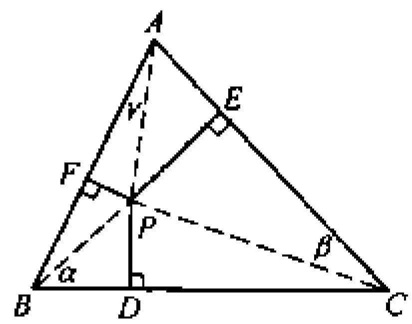


图 22.2

解法2 如图22.2所示,连结 PA,PB,CP.并设 $\angle PBC=\alpha$,$\angle PCA=\beta$,$\angle PAB=\gamma$.则有

$$BD=PD\cdot\cot\alpha$$

$$DC=PD\cdot\cot(C-\beta)$$

从而 $$BC=PD(\cot\alpha+\cot(C-\beta))$$

所以 $$\frac{BC}{PD}=\cot\alpha+\cot(C-\beta)$$

同理可得 $$\frac{AC}{PE}=\cot\beta+\cot(A-\gamma)$$

$$\frac{AB}{PF}=\cot\gamma+\cot(B-\alpha)$$

把以上三式相加,得

$$\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}=(\cot\alpha+\cot(B-\alpha))+(\cot\beta+\cot(C-\beta))+(\cot\gamma+\cot(A-\gamma))=\frac{\sin B}{\sin\alpha\cdot\sin(B-\alpha)}+\frac{\sin C}{\sin\beta\cdot\sin(C-\beta)}+\frac{\sin A}{\sin\gamma\cdot\sin(A-\gamma)}=\frac{2\sin B}{\cos(2\alpha-B)-\cos B}+\frac{2\sin C}{\cos(2\beta-C)-\cos C}+\frac{2\sin A}{\cos(2\gamma-A)-\cos A}$$

上式中的 $\sin B,\cos B,\sin C,\cos C,\sin A,\cos A$ 均为定值,要和式 $\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}$ 最小,只要令 $\cos(2\alpha-B),\cos(2\beta-C),\cos(2\gamma-A)$ 都取最大值即可.显然,当 $\alpha=\frac{B}{2},\beta=\frac{C}{2},\gamma=\frac{A}{2}$ 时,$\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}$ 取最小值.此时点 P 惟一确定,即 $\triangle ABC$ 的内心.

联邦德国命题

2 若 $1\leqslant r\leqslant n$，考虑集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有由 r 个元素组成的子集，每个子集有最小元素，以 $F(n,r)$ 表示所有这些最小元素的算术平均值，证明

$$F(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$$

证法 1 我们把包含 r 个元素的各子集按其最小元素 k 来区分，其中 $k=1,2,\cdots,n-r+1$. 对于某个最小元素 k，剩下的 $r-1$ 个元素取自这 $n-k$ 个元素 $k+1,k+2,\cdots,n$. 因此，那些由 r 个元素组成并以 k 为最小元素的子集共有 $\binom{n-k}{r-1}$ 个，所以

$$F(n,r)=\frac{N(n,r)}{\binom{n}{r}}$$

其中

$$N(n,r)=\sum_{k=1}^{n-r+1}k\binom{n-k}{r-1} \qquad ①$$

是所有的子集中各最小元素之和，为求出 $N(n,r)$，我们应用两次"基本和公式"

$$\sum_{k=1}^{n}(F(k)-F(k-1))=F(n)-F(0) \qquad ②$$

运用二项式系数公式

$$\binom{n-k}{r-1}=\binom{n-k+1}{r}-\binom{n-k}{r}$$

将式 ① 变成

$$\sum_{k=1}^{n-r+1}\left((k-1)\binom{n-k+1}{r}-k\binom{n-k}{r}\right)+\sum_{k=1}^{n-r+1}\binom{n-k+1}{r} \qquad ③$$

根据式 ②，③ 中的前一项为零，为求第二项之和，再如前拆开，即

$$\sum_{k=1}^{n-r+1}\binom{n-k+1}{r}=\sum_{k=1}^{n-r+1}\left(\binom{n-k+2}{r+1}-\binom{n-k+1}{r+1}\right)=$$

$$\binom{n+1}{r+1}=N(n,r)$$

因此
$$F(n,r)=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{(n+1)}{(r+1)}$$

证法 2 用语言来阐述这个问题：在前 n 个正整数中随机选取 r 个，问所选整数的最小值的期望值为多少？

这个问题在有关概率和统计的题为"顺序统计学"的书中都有所讨论.我们不需运用概率方法而简单地求出答案.

画一个圆并将它分成 $n+1$ 段弧,标为 $0,1,\cdots,n$.取 1 个红色标志和 r 个绿色标志,在各弧上作上标记,但每段弧上不能有 1 个以上的标志.对于可能是红色标志的各位置,给 r 个绿色标志定位的每种方法都相当于由 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的 r 个元素组成的子集,这里各子集中的元素为绿色标志与红色标志之间的距离,并且是从红色标志起按顺时针方向测量的.

我们要求出红色标志按顺时针方向与最近的绿色标志之间距离的平均值.考虑以 $r+1$ 为一组,每组中包括占据着一定结构的扇形的各种标志的安排.当所占据的扇形结构固定时,红色标志有 $r+1$ 个可能的位置.考虑到各种可能,从红色标志到最近的绿色标志的距离之和,正好是每个扇形到下一个扇形的距离绕圆一周之和,即为 $n+1$.因此每组中红色标志与最近的绿色标志的平均值为$\frac{n+1}{r+1}$,这个值也就是所有情况的平均值.

在证法 2 中所选的模型中包含一个重要的原理,我们称之为定理.

定理 设 $s=\{X\}$ 为某种具体形式的各结构的集合(在我们所举的例子中,是从 $1,2,\cdots,n$ 中选择 r 个整数).设 $f(X)$ 为定义在 X 上的函数(在本例中,f 为 X 的最小元素),求 f 在 S 上的平均值

$$\frac{1}{k}\sum_{X\in S}f(X)$$

将 S 分成子集 S_j,使得 f 在每个子集上的平均值都为f,即

$$\frac{1}{k_j}\sum_{X\in S_j}f(X)=f \qquad ④$$

其中,k_j 为 S_j 中的元素数目

$$\sum k_j=k$$

那么 f 在所有的 $X\in S$ 上的平均值也是f.

定理的证明 将式 ④ 乘以 k_j,然后对 j 求和,有

$$k_jf=\sum_{X\in S_j}f(X),\sum k_jf=kf,f=\frac{1}{k}\sum_{X\in S}f(X)$$

在证法 2 中,这个原理应用于所有由 $r+1$ 个弧组成的集合的集合中,其中每个集合中有一段弧标为红色.

证法 3 记 $M=\binom{n+1}{r+1}$,$N=\binom{n}{r}$,令 $\{X_1,X_2,\cdots,X_M\}$ 是 $\{0,1,\cdots,n\}$ 的 $(r+1)$ 元子集的全体,$\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_N\}$ 是 $\{1,2,\cdots,$

$n\}$ 的 r 元子集全体.考虑 $M\times N$ 的 $0-1$ 矩阵:如果去掉 X_i 的最小元得到 Y_j,则在 (i,j) 位置是1,否则为0.那么每一行只有一个1,而且第 j 列1的个数是 Y_j 的最小元.所以,$\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 r 元子集的最小元的和是 $\binom{n+1}{r+1}$.因此最小元的算术平均值为

$$F(n,r)=\binom{n+1}{r+1}\Big/\binom{n}{r}=\frac{n+1}{r+1}$$

证法4 记集合

$$A=\{1,2,3,\cdots,n\}$$

而它的所有有 r 个元素(其中 $1\leqslant r\leqslant n$)的子集合所构成的集合类记为 A_r.而再用

$$A_{r,j},1\leqslant j\leqslant n-r+1$$

表示 A 的所有有 r 个元素而且其最小元素为 j 的这样一些 A 的子集合所构成的集合类,显而易见

$$A_r=A_{r,1}\cup A_{r,2}\cup\cdots\cup A_{r,n-r+1} \qquad ⑤$$

此外,对任意两个 $A_{r,j}$ 和 $A_{r,j'}$,$j\neq j'$,$A_{r,j}\cap A_{r,j'}=\varnothing$.如果我们对一个集合的类 B,用 $|B|$ 表示 B 中集合的个数,那么我们要证明

$$|A_{r,j}|=\binom{n-j}{r-1} \qquad ⑥$$

这是因为对 $A_{r,j}$ 中的每一个集合 B,其最小元素为 j,因此其余 $(r-1)$ 个元素必定是落在 $j+1,j+2,\cdots,n-1,n$ 这 $(n-j)$ 个数中,因此所有的最小元素为 j 的 r 个元素的 A 的子集合,共有 $\binom{n-j}{r-1}$ 个,亦即式⑥成立.有了式⑤和式⑥,那么如果记 μ 为集合类 A_r 中所有集合的最小元素的平均数,那么就有

$$\mu=\frac{1\times\binom{n-1}{r-1}+2\times\binom{n-2}{r-1}+\cdots+(n-r)\times\binom{r}{r-1}}{\binom{n}{r}}+\frac{(n-r+1)\binom{r-1}{r-1}}{\binom{n}{r}} \qquad ⑦$$

为了计算式⑦的分子,我们需要建立一个引理.

引理 对自然数 $a,b,b\geqslant a$,我们有

$$\binom{a}{a}+\binom{a+1}{a}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{b}{a}=\binom{b+1}{a+1} \qquad ⑧$$

引理的证明

$$\binom{a}{a}+\binom{a+1}{a}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{b}{a}=$$

$$\binom{a+1}{a+1}+\binom{a+1}{a}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{b}{a}=$$

$$\binom{a+2}{a+1}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{b}{a}=$$

$$\binom{a+3}{a+1}+\binom{a+3}{a}+\cdots+\binom{b}{a}=$$

$$\binom{a+4}{a+1}+\cdots+\binom{b}{a}=\cdots=\binom{b+1}{a+1}$$

现在有 $1\times\binom{n-1}{r-1}+2\times\binom{n-2}{r-1}+\cdots+$

$$(n-r)\times\binom{r}{r-1}+(n-r+1)\times\binom{r-1}{r-1}=$$

$$\left(\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\cdots+\binom{r}{r-1}+\binom{r-1}{r-1}\right)+$$

$$\left(\binom{n-2}{r-1}+\cdots+\binom{r}{r-1}+\binom{r-1}{r-1}\right)+\cdots+$$

$$\left(\binom{r}{r-1}+\binom{r-1}{r-1}\right)+\binom{r-1}{r-1}=$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\cdots+\binom{r+1}{r}+\binom{r}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

因此

$$\mu=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{\dfrac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}}{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}=\frac{n+1}{r+1} \qquad ⑨$$

证法5 集合$\{1,2,\cdots,n\}$的r元子集共有C_n^r个，这些子集的最小数之和为$S=C_n^rF(n,r)$.

考虑另一集合$M=\{0,1,2,\cdots,n\}$，它共有$n+1$个元素，从M中取一个$(r+1)$元子集，去掉其中的最小元素便得到集合$\{1,2,\cdots,n\}$的一个r元子集.这样便定义了一个由M的所有$(r+1)$元子集到$\{1,2,\cdots,n\}$的r元子集之间的一个映射.

设A是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个r元子集，如果它的最小元素为a，那么M的a个$(r+1)$元子集

$$\{0\}\cup A,\{1\}\cup A,\cdots,\{a-1\}\cup A$$

在此映射下的像为A.这就是说，a恰好等于上述$(r+1)$元子集的

个数. 因此, 集$\{1,2,\cdots,n\}$的所有r元子集的最小数之和S恰好等于M的一切$(r+1)$元子集的个数, 即

$$C_n^r F(n,r) = C_{n+1}^{r+1}$$

所以
$$F(n,r) = C_{n+1}^{r+1}/C_n^r = \frac{n+1}{r+1}$$

证法 6 集合$\{1,2,\cdots,n\}$的含r个元素的子集有C_n^r个, 其中最小数为k的子集有$C_{n-k}^{r-1}(k=1,2,\cdots,n-r+1)$个. 所以有

$$C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \cdots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r \tag{10}$$

这些子集中最小数的和为

$$S = C_{n-1}^{r-1} + 2C_{n-2}^{r-1} + \cdots + (n-r+1)C_{r-1}^{r-1} \tag{11}$$

利用式⑩, 可推得

$$\begin{aligned} S = &(C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + \cdots + C_{r-1}^{r-1}) + \\ &(C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + \cdots + C_{r-1}^{r-1}) + \\ &(C_{n-3}^{r-1} + \cdots + C_{r-1}^{r-1}) + \cdots + C_{r-1}^{r-1} = \\ &C_n^r + C_{n-1}^r + \cdots + C_r^r = C_{n+1}^{r+1} \end{aligned}$$

所以
$$F(n,r) = \frac{S}{C_n^r} = \frac{C_{n+1}^{r+1}}{C_n^r} = \frac{n+1}{r+1}$$

证法 7 考虑一个两分图如下: 黑顶点是$\{0,1,\cdots,n\}$的$r+1$元子集, 白顶点是$\{1,2,\cdots,n\}$的r元子集. 黑顶点X与X中去掉最小数的白顶点Y相连. 这个两分图有$\binom{n+1}{r+1}$个黑顶点, $\binom{n}{r}$个白顶点和$\frac{n+1}{r+1}\binom{n}{r}$条边. 注意到白顶点的度数是这顶点(是$\{1,\cdots,n\}$的$r$元子集)的最小数. 这样, 所要求的最小元的平均值就是黑顶点的平均度数$\frac{n+1}{r+1}$.

此证法属于 Memphis State 大学的 Cecil Rousseau

注 学生的证明用了二项式系数的计算, 发现这样的证明是容易的. 试证明下面的推广.

n元集$\{1,2,\cdots,n\}$的第k个最小元的算术平均值是

$$F(k,n,r) = k\cdot\frac{n+1}{r+1}$$

最简单的证明是利用概率. 在长为$n+1$的圆周上取等距的$n+1$个点(把圆周$n+1$等分的分点). $n+1$个点中随机地取$r+1$个点, 所选的点把圆周分成$r+1$段. 由对称性, 每一段的期望值为$\frac{n+1}{r+1}$. 在所选的第$r+1$点处切开这个圆, 并把它拉直成长为$n+1$的线段. 这样就有r个在$\{1,2,\cdots,n\}$选中的点, 最小的点与原点的距离的期望值是$\frac{n+1}{r+1}$, 由同样的对称性论证, 原点到

第 k 个最小点距离的期望值是

$$F(k,n,r) = k \cdot \frac{n+1}{r+1}$$

3 求出 $m^2 + n^2$ 的极大值，其中 m,n 为整数，并满足 $m,n \in \{1,2,\cdots,1\ 981\}$ 且

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$$

荷兰命题

解法 1 我们称一个有序数对 (n,m) 是"允许的"是指：$m,n \in \{1,2,\cdots,1\ 981\}$ 且满足

$$(n^2 - nm - m^2)^2 = 1 \quad ①$$

如果 $m = 1$，那么 $(1,1)$ 和 $(2,1)$ 为仅有的允许对.

对任何允许对 (n_1,n_2)，其中 $n_2 > 1$，有

$$n_1(n_1 - n_2) = n_2^2 \pm 1 > 0$$

所以 $n_1 > n_2$. 定义

$$n_3 = n_1 - n_2$$

那么 $n_1 = n_2 + n_3$，将此式代入①，得

$$\begin{aligned} 1 &= (n_1^2 - n_1n_2 - n_2^2)^2 = \\ &((n_2 + n_3)^2 - (n_2 + n_3)n_2 - n_2^2)^2 = \\ &(-n_2^2 + n_2n_3 + n_3^2)^2 = (n_2^2 - n_2n_3 - n_3^2)^2 \end{aligned}$$

所以 (n_2,n_3) 也是一个允许对.

若 $n_3 > 1$，按同样方法也可得 $n_2 > n_3$；设 $n_2 - n_3 = n_4$，又发现 (n_3,n_4) 为一个允许对.

这样就得到一数列 $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots$（一定为有限个），其中

$$n_{i+1} = n_{i-1} - n_i$$

且 (n_i,n_{i+1}) 为允许对.

该数列当 $n_i = 1$ 时终止. 因为 $(n_{i-1},1)$ 为允许对，$n_{i-1} > 1$，则必有 $n_{i-1} = 2$（见上式）. 因此 (n_1,n_2) 是截尾的斐波那契数列 1 597，987，…，13，8，5，3，2，1 的连续项. 反过来说，任意两项都构成允许对.

上面的各步骤都可以反推，从初值 $(2,1)$ 开始反推可以惟一地确定斐波那契数列 1，2，3，5，8，…，该数列的相邻项包括所有允许对. 不超过 1 981 的，这样的最大允许对为 1 597，987，所以 $m^2 + n^2$ 的最大值为 $1\ 597^2 + 987^2$.

解法 2 凡是适合关系式 $(m^2 - mn - m^2)^2 = 1$ 的序偶 (m,n)，称为可用序偶.

当 $m = 1$ 时，除 $(1,1)$ 和 $(2,1)$ 外，显然没有其他可用序偶.

现在考虑 $m \geqslant 2$ 时的情形.

设 $m_1 \geqslant 2$，并设 (m_2, m_1) 是一个可用序偶，则因

$$m_2(m_2 - m_1) = m_1^2 + (m_2^2 - m_1m_2 - m_1^2) = m_1^2 \pm 1 > 0$$

可知 $m_2 - m_1$ 是正数，即 $m_2 > m_1$.

令 $m_3 = m_2 + m_1$，因

$$\begin{aligned}1 = &(m_2^2 - m_1m_2 - m_1^2)^2 = \\ &(m_2^2 - (m_3 - m_2)m_2 - (m_3 - m_2)^2)^2 = \\ &(-m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2)^2 = (m_2^2 - m_2m_3 - m_3^2)^2\end{aligned}$$

所以 (m_3, m_2) 也是一个可用序偶.

再令 $m_4 = m_3 + m_2$. 同样理由可知 (m_4, m_3) 又是一个可用序偶.

依此法得到一个递增数列

$$m_1, m_2, m_3, m_4, \cdots, m_r, m_{r+1}, \cdots$$

其中每两个相邻的数，构成一个可用序偶 (m_{r+1}, m_r).

如果我们取 $m_1 = 2$，则数列

$$1, 1, m_1(=2), m_2, m_3, \cdots, m_r, m_{r+1}, \cdots \quad ②$$

中自第三项起，每一项是前面两项的和，所以 ② 是斐波那契数列.

于是我们可以断言在斐波那契数列中，任取两个相邻的数都可以构成一个可用序偶.

另一方面，设 (n_r, n_{r-1}) 是任一个可用序偶，则易知 $n_r > n_{r-1}$，而且 $(n_{r-1}, n_r - n_{r-1})$ 也是一个可用序偶. 若递增数列

$$n_r, n_{r-1}, \cdots, n_s, \cdots, n_1 \quad ③$$

中每一个 n_s 等于 $n_{s+2} - n_{s+1}$，而且终止于 n_1，则 $n_1 = 1$，因为若 $n_1 > 1$，则 ③ 的下一项仍可求得，与 n_1 是 ③ 的最后一项的假设矛盾. 把数列 ③ 的顺序倒置，则

$$n_1(=1), n_2, \cdots, n_{r-1}, n_r$$

显然是斐波那契数列的一片段，$n_s = m_{s-1}$. 所以每个可用序偶必定是斐波那契数列中两个相邻的数.

根据斐波那契数列的性质，当 r 无限增大时，② 中 m_{r+1} 和 m_r 的比值趋于极限 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1.62$，实际上当 $r \geqslant 5$ 时，所有 m_{r+1}/m_r 的值皆接近而略小于 1.62. 若 m_k 是 ② 中不大于 1 981 的最大项，则

$$m_k \cdot 1.62^{k-5} \leqslant 1\ 981 \quad ④$$

因 $m_5 = 13$，对 ④ 的两边取常用对数，得

$$k - 5 \leqslant (\lg 1\ 981 - \lg 13)/\lg 1.62 \approx 10.4$$

所以 k 的最大可能整数值是 15，而 $(m_{15}, m_{14}) = (1\ 597, 987)$ 是适合 $1 \leqslant m, n \leqslant 1\ 981$ 的最大可用序偶.

因此，所求的 $m^2 + n^2$ 的最大值是 $987^2 + 1\ 597^2 = 3\ 524\ 578$.

比利时命题

4 (1) 对于什么样的 $n>2$ 的数，可以找到一个由 n 个连续正整数构成的数列，该数列的最大值可以被另外的 $n-1$ 个数的最小公倍数整除？

(2) 对于什么样的 $n>2$ 的数，可以找到并且只能找到一个具有上述性质的数列？

解法1 (1) 和(2) 的答案分别为 $n\geqslant 4$ 和 $n=4$. 为证实这点，用 N 表示 n 个连续正整数组成的集合的最大元素. 注意，在这样的集合中只存在一个可被 n 整除的元素.

设 $n=3$ 为3整除 $N-1$ 和 $N-2$ 的最小公倍数，N 不可能有一个素数因子 $p>2$(因为这样的话，p 不可能是 $N-1$ 和 $N-2$ 的因子). 所以 N 必然取 2^a 的形式，又因 $N\geqslant 3$，则 a 必为一个大于1的整数. 由于 N 必须整除奇数 $N-1$，所以 N 就不可能有这种形式，这就排除了 $n=3$.

设 $n=4$，那么前三项的最小公倍数包括因子 2^b3^c(b,c 为某两正整数). 同样，N 不可能有素数因子 $p\geqslant 5$，否则前三项中没有一个可被 p 整除，即 N 不能整除它们的最小公倍数. 因此

$$N=2^b3^c$$

由此

$$N-2=2(2^{b-1}3^c-1)$$

$$N-3=3(2^b3^{c-1}-1)$$

只有当 $b=1,c=1$，即 $N=6$ 时，N 才能整除它们的最小公倍数，事实上，数列3,4,5,6,(3,4,5) 的最小公倍数为60，可被6整除，这回答了问题(2).

现在设 $n>4$，我们来证明 $(n-1)(n-2)$，$(n-2)(n-3)$ 它们都大于 n，都是 N 的可能取值.

任何两个相邻整数都是互素的，因此它们的最小公倍数即为其积. n 个以 N 结尾的连续整数为

$$N-(n-1),N-(n-2),N-(n-3),\cdots,N-1,N \quad ①$$

当 $N=(n-1)(n-2)$ 时，它整除式 ① 中前两项之积，因为 $(n-1)$ 整除

$$N-(n-1)=(n-1)(n-3)$$

$(n-2)$ 整除

$$N-(n-2)=(n-2)(n-2)$$

因此 $(n-1)(n-2)$ 整除 N 之前的 $n-1$ 个整数的最小公倍数.

当 $N=(n-2)(n-3)$ 时，很容易看出它整除式 ① 中第二、三项之积，所以 $(n-2)(n-3)$ 也为 N 的可能取值.

这样，对于 $n>4$，我们可以找到一个以上由 n 个连续整数构成的数列，其最大数可整除其他各数的最小公倍数. 这就回答了

问题(1).

解法 2 设 n 个连续正整数的集合为 $\{k+1,k+2,\cdots,k+n\}$.

先证当 $n=3$ 时,本题无解.事实上,因 $[k+1,k+2]=(k+1)(k+2)=k^2+3k+2$,若 $k+3\mid[k+1,k+2]$,则 $k+3\mid 2$,与 k 为正整数矛盾.

考虑 $n>3$ 的情形.

ⅰ 若 n 为偶数,$n=2m(m\geqslant 2)$,取 n 个连续正整数的集合

$$A=\{n-1,n,n+1,\cdots,2n-2\}$$

即合所求.

因 $2n-2=2(n-1)$,$n-1$ 为奇数,$2\nmid(n-1)$,$2\mid n$.故

$$(2n-2)\mid[n-1,n,n+1,\cdots,2n-3]$$

ⅱ 若 n 为奇数,$n=2m+1(m\geqslant 2)$,根据 ⅰ 对偶数 $n-1$ 取 $n-1$ 个连续正整数的集合

$$A'=\{n-2,n-1,n,\cdots,2n-4\}$$

则

$$2n-4\mid[n-2,n-1,n,\cdots,2n-4]$$

在 A' 中加上一个 $n-3$,得集合

$$B=\{n-3,n-2,n-1,n,\cdots,2n-4\}$$

则 n 个连续正整数的集合 B 即合所求.

现在来讨论问题(2).

ⅰ 当 $n=4$ 时,由

$$(k+4)\mid[k+1,k+2,k+3]$$

推出

$$(k+4)\mid(k+1)(k+2)(k+3)=(k+4)(k^2+2k+3)-6$$

得 $k+4\mid 6$,从而 $k=2$,故只有惟一的适合题设条件的集合 $\{3,4,5,6\}$.

ⅱ 当 $n=5$ 时,集合 $A_1=\{2,3,4,5,6\}$ 和 $A_2=\{8,9,10,11,12\}$ 都适合题设条件.

ⅲ 当 $n>5$ 时,若 $n=2m$ 为偶数,可取 $A_1=\{n-1,n,\cdots,2n-2\}$ 或 $A_2=\{n-5,n-4,\cdots,2n-6\}$ 都合所求.

若 $n=2m+1$ 为奇数,则可取

$$B_1=\{n-3,n-2,\cdots,2n-4\}$$

或

$$B_2=\{n-5,n-4,\cdots,2n-6\}$$

都合所求.

故当 $n\geqslant 5$ 时,至少有两个集合适合题设条件.

解法 3 我们按照习惯,用方括号表示最小公倍数,用圆括号

表示最大公约数,首先要建立一个初等数论中的引理.

引理 如果$[b_1,b_2,\cdots,b_s]=b$,那么

$$P^{\alpha}\mid b$$

的充分必要条件是存在某个 $i,1\leqslant i\leqslant s$ 使

$$P^{\alpha}\mid b_i$$

其中,P 是素数,α 是自然数.

引理的证明 我们将 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 作素因子分解,即

$$b_1=P_1^{\alpha_1^{(1)}}P_2^{\alpha_2^{(1)}}\cdots P_t^{\alpha_t^{(1)}}$$

$$b_2=P_1^{\alpha_1^{(2)}}P_2^{\alpha_2^{(2)}}\cdots P_t^{\alpha_t^{(2)}}$$

$$\vdots$$

$$b_s=P_1^{\alpha_1^{(s)}}P_2^{\alpha_2^{(s)}}\cdots P_t^{\alpha_t^{(s)}}$$

其中,$P_1,P_2,\cdots,P_t$ 是互异的素数,$\alpha_1^{(1)},\alpha_1^{(2)},\cdots,\alpha_1^{(s)}$ 不全为零,$\cdots,\alpha_t^{(1)},\alpha_t^{(2)},\cdots,\alpha_t^{(s)}$ 不全为零.令

$$\alpha_1=\max_i\alpha_1^{(i)},\alpha_2=\max_i\alpha_2^{(i)},\cdots,\alpha_t=\max_i\alpha_t^{(i)}$$

则显然 $$[b_1,b_2,\cdots,b_s]=b=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_t^{\alpha_t}$$

因此若 $$P^{\alpha}\mid b$$

那么一定存在某一 $j,1\leqslant j\leqslant t$,使

$$P=P_j,\alpha\leqslant\alpha_j$$

再设 $\alpha_j^{(1)},\alpha_j^{(2)},\cdots,\alpha_j^{(s)}$ 中最大者为 $\alpha_j^{(i)}$,亦即

$$\alpha_j=\max_i\alpha_j^{(i)}=\alpha_j^{(i)}$$

这样就有 $$\alpha\leqslant\alpha_j^{(i)}$$

因此 $$P^{\alpha}\mid b_i$$

至于引理的充分性部分是显然的.

对固定的 n,我们对所有 $k\geqslant n$ 的自然数,定义

$$M_{k-1}=[k-1,k-2,k-3,\cdots,k-(n-1)]$$

即 M_{k-1} 是相连的 $n-1$ 个数 $k-1,k-2,\cdots,k-(n-1)$ 的最小公倍数.

我们要证明:如果存在 $k\geqslant n$,使

$$k\mid M_{k-1} \quad ②$$

那么一定有

$$k\mid M_{n-1} \quad ③$$

反之亦然.

这是因为对任何 $k\geqslant n$,我们有

$$(k,M_{k-1})=(k,M_{n-1}) \quad ④$$

我们先来证明式 ④,若对素数 P

$$P^{\alpha}\mid(k,M_{k-1})$$

则一定有
$$P^{\alpha} \mid k$$
及
$$P^{\alpha} \mid M_{k-1} = [k-1, k-2, \cdots, k-(n-1)]$$
据引理可知，一定存在某一 $i, 1 \leqslant i \leqslant n-1$，使
$$P^{\alpha} \mid i$$
这样就有
$$P^{\alpha} \mid k-i$$
其中，$1 \leqslant i \leqslant n-1$. 故一定有
$$P^{\alpha} \mid M_{n-1}$$
因此
$$P^{\alpha} \mid (k, M_{n-1})$$
反之亦可证明若 $P^{\alpha} \mid (k, M_{n-1})$，一定有 $P^{\alpha} \mid (k, M_{k-1})$. 这样就证明了式 ④.

现在因为 $k \mid M_{k-1}$，所以
$$k = (k, M_{k-1}) = (k, M_{n-1})$$
因此一定有 $k \mid M_{n-1}$，亦就是式 ③ 得证. 反之亦可从式 ② 来证得式 ④.

现在我们对各个具体 n 来观察式 ③，从而研究是否存在 k，使得
$$n \leqslant k, k \mid M_{n-1} \quad ⑤$$

当 $n = 3$ 时，$M_2 = 1 \times 2 = 2$. 若 $k \mid M_2$，那么一定有 $k = 1$ 或 2，但要求 $k \geqslant 3$. 所以矛盾. 因此可知 $n = 3$ 时本题无解.

当 $n = 4$ 时，$M_3 = [3,2,1] = 6$. 要求 $k \geqslant 4$ 以及 $k \mid 6$，那么就只有 $k = 6$，此时 $k-1, k-2, k-3$ 分别为 5,4,3，而 $[5,4,3] = 5 \times 4 \times 3 = 60$，而且 $6 \mid 60$. 所以可知 $n = 4$ 时，存在惟一的解：$k = 6$.

当 $n \geqslant 5$ 时，因为
$$1 = (n-1, n-2)$$
这是因为若 $(n-1, n-2) = S \geqslant 2$，那么 $s \mid n-1, s \mid n-2$，因此
$$s \mid (n-1) - (n-2) = 1$$
但 $s \geqslant 2$. 故矛盾. 因此
$$(n-1)(n-2) \mid M_{n-1}$$
再因为 $(n-1), (n-2)$ 中必定有一为偶数，所以 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 是整数，而且
$$\left.\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right| M_{n-1}$$
因对 $n \geqslant 5$
$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} > n \quad ⑥$$
这是因为和式 ⑥ 等价的不等式是

$$n^2-5n+2>0$$

亦即
$$\left(n-\frac{5}{2}\right)^2>\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

因为
$$5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}>\frac{\sqrt{17}}{2}$$

所以式⑥对 $n\geqslant 5$ 是满足的，这样我们对 $n\geqslant 5$ 就至少找到了两个 k，即

$$k_1=(n-1)(n-2),k_2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

它们都满足式⑤，因此可知：$n\geqslant 5$ 时，存在2个以上的解．如 $n=8,k_1=42,k_2=21$ 就是两个解．

5 三个全等的圆相交于一点 O，三圆同位于一已知的三角形内，并分别与三角形的其中两边相切．求证：三角形的内心，外心与 O 三点共线．

苏联命题

证明 将三角形各顶点用 A,B,C 表示，各圆的圆心用 A',B',C' 表示．如图22.3所示．

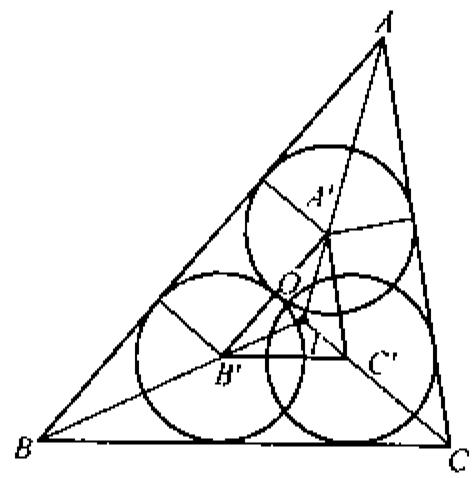


图22.3

因为三个圆的半径相等，$\triangle ABC$ 的各边与 $\triangle A'B'C'$ 的相应各边平行，点 O 为 $\triangle A'B'C'$ 的外心，因此 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 位似．位似的一个重要性质是各对应点与位似中心在同一直线上．线 AA',BB' 和 CC' 平分 $\angle A,\angle B,\angle C$，它们也联系两位似三角形的对应点且相交于 $\triangle ABC$ 的内心 I（也为 $\triangle A'B'C'$ 的内心）．所以 I 为位似中心．因两个三角形的外心为对应点，故它们与点 I 共线．

6 函数 $f(x,y)$ 满足

(1) $f(0,y)=y+1$；

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$；

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$．

其中，x,y 为非负整数．求 $f(4,1\,981)$．

芬兰命题

解法1 在条件(1)和条件(2)中令 $x=0$，得

$$f(1,0)=f(0,1)=2$$

并令(3)和(1)中 $y=0$，得

$$f(1,1)=f(0,f(1,0))=f(1,0)+1=3$$

然后，令(3)中 $y=1$，运用上式得

$$f(1,2)=f(0,f(1,1))=f(0,3)=4$$

我们断言

$$f(1,y)=y+2 \qquad ①$$

我们已在 $y=0,1,2$ 时证实了式①,一般情况可以从(3)出发,用数学归纳法来证明.

$$f(1,k)=f(0,f(1,k-1))=f(1,k-1)+1=(k-1)+2+1=k+2$$

下一步,我们求

$$f(2,0)=f(1,1)=3$$

由(3)和式①得

$$f(2,1)=f(1,f(2,0))=f(1,3)=5$$
$$f(2,2)=f(1,f(2,1))=f(1,5)=7$$

一般地,再对 y 实行归纳,且在(3)中令 $x=1$,有

$$f(2,y)=2y+3$$

下面,用类似的归纳方法对 $f(3,y)$ 进行分析

$$f(3,0)=f(2,1)=5=2^3-3$$
$$f(3,1)=f(2,f(3,0))=2\cdot 5+3=2^4-3$$

一般地
$$f(3,y)=2^{y+3}-3$$

最后,为求 $f(4,1\,981)$,可用

$$f(4,y+1)=f(3,f(4,y))$$

及
$$f(4,0)=f(3,1)=2^4-3$$

$$f(4,1)=f(3,f(4,0))=2^{2^4-3+3}-3=2^{2^{2^2}}-3$$

一般地
$$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3$$

这里前一项中有 $y+3$ 个 2,所以

$$f(4,1\,981)=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-3$$

这里共有 1 984 个 2.

注 这个由双重递归定义的函数称为阿克曼(Ackermann)函数.阿克曼是希尔伯特(Hilbert)的一个学生,他证明这个函数比任何单变量递归函数都增长得快,计算机专家对此很感兴趣,因为它比任何简单循环程序都增长得快.

第 23 届国际数学奥林匹克

匈牙利，1982

英国命题

1 $f(n)$ 的定义域为所有的正整数 n，值域为非负整数，且对于所有的 m,n 都有

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0 \text{ 或 } 1$$

$$f(2)=0, f(3)>0$$

并且 $f(9\ 999)=3\ 333$，求 $f(1\ 982)$.

解 由已知条件知

$$f(m+n) \geqslant f(m)+f(n)$$

当 $m=n=1$ 时，得 $f(2) \geqslant 2f(1)$；但 $f(2)=0$，且因函数 f 的值为非负数，所以 $f(1)=0$.

当 $m=2, n=1$，得

$$f(3)=f(2)+f(1)+\{0 \text{or} 1\}=0 \text{ 或 } 1$$

因为 $f(3)>0$，$f(3)=1$，那么

$$f(2\cdot 3)=f(3+3) \geqslant 2f(3)=2$$

所以，对于 3 的倍数，对 n 用数学归纳法得

$$f(n\cdot 3)=f((n-1)\cdot 3+3) \geqslant (n-1)f(3)+f(3)=n$$

即对于所有 n，$f(3n) \geqslant n$，而且若对某些 n，严格不等号"$>$"成立，即若 $f(3n)>n$，同样有 $f(3(n+1))>n+1$，等等. 这样，对于所有的 $m \geqslant n$，$f(3m)>m$. 但因为

$$f(9\ 999)=f(3\cdot 3\ 333)=3\ 333$$

至少直到 $n=3\ 333$，等号成立. 即对 $n \leqslant 3\ 333$，$f(3n)=3$. 特别地，$f(3\cdot 1\ 982)=1\ 982$.

另一方面

$$1\ 982=f(3\cdot 1\ 982) \geqslant f(2\cdot 1\ 982)+f(1\ 982) \geqslant 3f(1\ 982)$$

所以 $$f(1\ 982) \leqslant \frac{1\ 982}{3} < 661$$

同时 $$f(1\ 982) \geqslant f(1\ 980)+f(2)=f(3\cdot 660)=660$$

即 $$660 \leqslant f(1\ 982) < 661$$

得出 $$f(1\ 982)=660$$

注 存在一个函数具有这些性质，例如 $f(n)=\left[\frac{n}{3}\right]$，这里 $[x]$ 表示 x

的整数部分.

荷兰命题

❷ 已知一个非等腰 $\triangle A_1A_2A_3$，各边为 a_1,a_2,a_3（a_i 是与 $\angle A_i$ 相对的边）. 对所有的 $i=1,2,3$，M_i 是 a_i 边的中点，T_i 为内切圆与 a_i 边的切点. S_i 是 T_i 以 $\angle A_i$ 的平分线为对称轴的对称点. 证明：线段 M_1S_1,M_2S_2,M_3S_3 相交于一点.

证明 我们用位似三角形解了第22届中的题5，现在我们也用这种方法. 若我们能证明 $\triangle M_1M_2M_3$ 和 $\triangle S_1S_2S_3$ 位似，那么所要求证的结论就自然而然地得出了. 我们知道 $\triangle M_1M_2M_3$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 位似，若证明 $\triangle S_1S_2S_3$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 也位似，那么 $\triangle M_1M_2M_3$ 和 $\triangle S_1S_2S_3$ 的位似性即可证实，从而证明了其全等不成立.

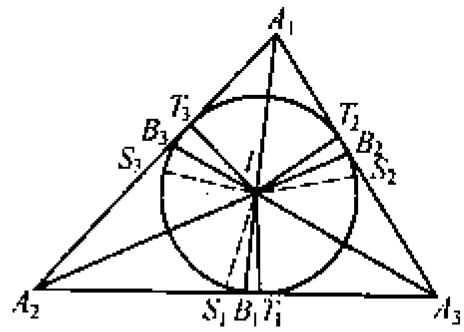


图 23.1

在图 23.1 中，表示出了 $\angle A_1,\angle A_2,\angle A_3$ 的平分线，它们分别与所对的边相交于点 B_1,B_2,B_3，但我们略去了中点 M_i. 有

$$\angle T_1IT_3=180^\circ-\angle A_2$$

$$\angle T_3B_3A_3=\angle A_2+\frac{1}{2}\angle A_3$$

$$\angle T_3IB_3=90^\circ-\left(\angle A_2+\frac{1}{2}\angle A_3\right)$$

$$\angle T_3IS_3=2\angle T_3IB_3=180^\circ-2\angle A_2-\angle A_3$$

那么 $\quad \angle S_2IT_1=\angle T_3IT_1-\angle T_3IS_3=\angle A_2+\angle A_3$

同样地，$\angle S_2IT_1=\angle A_3+\angle A_2$. 因此，$S_2S_3 /\!/ A_2A_3$. 类似可得 $S_3S_1 /\!/ A_3A_1$ 及 $S_1S_2 /\!/ A_1A_2$. 故 $\triangle S_1S_2S_3$ 和 $\triangle M_1M_2M_3$ 的各相应边平行. 因为 S_1,S_2,S_3 位于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆上，而 M_1,M_2,M_3 位于其九点圆上，因为 $\triangle A_1A_2A_3$ 不是等边三角形，所以两圆半径不等. 我们得出结论：$\triangle S_1S_2S_3$ 和 $\triangle M_1M_2M_3$ 位似，故 M_1S_1，M_2S_2,M_3S_3 相交于一点.

苏联命题

❸ 考虑一个具有下述性质的由正实数组成的无穷级数 $\{x_n\}$，$x_0=1$，对所有 $i\geqslant 0$，$x_{i+1}\leqslant x_i$.

(1) 证明：对于所有的这种级数，存在一个 $n\geqslant 1$，使

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3.999$$

(2) 找出一个这样的级数，使

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4(\text{对所有的 } n)$$

解法1 (1)我们将证明级数

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots$$

$$1=x_0\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots>0 \quad ①$$

的和大于等于4(很明显,当这级数发散时,这个结论成立).即该级数的某些部分和大于等于3.999.

设L为形式①的所有级数的和的最大下界(inf).很明显$L>1$,因为第一项$\frac{1}{x_1}>1$,对于任何$\epsilon>0$,我们都能找到序列$\{x_n\}$,使得

$$L+\epsilon>\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots \quad ②$$

令$y_n=x_n+1/x_1(n\geqslant 0)$,注意到$1=y_0\geqslant y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots>0$.式②右边的级数可写成

$$\frac{1}{x_1}+x_1\left(\frac{y_0^2}{y_1}+\frac{y_1^2}{y_2}+\frac{y_2^2}{y_3}+\cdots\right)$$

根据L的定义,括号内的级数和大于等于L.因此从式②得到

$$L+\epsilon>\frac{1}{x_1}+x_1L$$

将算术平均、几何平均不等式应用于右式,得到

$$L+\epsilon>2\sqrt{L}$$

因为上式对所有的$\epsilon>0$都成立,推出$L\geqslant 2\sqrt{L}$,所以$L^2\geqslant 4L$.因为$L>0$,所以$L\geqslant 4$.

(2)设$x_n=\frac{1}{2^n}$,那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n^2}{x_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=4$$

所以级数的任何部分和都小于4.

解法2 (1)分以下两种情形讨论.

i 若$\{x_n\}$不以0为极限,必存在某一正数$\delta>0$,使得对所有的i,$x_i\geqslant\delta$.于是

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}}\geqslant\frac{\delta^2}{x_{i+1}}\geqslant\delta^2$$

只要取n,使$n\delta^2\geqslant 3.999$即可.

ii 若$x_n\to 0$,因为

$$(x_i-2x_{i+1})^2=x_i^2-4x_ix_{i+1}+4x_{i+1}^2\geqslant 0$$

所以

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}}\geqslant 4(x_i-x_{i+1})$$

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 4(x_0-x_1)+4(x_1-x_2)+\cdots+4(x_{n-1}-x_n)=4-4x_n$$

因 $4x_n\to 0$,所以有 N 存在,当 $n\geqslant N$ 时,有 $4x_n\leqslant 0.001$,从而 $4-4x_n\geqslant 3.999$.

(2) 取 $x_i=\frac{1}{2^i}$ 即可. 因为

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}=4-\frac{1}{2^{n-1}}<4$$

解法 3 构造正数序列 $\{C_n\}$,使得对每一个满足条件

$$x_0\geqslant x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots>0$$

的数列,有以下不等式

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant C_nx_0$$

从而
$$\frac{x_0^2}{x_1}+\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_{n+1}}\right)\geqslant\frac{x_0^2}{x_1}+C_nx_1$$

因为
$$\frac{x_0^2}{x_1}+C_nx_1\geqslant 2\sqrt{C_n}x_0$$

所以
$$C_{n+1}=2\sqrt{C_n}$$

注意到 $\frac{x_0^2}{x_1}\geqslant x_0$,故可取 $C_1=1$,因而可得 $\{C_n\}$ 的通项公式

$$C_n=4\cdot 2^{-1/2^{n-2}},n=1,2,\cdots$$

这样,只要能找到一个 $n\geqslant 1$,使得

$$C_n=4\cdot 2^{-1/2^{n-2}}\geqslant 3.999$$

即
$$(4/3.999)^{2^{n-2}}\geqslant 2$$

由于
$$\left(\frac{4}{3.999}\right)^{2^{n-2}}>\left(1+\frac{1}{4\ 000}\right)^{2^{n-2}}>1+\frac{2^{n-2}}{4\ 000}$$

当 $n=14$ 时
$$1+\frac{2^{12}}{4\ 000}=1+\frac{4\ 096}{4\ 000}>2$$

因此,选取 $n=14$ 即可. 问题的第一部分得证.

至于第(2)问,取首项 $x_0=1$,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列 $\{x_n\}$:$x_n=\frac{1}{2^n}$,则对所有的 n,有

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2^1+2^0+2^{-1}+\cdots+2^{-n+2}=4-2^{-n+2}<4$$

此推广属于杨克昌

推广 我们可以把这一 IMO 试题写成另一形式.

求证:对任一正数数列 $\{x_n\}$: $x_0 = 1, x_{i+1} \leqslant x_i (i \geqslant 0)$,有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant 4 \quad ③$$

并指出何时不等式 ③ 等号成立.

因数列不等式③对任一满足条件的正数数列成立,则对一个给定的 $\epsilon > 0$,任一满足条件的正数数列 $\{x_n\}$,总存在一个 $n \geqslant 1$,使得

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant 4 - \epsilon$$

因可指出对某一满足条件的具体数列使式 ③ 有等号成立,即

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} = 4$$

则对所有正整数 n,有 $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} < 4$ 对该数列成立.

可以把所有数列不等式左边各项的分母指数拓广到正数 t,分子指数拓广到正数 $r + t$,得到以下数列不等式.

定理 设正数序列 $\{x_n\}$: $x_0 = 1, x_{i+1} \leqslant x_i (i \geqslant 0), t, r \in \mathbf{R}^+$,则有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^{r+t}}{x_{i+1}^t} \geqslant \left(\frac{r+t}{t}\right)^{\frac{t}{r}} \cdot \frac{r+t}{r} \quad ④$$

当取 $x_i = \left(\frac{t}{r+t}\right)^{\frac{i}{r}} (i \geqslant 0)$ 时式 ④ 等号成立.

定理的证明 构造数列 $\{g_n\}$ 为

$$g_n = \left(\left(\frac{r+t}{t}\right)^{\frac{t}{r}} \cdot \frac{r+t}{r}\right)^{1-\left(\frac{t}{r+t}\right)^n}, n = 0,1,2,\cdots \quad ⑤$$

我们用数学归纳法证明

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^{r+t}}{x_{i+1}^t} \geqslant g_{n-1} x_0^r \quad ⑥$$

其中,$x_0 \leqslant 1, x_{i+1} \leqslant x_i (i \geqslant 0)$.

事实上,当 $n = 1$ 时,注意到 $\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^t \geqslant 1$,而 $g_0 = 1$,显然

$$\frac{x_0^{r+t}}{x_1^t} = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^t x_0^r \geqslant x_0^r$$

即 $n = 1$ 时式 ⑥ 成立.

假设当 $n = 1$ 时式 ⑥ 成立,我们证当 $n + 1$ 时式 ⑥ 也成立.

根据数列 $\{g_n\}$ 的表达式 ⑤ 知

$$\frac{g_n}{g_{n-1}^{\frac{t}{r+t}}} = \left(\left(\frac{r+t}{t}\right)^{\frac{t}{r}} \cdot \frac{r+t}{r}\right)^{1-\frac{t}{r+t}} =$$

$$(\frac{r+t}{t})^{\frac{t}{r+t}}(\frac{r+t}{r})^{\frac{r}{r+t}}=\frac{r+t}{r}(\frac{r}{t})^{\frac{t}{r+t}}$$

则

$$g_n=\frac{r+t}{r}(\frac{t}{r}g_{n-1})^{\frac{t}{r+t}} \quad ⑦$$

同时应用加权平均不等式并注意到递推式 ⑦ 有

$$\frac{x_0^{r+t}}{x_1^t}+\frac{x_1^{r+t}}{x_2^t}+\cdots+\frac{x_{n-1}^{r+t}}{x_n^t}+\frac{x_n^{r+t}}{x_{n+1}^t}\geqslant\frac{x_0^{r+t}}{x_1^t}+g_{n-1}x_1^r=$$

$$1\cdot\frac{x_0^{r+t}}{x_1^t}+\frac{t}{r}(\frac{r}{t}g_{n-1}x_1^r)\geqslant$$

$$(1+\frac{t}{r})\left(\frac{x_0^{r+t}}{x_1^t}(\frac{r}{t}g_{n-1}x_1^r)^{\frac{t}{r}}\right)^{\frac{1}{1+\frac{t}{r}}}=$$

$$\frac{r+t}{r}(\frac{r}{t}g_{n-1})^{\frac{t}{r+t}}\cdot x_0^r=g_nx_0^r$$

于是得当 $n+1$ 时式 ⑥ 也成立.完成式 ⑥ 的归纳证明.

注意到$\frac{t}{r+t}<1,\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{t}{r+t})^{n-1}=0$,则可得

$$\lim_{n\to\infty}g_{n-1}=(\frac{r+t}{t})^{\frac{t}{r}}\cdot\frac{r+t}{r} \quad ⑧$$

综合 ⑥,⑧ 得数列不等式 ④ 成立.

取

$$x_i=(\frac{t}{r+t})^{\frac{i}{r}},i\geqslant 0$$

易知 $x_0^r,x_1^r,x_2^r,\cdots$ 是以$\frac{t}{r+t}$为公比的无穷递缩等比数列.注意到

$$\frac{x_i^{r+t}}{x_{i+1}^t}=(\frac{x_i}{x_{i+1}})^t x_i^r=(\frac{r+t}{t})^{\frac{t}{r}}\cdot x_i^r$$

则 $$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i^{r+t}}{x_{i+1}^t}=(\frac{r+t}{t})^{\frac{t}{r}}\sum_{i=0}^{\infty}x_i^r=$$

$$(\frac{r+t}{t})^{\frac{t}{r}}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{r+t}}=(\frac{r+t}{t})^{\frac{t}{r}}\cdot\frac{r+t}{r}$$

此时,式 ④ 等号成立.定理证毕.

显然,本题是该定理取 $t=r=1$ 的特例.

式 ④ 取 $t=m,r=1$ 或 $t=1,r=m$,可得下述推论.

对任一正数数列 $\{x_n\}$:$x_0=1,x_{i+1}\leqslant x_i(i\geqslant 0),m\in\mathbf{N}$,则有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i^{m+1}}{x_{i+1}^m}\geqslant\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m} \quad ⑨$$

与

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i^{m+1}}{x_{i+1}}\geqslant\frac{(m+1)^{\frac{m+1}{m}}}{m} \quad ⑩$$

取 $x_i=(\frac{m}{m+1})^i(i\geqslant 0)$ 时式 ⑨ 等号成立. 取 $x_i=(\frac{1}{m+1})^{\frac{i}{m}}(i\geqslant 0)$ 时式 ⑩ 等号成立.

显然,本题也是式 ⑨,⑩ 取 $m=1$ 的特例.

英国命题

4 证明:若 n 是一个正整数,则方程
$$x^3-3xy^2+y^3=n$$
若有一个整数解(x,y),则此方程至少有三个整数解;若 $n=2\ 891$,则该方程不可能有整数解.

证法 1 (1) 所给定的式子可以重写成
$$x^3-3xy^2+y^3=(y-x)^3-3x^2y+2x^3=(y-x)^3-3(y-x)x^2+(-x)^3$$
因此,若数对(x,y)为一个解,则数对$(y-x,-x)$也是一个解.通过类似的代数运算,我们可以证得$(-y,x-y)$也是一个解.换句话说,若(x,y)是一个解,那么变换
$$T:\begin{matrix}x'=-x+y\\ y'=-x\end{matrix} \text{或} T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\ -1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad ①$$
产生另一个解(读者可以证明 T^2 产生第三个解.而 $T^3=I$ - 恒等变换).而且这三个数对是各不相同的.因为如果其中两个是相同的,例如 $x=x',y=y'$,那么 $x=y=0$.而这一点已由已知条件 $n>0$ 排除了.

(2) 为证明
$$x^3-3xy^2+y^3=2\ 891$$
没有整数解,我们首先考虑 mod 3 的解.这时等式变成
$$x^3+y^3\equiv 2(\text{mod }3)\equiv -1(\text{mod }3) \quad ②$$
这里只有以下三种情况.

i $x\equiv -1,y\equiv 0$;

ii $x\equiv 0,y\equiv -1$;

iii $x\equiv 1,y\equiv 1$.

都是mod 3,其他任何(x,y)都不可能满足式②.对于情况 i ,$x=3m-1,y=3n$,代入原等式中可得到
$$(3m-1)^3-3(3m-1)(3n)^2+(3n)^3=2\ 891=9\cdot 321+2$$
显然对于 mod 9 不能成立.情况 ii 的结论也类似.

情况 iii 也不可能成立,因为已经证明如果(x,y)是一个解,则$(y-x,-x)$也是一个解,这样由$(1,1)$推导出$(0,-1)$,这与情况 ii 是一样的.

我们讨论了各种可能情况而得出结论:等式 ② 没有整数解.

证法 2 (1) 设(x_0,y_0)是方程的一个解.令 $x_0=y_0+y_1$,则

$$(y_0+y_1)^3-3(y_0+y_1)y_0^2+y_0^3=n$$

$$y_0^3+3y_0^2y_1+3y_0y_1^2+y_1^3-3y_0^3-3y_1y_0^2+y_0^3=n$$

$$-y_0^3-(-y_0)y_1^2+y_1^3=n$$

所以$(x_1,y_1)=(-y_0,x_0-y_0)$也是方程的解,且$(x_1,y_1)\neq(x_0,y_0)$.事实上,若 $x_1=x_0,y_1=y_0$,则 $-y_0=2y_0$,得 $y_0=0,x=0$,与 n 为正整数矛盾.

再令 $y_0=x_0+x_2$,则有

$$x_0^3-3x_0(x_0+x_2)^2+(x_0+x_2)^3=n$$

$$x_0^3-3x_0^3-6x_0^2x_2-3x_0x_2^2+x_0^3+3x_0^2x_2+3x_0x_2^2+x_2^3=n$$

即

$$x_2^3-3x_2(-x_0)^3+(-x_0)^3=n$$

所以$(x_2,y_2)=(y_0-x_0,-x_0)$也是方程的一个解.

若$(x_2,y_2)=(x_0,y_0)$,则 $y_0=-x_0,x_0=-2x_0$,推出 $x_0=0$,$y_0=0$;

若$(x_2,y_2)=(x_1,y_1)$,则 $y_0-x_0=-y_0,-x_0=x_0-y_0$,仍得 $x_0=0,y_0=0$,均矛盾.

故方程确有 3 组不同的解.

(2) 若有整数 x,y,使

$$x^3-3xy^2+y^3=2\ 891$$

则

$$(x+y)^3=2\ 891+3xy(x+2y)\equiv2\pmod 3$$

因此

$$x+y\equiv2\pmod 3$$

若有 $x\equiv0\pmod 3$ 或 $y\equiv0\pmod 3$,则

$$(x+y)^3\equiv2\ 891\equiv2\pmod 9$$

但

$$(x+y)^3\equiv2^3\equiv8\pmod 9$$

矛盾.若有 $y\equiv1\pmod 3$,则 $x+2y\equiv0\pmod 3$,亦得

$$(x+y)^3\equiv2\ 891\equiv2\pmod 9$$

仍矛盾.

故不存在 x,y,使 $x^3-3xy^2+y^3=2\ 891$.

5 正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC 和 CE 上分别有一点 M 和 N,并且

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$$

若 B,M,N 三点共线,求 r 的值.

荷兰命题

解法 1 如图 23.2 所示,因为 $AC=EC$,从已知比例式中推导出

$$CM=EN,\triangle BMC\cong\triangle DNE$$

这样,$\angle NBC=\angle EDN$.因为 $\angle ECB=90°$,$\angle CED=30°$,所以

$$\angle BND = \angle BNC + \angle CND = (90^\circ - \angle NBC) + (\angle CED + \angle NDE) = 90^\circ - \angle NBC + 30^\circ + \angle NBC = 120^\circ$$

这样，BD 对于点 N 以及六边形外接圆圆心点 O 都成 120° 角. 所以点 N 位于一圆心为 C，半径为 $CD = CB = CN$ 的圆上，在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，$\angle EBC = 60^\circ$，故

$$r = \frac{CN}{CE} = \frac{CB}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

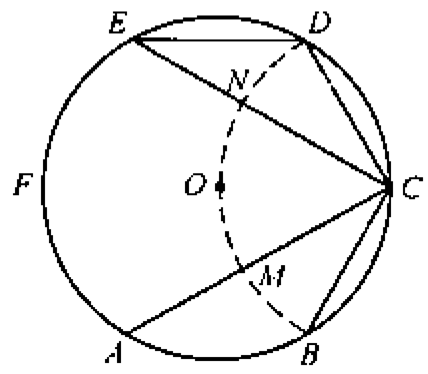


图 23.2

解法 2 设六边形的各边长为 1，点 B，M，N 共线. 令 X 表示 AC 和 BE 的交点，如图 23.3 所示. 因为 N 位于 CE 上，B 位于 EX 上，M 位于 XC 上，可以应用梅涅劳斯(Menelaus)定理于 $\triangle CEX$，有

$$\frac{CN}{NE} \cdot \frac{EB}{BX} \cdot \frac{XM}{MC} = -1$$

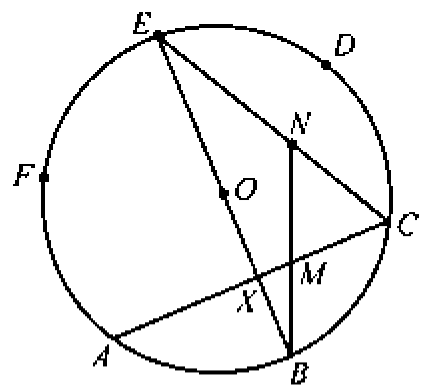


图 23.3

现在将该式子中的各段距离用 r 来表示. CE 为一等腰三角形中与 120° 角相对的一边，其他两边的长度都为 1，所以得到

$$CE = \sqrt{3}, CN = \sqrt{3}r, EB = 2$$

$$BX = -\frac{1}{2}, AM = \sqrt{3}r$$

$$MC = AC - AM = \sqrt{3}(1 - r)$$

$$XM = \frac{\sqrt{3}}{2} - MC = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}r = \sqrt{3}(r - \frac{1}{2})$$

代入梅涅劳斯公式，得

$$\frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}(1 - r)} \cdot \frac{2}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}(r - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}(1 - r)} = -1$$

所以 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法 3 如图 23.4 所示，在 $\triangle BMC$ 和 $\triangle DNE$ 中

$$BC = ED, \angle BCM = \angle DEN = 30^\circ$$

$$AM = rAC = rCE = CN$$

所以，$MC = NE$，因此

$$\triangle BCM \cong \triangle DEN$$

$$\angle BND = \angle BNC + \angle CND = (90^\circ - \angle NBC) + (\angle CED + \angle NDE) = (90^\circ - \angle NBC) + (30^\circ + \angle MBC) = 120^\circ = \angle BOD$$

即 B，O，N，D 四点共圆，圆心为 C. 故

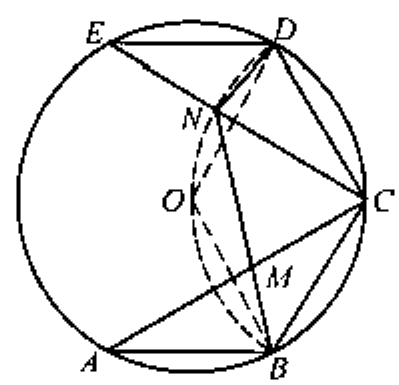


图 23.4

$$r=\frac{CN}{CE}=\frac{CB}{CE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

解法 4 在复平面上考虑问题,也用 $A,B,\cdots$ 表示点 $A,B,\cdots$ 所代表的复数.依定比分点公式有

$$M=(1-r)A+rC$$

$$N=(1-r)C+rE$$

由于 B,M,N 共线,应有

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\B&M&N\\\overline{B}&\overline{M}&\overline{N}\end{vmatrix}=0$$

其中,$\overline{B},\overline{M},\overline{N}$ 分别是 B,M,N 的共轭复数.也就是

$$\begin{vmatrix}1&(1-r)+r&(1-r)+r\\B&(1-r)A+rC&(1-r)C+rE\\\overline{B}&(1-r)\overline{A}+r\overline{C}&(1-r)\overline{C}+r\overline{E}\end{vmatrix}=0$$

得

$$(1-r)^2\begin{vmatrix}1&1&1\\B&A&C\\\overline{B}&\overline{A}&\overline{C}\end{vmatrix}+(1-r)r\begin{vmatrix}1&1&1\\B&A&E\\\overline{B}&\overline{A}&\overline{E}\end{vmatrix}+r^2\begin{vmatrix}1&1&1\\B&C&E\\\overline{B}&\overline{C}&\overline{E}\end{vmatrix}=0$$

注意到 $\triangle BAC,\triangle BAE$ 是同向的,它们与 $\triangle BCE$ 是反向的.其次

$$S_{\triangle BAE}=S_{\triangle BEC}=2S_{\triangle ABC}$$

因此,上式可得方程

$$(1-r)^2+2(1-r)r-2r^2=0$$

化简后得 $$3r^2-1=0$$

解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6 设 S 是一个边长为 100 的正方形,L 为 S 内的一条路径,该路径自身无交点;L 由线段 $A_0A_1,A_1A_2,\cdots,A_{n-1}A_n$ 组成,其中 $A_0\neq A_n$.假设对于 S 边上的任何一点 P,总可以在 L 上找到一个点与点 P 距离不超过 1/2.证明:在 L 上必定存在两点 x,y,它们的距离不大于 1,但它们之间的路径 L 的长度不小于 198.

越南命题

证法 1 将正方形边上一点 P 到多边形路径 L 上一点 Q 之间的距离用 $d(P,Q)$ 表示;将多边形路径上点 A 到点 B 之间的长度用 $s(A,B)$ 表示,当

$$s(A_0,A)<s(A_0,B)$$

我们记为 $A < B$.设 S_1,S_2,S_3,S_4 为正方形的各顶点,在 L 上取点 S'_1,S'_2,S'_3,S'_4 且使得 $d(S_i,S'_i) \leqslant \frac{1}{2}$,并且 $S'_1 < S'_4 < S'_2$(详见后面的"注").

设 L_1 为 L 上所有点 X 的集合,其中 $X \leqslant S'_4$;设 L_2 为所有满足 $X \geqslant S'_4$ 的 L 上的点的集合.考虑边 S_1S_2,S_1S_2 上有一子集 L'_1,其上所有点与 L_1 的距离都小于等于$\frac{1}{2}$;另有一子集 L'_2,其上所有点与 L_1 的距离都小于等于$\frac{1}{2}$(因为 L'_1 包括点 S_1,L'_2 包括点 S_2,故都不是空集).

L'_1 和 L'_2 的并集为 S_1S_2,且由于距离定义,L'_1 和 L'_2 的交集也不是空集.设 M 为 L'_1 与 L'_2 的交集上的一点.

在 L_1 上选一点 X,在 L_2 上选一点 Y,使得

$$d(M,X) \leqslant \frac{1}{2}, d(X,Y) \leqslant \frac{1}{2}$$

那么 $d(X,Y) \leqslant 1$,而且 $X < S'_4 < Y$,且

$$s(X,Y) = s(X,S'_4) + s(S'_4,Y) \geqslant 99 + 99 = 198$$

注 我们可把路径 $L:A_0A_1\cdots A_n$ 看做是以区间$[0,t]$到 L 的一个射影 Q,其中 $Q(0) = A_0$,$Q(1) = A_n$,且 $Q(0) \neq Q(1)$.现从 $Q(0)$ 出发,考虑运动路径 L,首先有一个时刻 t_1,在此时刻前 L 位于离正方形的某一顶点的距离小于 1/2 的部分,记该顶点为 S_1,记路径上的点 $Q(t_1)$ 为 S'_1.将与点 S_1 相对的另一顶点用 S_3 表示.继续沿 L 路径前行直到 L 上的点位于点 S_1 相邻的一正方形顶点的 1/2 距离之内,称该顶点为 S_4,称 L 上的那点为 $S'_4 = Q(t_4)$.S_1 与 S_4 为正方形一边的两端点,它们以 $S_1S_4S_3S_2$ 的顺序表示其四边形的边线.最后 L 必定靠近 S_2,其参数值 $t > t_4$.在 L 上选一点,使它位于离 S_2 的距离小于 1/2 的范围内,这样就完成了这一步骤.

证法 2 如图 23.5 所示,以 S_1,S_2,S_3,S_4 表正方形的顶点.用 $d(P,Q)$ 表示点 P 与 Q 的距离,$s(A,B)$ 表示在 L 折线上的两点 A 与 B 之间部分的长.若 $s(A_0,A) < s(A_0,B)$,则称 A 在 B 之前,记做 $A \prec B$.

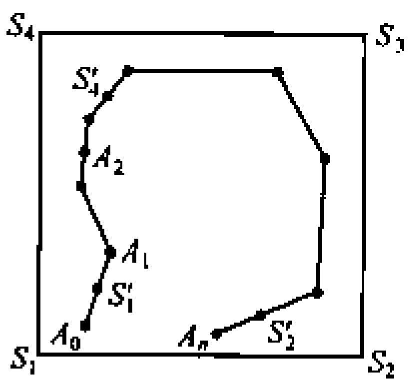


图 23.5

由题设,S_1,S_2,S_3,S_4 在 S 的边界上,故在 L 上有相应的点 S'_1,S'_2,S'_3,S'_4,使得

$$d(S_i,S'_i) \leqslant \frac{1}{2}, i = 1,2,3,4$$

不妨设 $S'_1 \prec S'_4 \prec S'_2$,以 L_1,L_2 分别记 L 上的点集,即

$$L_1 = \{X \mid X \in L, X \prec S'_4\}$$

$$L_2 = \{X \mid X \in L, S'_4 \prec X\}$$

则在 S 的边 S_1S_2 上,有子集 L'_1 与 L'_2,它们分别与 L_1,L_2 中

的某点距离不大于 1/2. 根据题设条件，S_1S_2 上任一点，都能在 L 上找到一点，与此点距离不大于 1/2，易见，$S_1 \in L'_1$，$S_2 \in L'_2$. 且有

$$L'_1 \cup L'_2 = S_1S_2, L'_1 \cap L'_2 \neq \varnothing$$

设 $M \in L'_1 \cap L'_2$，选取 $X \in L_1$，$Y \in L_2$，使得

$$d(M, X) \leqslant \frac{1}{2}, d(M, Y) \leqslant \frac{1}{2}$$

则

$$d(X, Y) \leqslant d(M, X) + d(M, Y) = 1$$

且

$$X < S'_4 < Y$$

故

$$\begin{aligned} s(X, Y) = {} & s(X, S'_4) + s(S'_4, Y) \geqslant \\ & d(X, S'_4) + d(S'_4, Y) \geqslant \\ & (d(S_1, S_4) - d(S_1, X) - d(S_4, S'_4)) + \\ & (d(S_2, S_4) - d(S_2, Y) - d(S_4, S'_4)) \geqslant \\ & (100 - (d(S_1, X) + d(S_4, S'_4))) + \\ & (100 - (d(S_2, Y) + d(S_4, S'_4))) \geqslant \\ & (100 - 1) + (100 - 1) = 198 \end{aligned}$$



埃格尔城市雕塑

第 24 届国际数学奥林匹克

法国，1983

英国命题

1 求所有的函数 f. 该函数定义域为一切正实数，函数值为正实数，并满足下述关系：

(1) $f(xf(y)) = yf(x)$（对于所有的 $x > 0, y > 0$）；

(2) $f(x) \to 0$（当 $x \to \infty$ 时）.

解法 1 我们首先证明 1 在 f 的值域之内. 对于任何 $x_0 > 0$，设

$$y_0 = \frac{1}{f(x_0)}$$

那么由已知的(1)，得出

$$f(x_0f(y_0)) = y_0f(x_0) = 1$$

所以 1 在 f 值域之内（同样可证明任何正实数都在 f 值域之内）. 故存在一值 y，使 $f(y) = 1$. 用这个 y 与(1)中的 $x = 1$ 可得出

$$f(1 \cdot 1) = f(1) = yf(1)$$

因为假定 $f(1) > 0$，得出 $y = 1$，即

$$f(1) = 1$$

在(1)中设 $y = x$ 时，得到

$$f(xf(x)) = xf(x), x > 0 \quad ①$$

因此 $xf(x)$ 为 f 上的不动点. 现设 a, b 为 f 上的不动点，也就是若 $f(a) = a, f(b) = b$. 那么由(1)及 $x = a, y = b$，可得

$$f(ab) = ba$$

则 ab 也是 f 的一不动点. f 的不动点的集合中各元素的乘积也在该集合中. 特别地，若 a 为一不动点，a 的所有非负整数幂都为不动点. 那么由(2)，因 $x \to \infty$ 时，$f(x) \to 0$，则不可能存在大于 1 的不动点. 因 $xf(x)$ 为不动点，对所有 x，推出

$$xf(x) \leqslant 1 \quad 或 \quad f(x) \leqslant \frac{1}{x} \quad ②$$

令 $a = zf(z)$，故 $f(a) = a$.

现在设 $x = \frac{1}{a}, y = a$，代入(1)中方程得

$$f(\frac{1}{a}f(a)) = f(1) = 1 = af(\frac{1}{a})$$

或
$$f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$$

或
$$f(\frac{1}{zf(z)}) = \frac{1}{zf(z)}$$

这就证明了$\frac{1}{xf(x)}(x > 0)$也是f的不动点.因此

$$f(x) \geqslant \frac{1}{x}$$

并且根据式②可得

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad ③$$

函数③为满足假设的惟一解.

解法2 根据题设条件(1)有

$$f(xf(y)) = yf(x) \quad ④$$

在④中令$x = y = 1$,得到

$$f(f(1)) = f(1) \quad ⑤$$

在④中再令$x = 1, y = f(1)$,得到

$$f(f(f(1))) = f(1)f(1) \quad ⑥$$

由⑤知
$$f(f(f(1))) = f(f(1)) = f(1)$$

从而
$$f(1) = f(1)f(1)$$

由$f(1) > 0$,即得

$$f(1) = 1 \quad ⑦$$

下面证明,对一切正实数x,都有

$$xf(x) = 1 \quad ⑧$$

用反证法.若$xf(x) > 1$,在④中令$y = x$,得

$$f(xf(x)) = xf(x)$$

$$xf(x)f(xf(x)) = (xf(x))^2 \quad ⑨$$

将f作用于式⑨的两端,得

$$f((xf(x))^2) = f(xf(x)f(xf(x))) = xf(x)f(xf(x)) = (xf(x))^2$$

反复进行上述过程,可得

$$f((xf(x))^{2n}) = (xf(x))^{2n} \quad ⑩$$

令$n \to \infty$,由条件(2)得式⑩左边趋向0,右边趋向$+\infty$,矛盾.

再设$xf(x) < 1$,在④中令$x = 1$,得

$$f(f(y)) = y \quad ⑪$$

在④中再令$x = \frac{1}{f(y)}$,得

$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{f(y)}f(y)\right)=yf\left(\frac{1}{f(y)}\right)$$

即

$$f\left(\frac{1}{f(y)}\right)=\frac{1}{y} \quad ⑫$$

再用 f 作用于上式的两端,得

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{f(y)}\right)\right)=\frac{1}{f(y)}f(1)=\frac{1}{f(y)} \quad ⑬$$

由 ⑩ 与 ⑬,令 $y=(xf(x))^{2n}$ 有

$$f\left(\frac{1}{(xf(x))^{2n}}\right)=\frac{1}{f((xf(x))^{2n})}=\frac{1}{(xf(x))^{2n}} \quad ⑭$$

令 $n\to\infty$,则左边趋向 0,右边趋向 $+\infty$,矛盾.

因此,对一切正实数 x,都有 $xf(x)=1$,即得

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad ⑮$$

经检验知 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为满足问题条件的惟一解.

2 设共面的两个圆 C_1,C_2,圆心分别为 O_1,O_2,两圆交于两点,A 为其中的一个交点.两圆的一条公切线与 C_1 相切于 P_1,与 C_2 相切于 P_2,另一公切线与 C_1 相切于 Q_1,与 C_2 相切于 Q_2.设 M_1,M_2 分别为 P_1Q_1 与 P_2Q_2 的中点,求证:$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

苏联命题

解 如图 24.1 所示,设 O 为 P_2P_1,Q_2Q_1,O_2O_1 的交点,两圆位似,点 O 为位似中心.设点 B 为两圆的另一交点,T 为 AB 与 P_2P_1 的交点,C 为 OA 与 C_2 的另一交点.因为

$$TA\cdot TB=TP_2^2=TP_1^2$$

TA 为 M_2M_1 的垂直平分线.因此

$$\alpha=\angle AM_1O_1=\angle AM_2O_1=\angle BM_2O_1$$

由位似性,$\alpha=\angle CM_2O_2$,故 M_2,C,B 共线.现由对称性 $\beta=\angle O_2AM_2=\angle O_2BM_2$.从等腰 $\triangle CO_2B$ 得到 $\angle O_2CM_2=\beta$,并由位似性 $\angle O_1AM_1=\beta$.这样,原问题中的两个角都等于 $\beta+\angle M_2AO_1$.

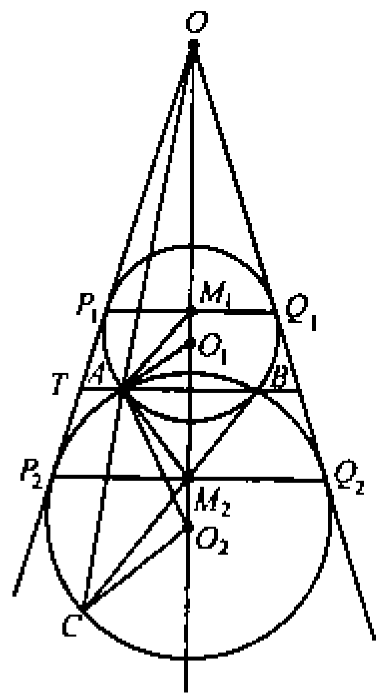


图 24.1

联邦德国命题

3 设 a,b,c 为正整数，这三个数两两互素. 证明：$2abc-ab-bc-ca$ 不能表示为 $xbc+yca+zab$ 形式的整数中最大的一个. 其中，x,y,z 为非负整数.

证法 1 假设 $2abc-ab-bc-ca$ 可表示为 $xbc+yca+zab$ 的形式. 因为 $(a,b)=(a,c)=1$，a 须可整除 $x+1$，因此 $x+1\geqslant a$，类似地 $y+1\geqslant b$，$z+1\geqslant c$. 这样将导致矛盾，即

$$2abc=(x+1)bc+(y+1)ca+(z+1)ab\geqslant$$
$$abc+bca+cab=3abc$$

为证明对任何 $n>2abc-bc-ca-ab$ 可以用

$$xbc+yca+zab,x,y,z\geqslant 0$$

的形式来表示，我们首先解一个简单些的问题，即只有两个互素的自然数 b,c，找出最大的整数 n，使其不能表示为

$$n=u'b+v'c,u'\geqslant 0,v'\geqslant 0$$

为解决这一问题，我们来求所有的不能这样表达的数 m，因为 $(b,c)=1$，每个整数 m 可被表达为 $m=ub+vc$（u,v 为整数），这个表达式并不是惟一的，但其他所有的表达式都具有

$$m=(u-kc)b+(v+kb)c,k\in\mathbf{Z}$$

的形式，在 m 的这些表达式中，存不存在一个表达式，使得

$$u-kc\geqslant 0,v+kb\geqslant 0$$

要确定这一点，取 k 尽可能大，并使 $u-kc\geqslant 0$，如果对于这样的选择 k，$v+kb\geqslant 0$，那么 m 可以被表示为 b,c 的非负系数线性组合. 很清楚，对于最大的选择 k 有

$$0\leqslant u-kc<c$$

令

$$u'=u-kc,v'=v+kb,m=u'b+v'c \qquad ①$$

若 $0\leqslant u'<c$，则称式 ① 为既约表达式.

我们已证明了

ⅰ 每一整数 m 都有一既约表达式；

ⅱ 当且仅当其既约表达式 ① 的 $v'\geqslant 0$ 时，整数 m 可以用非负系数表示.

这就是说不能表示为所要求的形式的数 m 须具有式 ① 的形式，且

$$0\leqslant u'<c,v'<0$$

m 最大时 $\qquad u'=c-1,v'=-1$

故最大值为

$$m=(c-1)b-c=bc-b-c \qquad ②$$

现在回到原先的问题并两次运用上述结论. 因为 $(b,c)=1$，

我们有 $b > 1, c > 1$ 且

$$b(c-1) > c-1$$

或 $$bc - b - c > -1$$

将两数各乘以 $a > 0$，两边都加上 $abc - bc$，得

$$2abc - ab - ac - bc > abc - a - bc$$

若 n 为一整数且

$$n > 2abc - bc - ca - ab \quad ③$$

那么

$$n > abc - a - bc \quad ④$$

该不等式以及 $(a, bc) = 1$ 的事实使得我们可以运用以前的结论（bc 起式 ① 中 b 的作用，a 起 c 的作用），也就是说，n 大到可以表示为

$$n = xbc + pa,\ 0 \leqslant x \leqslant a-1, p > 0 \quad ⑤$$

从式 ⑤ 可得

$$pa = n - xbc \geqslant n - (a-1)bc = n - abc + bc$$

从式 ③ 得 $$n - abc + bc > abc - ab - ac$$

这样 $$pa > abc - ab - ac$$

或 $$p > bc - b - c$$

将我们的解应用于较简单的问题的另一种方式，给出表达式

$$p = yc + zb$$

且整数 $y \geqslant 0, z \geqslant 0$，将这代入式 ⑤，有

$$n = (yc + zb)a + xbc = xbc + yca + zab, x, y, z \geqslant 0$$

此题是 Springen - Verlag, Heidelberg(1982) 第 11 ~ 12 页中，H.L.Keng 所著的《数论导引》中的一个习题. 其中还有一个稍加变化但未解决的问题：若 a, b, c 为正整数且 $(a, b, c) = 1$，求不能以形式 $ax + by + cz$ 表达的最大整数，其中，$x > 0, y > 0, z > 0$.

证法 2 如果有非负整数 x, y, z，使得

$$2abc - bc - ca - ab = xbc + yca + zab$$

则

$$2abc = (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab \quad ⑥$$

便得 $a \mid (x+1)bc$，因 $(a, b) = (a, c) = 1$，所以

$$a \mid (x+1) \quad ⑦$$

因为 $x+1, y+1, z+1, b, c, a$ 均为正整数，由 ⑥ 得

$$2abc > (x+1)bc$$

或 $$2a > x + 1$$

因由 ⑦，$a \mid (x+1)$，只能 $x + 1 = a$.

同理可证：$y + 1 = b, z + 1 = c$. 这时式 ⑥ 变为 $2abc = 3abc$ 或 $2 = 3$，这个矛盾证明了 $2abc - ab - ac - bc$ 不能表示成 $xbc +$

$yca+zab(x,y,z$ 为非负整数$)$ 的形式.

其次,因为$(ab,bc,ca)=1$,不定方程

$$xbc+yca+zab=w \tag{8}$$

对任意的整数 w 有整数解(x,y,z).对于任意的整数 m,n,总有等式

$$xbc+yca+zab=(x+na)bc+(y+mb)ca+(z-nc-mc)ab$$

故总可假定 $a>x\geqslant 0,b>y\geqslant 0$.若 $z<0$,则

$$w=xbc+yca+zab\leqslant(a-1)bc+(b-1)ca-ab=2abc-bc-ca-ab \tag{9}$$

⑨表明当 $w>2abc=bc-ca-ab$ 时,必有 $z\geqslant 0$,故任何一个大于$2abc-bc-ac-ab$ 的正整数w 都可表示成⑧的形式,其中 x,y,z 为非负整数.

综上所述知,$2abc-bc-ca-ab$ 不能表示成 $xbc+yca+zab(x,y,z$ 为非负整数$)$ 的最大整数.

4 设$\triangle ABC$ 为一个等边三角形,ε 为各边AB,BC,CA 上的所有点构成的集合(包括点 A,B 和 C).若把 ε 集合任意分成两个互不相交的子集.证明:至少在其中的一个子集内包含有一个直角三角形的三个顶点.

比利时命题

证法 1 答案是肯定的.如图 24.2 所示,首先在 BC,CA,AB 上各取点 D,E,F,使得

$$BD/DC=CE/EA=AF/FB=2$$

很容易推导出$\triangle AFE,\triangle BDF,\triangle CED$ 的内角各为$60°,30°,90°$.现在假定对 ε 中的点有一种二染色的方法,比如说蓝色与红色,而不存在顶点为同色的直角三角形.点 D,E,F 中的两个必定具有相同的颜色,不妨设 E,F 为红色.那么 $AC-[E]$ 中的任何点必须都为蓝色,即 $AB\cup BC-[A,C]$ 中的任何点 P 都为红色,否则$\triangle APQ$ 将为同种颜色.其中点 Q 为点P 在AC 边上的投影.但这样假设的结果,$\triangle BFD$ 就是同种颜色的,这是矛盾的.所以对 ε 上的点用两种颜色涂色都能有一个顶点为同色的直角三角形.

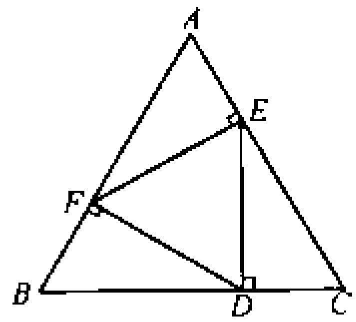


图 24.2

证法 2 在 AB,BC,CA 上分别取三等分点R,P,Q.即 $AR=2RB,BP=2PC,CQ=2QA$.则因 $\angle A=60°,AR=2QA$,所以$\angle AQR=90°$.同理,$\angle BRP=\angle CPQ=90°$.

把 E 分为两个不相交的子集 E_1,E_2,即

$$E_1\cup E_2=E,E_1\cap E_2=\varnothing$$

则 P,Q,R 三点中至少有两点属于同一子集.不妨设 $P,Q\in E_1$.

如果 BC 边上还有 P 以外的点 $D\in E_1$,则 P,Q,D 三点就是一个直角三角形的顶点.

若 BC 上除 P 外,其余的点都属于 E_2,那么只要 AB 上有任一点 F 属于 E_2,则 F 在 BC 上的射影 F' 也属于 E_2,这时 F,F',B 或 F,F',C 都是直角三角形的顶点.若 AB 上的点都属于 E_1,则 Q 在 AB 上的射影 Q' 也属于 E_1,E_1 中的 A,Q,Q' 是一个直角三角形的三顶点.

综上所述,把集合 E 任意地分成两个不相交的子集时,总至少有一个子集中有三点是一个直角三角形的三顶点.

5 证明:是否能找到每一个都不大于 10^5 的 1 983 个互不相同的正整数,并且其中的任何三个数都不会成为某个算术级数的连续的三项?

波兰命题

证法 1　我们构造一个由多于 1 983 个整数组成的集合 T,每个元素都小于 10^5 且任意三个元素都不能构成一算术级数,也就是没有三个元素满足 $x+z=2y$.

集合 T 中包括所有那样的数:它在三进制的表示中,最多可有 11 位且每一位或为 0 或为 1(即没有 2).它们共有 $2^{11}-1>1\ 983$ 个,其最大值为

$$1+3^2+3^3+\cdots+3^{10}=88\ 573<10^5$$

现假定对某 $x,y,z\in T$,有 $x+z=2y$,对任何 $y\in T$,数 $2y$ 的各位只可能是 0 或 2.因此 x 的各位必须与 z 的各位完全相配.即 $x=z=y$.因此集合 T 不包含任何长度为 3 的算术级数,所要求的选择是可能的.

证法 2　易于证明:若 $1,2,\cdots,n$ 中有 k 个自然数

$$a_1<a_3<\cdots<a_k$$

其中任何三项不成等差级数,那么在 $1,2,\cdots,3n$ 中就有 $2k$ 个数,即

$$a_1<a_2<\cdots<a_k<2n+a_1<2n+a_2<\cdots<2n+a_k$$

其中每三项都不成等差级数.

显然在 1,2,3,4,5 五个数中,有四个数 1,2,4,5,其中任何三个都不成等差级数.所以,在前 $5\cdot 3^k$ 个自然数中,可选出 $4\cdot 2^k$ 个数来,使其中任何三个数不成等差级数.取 $k=9$,则因

$$5\cdot 3^9=98\ 415<10^5,4\times 2^9=2\ 408>1\ 983$$

故本题所要求的条件总是可以办到的.

美国命题

6 设 a,b,c 分别为一个三角形三边的边长,证明

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$$

并指出等号成立的条件.

证法 1 在建立三角形不等式时,使用转换式 $a=y+z$,$b=z+x$,$c=x+y$ 常会对解题有所帮助,这里 x,y,z 为任意非负整数.反过来便有

$$x=\frac{1}{2}(b+c-a)=s-a,y=s-b,z=s-c$$

其中,$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,那么对任何三角不等式 $I(a,b,c)\geqslant 0$,有

$$I(a,b,c)\geqslant 0\Leftrightarrow I(y+z,z+x,x+y)\geqslant 0$$

同样,对任何 x,y,z,不等式 $J(x,y,z)\geqslant 0$,有

$$J(x,y,z)\geqslant 0\Leftrightarrow J(s-a,s-b,s-c)\geqslant 0$$

用 x,y,z 来表示的优点是关于三角形各边长度的限制条件

$$b+c>a,c+a>b,a+b>c$$

可以转换为简单的表述:周长的一半减去任何一边都为正值.用 x,y,z 表达时,给定不等式化为

$$xy^3+yz^3+zx^3\geqslant xyz(x+y+z) \quad ①$$

为证明式 ①,应用柯西不等式

$$(xy^3+yz^3+zx^3)(z+x+y)\geqslant(y\sqrt{xyz}+z\sqrt{xyz}+x\sqrt{xyz})^2=xyz(x+y+z)^2$$

当且仅当 $(xy^3,yz^3,zx^3)=k(z,x,y)$ 时,上述等式才能成立.这时 $x=y=z$,即三角形为等边三角形.

证法 2 通过一些代数运算,给出的不等式可写成

$$a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geqslant 0 \quad ②$$

因为 (a,b,c) 的循环置换对于给定的不等式没有影响,不失一般性,我们可以假设 $a\geqslant b$,$a\geqslant c$.因此 $b+c-a$(或 x)和 $a+b-c$(或 z)都大于0,故式②成立.当且仅当 $a=b=c$ 时,等式成立.

在这两种解法中,式 ① 和式 ② 当三角形退化为直线(其中一内角趋近 180°)时等式都成立,而这种情况已在给定条件中排除了.

第 25 届国际数学奥林匹克

捷克斯洛伐克，1984

联邦德国命题

1 证明：$0 \leqslant yz + zx + xy - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$，式中 x, y, z 为非负实数，且 $x + y + z = 1$.

证法 1 因为 x, y, z 为非负数，$x + y + z = 1$，至少有一个数，比方说 $z \leqslant \frac{1}{2}$. 这样，给定的表达式

$$G = yz + zx + xy - 2xyz = z(x + y) + xy(1 - 2z)$$

的各项为非负，其和必也非负. 对 G 的最小值，x, y 中的某一个须为 1，另一个须为 0，这样 $G \geqslant 0$.

根据算术平均及几何平均不等式有

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$$

故
$$(1 - z)^2 = (x + y)^2 \geqslant 4xy$$

所以
$$G - \frac{7}{27} = z(x + y) + xy(1 - 2z) - \frac{7}{27} \leqslant z(1 - z) + \frac{1}{4}(1 - z)^2(1 - 2z) - \frac{7}{27}$$

证法 2 不妨假定 $x \geqslant y \geqslant z$，则

$$x \geqslant \frac{1}{3} \geqslant z, x + y \geqslant \frac{2}{3}$$

$$yz + zx + xy - 2xyz \geqslant yz + zx + xy(1 - 2z) \geqslant xy\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}xy \geqslant 0$$

不等式的左边得证，下证不等式的右边.

令 $x + y = \frac{2}{3} + \theta, z = \frac{1}{3} - \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{3}$，则有

$$xy + yz + zx - 2xyz = z(x + y) + xy(1 - 2z) \leqslant z(x + y) + \left(\frac{x + y}{2}\right)^2(1 - 2z) = \left(\frac{1}{3} - \theta\right)\left(\frac{2}{3} + \theta\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{\theta}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3} + 2\theta\right) = \frac{7}{27} - \frac{\theta^2}{4} + \frac{\theta^3}{2} = \frac{7}{27} - \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \theta\right) \leqslant \frac{7}{27} =$$

$$-\frac{(3z-1)^2(6z+1)}{108}\leqslant 0$$

故 $0\leqslant G\leqslant\frac{7}{27}$. 当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，G 取最大值.

证法 3　因为 $x+y+z=1$，由齐次多项式的性质可知，给定的左边不等式等价于

$$(x+y+z)(yz+zx+xy)\geqslant 2xyz$$

其中，$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$.

这个不等式可以直接从已知的更精确的不等式

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 9 \qquad ①$$

中推出. 式 ① 可以通过对左边的式子应用算术平均及几何平均不等式而推出，且等价于

$$(x+y+z)(yz+zx+xy)\geqslant 9xyz \qquad ②$$

根据基本对称函数

$$T_1=x+y+z, T_2=yz+zx+xy, T_3=xyz$$

式 ② 可化成

$$T_1T_2\geqslant 9T_3$$

给出的右边不等式 $G\leqslant\frac{7}{27}$ 等价于

$$(x+y+z)(yz+zx+xy)-2xyz\leqslant\frac{7}{27}(x+y+z)^3$$

或

$$7T_1^3\geqslant 27T_1T_2-54T_3$$

已知"最佳"的由 T_1^3, T_1T_2, T_3 构成的线性不等式为

$$T_1^3\geqslant 4T_1T_2-9T_3 \qquad ③$$

"最佳"指如果有任何具有下列形式的固定不等式

$$T_1^3\geqslant aT_1T_2-bT_3$$

那么

$$4T_1T_2-9T_3\geqslant aT_1T_2-bT_3$$

特别地

$$4T_1T_2-9T_3\geqslant\frac{27}{7}T_1T_2-\frac{54}{7}T_3$$

这就导致 $T_1T_2\geqslant 9T_3$，得到不等式 ①.

为全面起见，我们建立式 ③. 经过一些代数运算，式 ③ 变成舒尔不等式在 $n=1$ 时的情况.

$$x^n(x-y)(x-z)+y^n(y-z)(y-x)+z^n(z-x)(z-y)\geqslant 0 \qquad ④$$

式 ④ 中 $n\geqslant 0$，x,y,z 为任意实数. 在不失一般性的情况下，我们可以假设 $x\geqslant y\geqslant z$. 那么式 ④ 的不等性可以从两个明显的不等式中导出，即

$$x^n(x-y)(x-z)\geqslant y^n(x-y)(y-z)$$

及

$$z^n(z-x)(z-y)\geqslant 0$$

注　很多选手在这个问题中运用多变量偏微分方法，这使不少评委感到不安．应该指出，微积分方法并不在奥林匹克竞赛的书面大纲之内．尽管偶然的一个竞赛题可以通过微积分求解，但这些问题都可以通过更基本的方法，以更简单的方式求解．当然，因为许多选手都了解微积分且最优化方法又是一标准方法，学生们可以运用它，尤其当他们在那时还看不出其他的基本方法时．但为得满分，选手必须建立各种充分和必要条件．

证法 4　不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$．由于 $x+y+z=1$，所以

$$3z \leqslant x+y+z=1, z \leqslant \frac{1}{3}$$

从而(因为 x, y, z 均非负)

$$2xyz \leqslant \frac{2}{3}xy \leqslant xy$$

于是

$$0 \leqslant yz+zx+xy-2xyz$$

现在来证明题中右边的不等式．我们有

$$2y \leqslant x+y \leqslant x+y+z=1$$

所以 $y \leqslant \frac{1}{2}$，又有

$$3x \geqslant x+y+z=1$$

所以 $x \geqslant \frac{1}{3}$，故

$$\begin{aligned} yz+zx+xy-2xyz &= y(z+x)+zx(1-2y) \leqslant \\ & y(z+x)+zx(1-2y)+ \\ & \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-z\right)(1-2y)= \\ & y(z+x)+\frac{1}{3}\left(x+z-\frac{1}{3}\right)(1-2y)= \\ & y\left(w+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}w(1-2y)= \\ & \frac{1}{3}yw+\frac{1}{3}(y+w) \end{aligned}$$

令

$$w=x+z-\frac{1}{3}$$

显然

$$y+w=y+x+z-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

所以

$$yw \leqslant \frac{1}{4}(y+w)^2=\frac{1}{9}$$

从而

$$yz+zx+xy-2xyz \leqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{27}$$

注　在证右边不等式时，我们采用的是"调整法"．先将 x, z 调整为 $\frac{1}{3}$，$w=x+z-\frac{1}{3}$，这时和 $x+z$ 不变，而 $yz+zx+xy-2xyz$ 的值增大．然后再

将 y, w 均调整为$\frac{1}{3}$.显然这一不等式在(且仅在)$x = y = z = \frac{1}{3}$时,变为等式.

如果用柯西 - 许瓦尔兹(Cauchy-Schwarz) 不等式,易得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geqslant 9$$

去分母得
$$yz + zx + xy \geqslant 9xyz$$
即
$$yz + zx + xy - 9xyz \geqslant 0$$
这比题中左边的不等式强.

证法 5　不妨设

此证法属于赵小云

$$x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0, x + y + z = 1$$

令$f(x, y, z) = yz + zx + xy - 2xyz = (x + z)y + (1 - 2y)xz$

由于
$$1 - 2y = (x - y) + z \geqslant 0$$
易知
$$f(x, y, z) \geqslant 0$$
今证若 $x > z$,则
$$f(x, y, z) < \max_{x+y+z=1} f(x, y, z) \qquad ⑤$$
由于　$f(x - \varepsilon, y, x + \varepsilon) =$

$(x + z)y + (1 - 2y)(x - \varepsilon)(z + \varepsilon) =$

$(x + z)y + (1 - 2y)xz + (1 - 2y)(x - z - \varepsilon)\varepsilon =$

$f(x, y, z) + (1 - 2y)(x - z - \varepsilon)\varepsilon$

当 $x > y$ 或 $z > 0$ 时
$$1 - 2y = (x - y) + z > 0$$
对足够小的正数 ε(如取 $\varepsilon = \frac{x - z}{2}$) 有
$$f(x - \varepsilon, y, z + \varepsilon) > f(x, y, z)$$
当 $x = y$,且 $z = 0$ 时,$1 - 2y = 0$,此时有

$$f(x, y, z) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = f(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}, \varepsilon) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \varepsilon, \varepsilon) <$$
$$f(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon, 2\varepsilon)$$

所以总有
$$f(x, y, z) < \max_{x+y+z=1} f(x, y, z)$$
由已证的结果 ⑤ 可知
$$\max_{x+y+z=1} f(x, y, z) = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$
所以
$$0 \leqslant yz + zx + xy - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

上述证明方法称为**小摄动法**,如果所讨论的极值函数及表达约束条件的函数都是变量的对称函数,则极值往往在各变量相等时达到.对这类问题,上述小摄动法常能奏效.

为了将其从 3 推广到 n,再讨论一下 $n = 4$ 的情况.

若 x_1, x_2, x_3, x_4 是满足 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ 的非负数,则

$$0 \leqslant x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - \frac{3}{2}(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \leqslant \frac{9}{32}$$

证明　不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant 0$,并令

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - \frac{3}{2}(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2(1 - \frac{3}{2}(x_3 + x_4)) + x_1x_3(1 - \frac{3}{2}x_4) + x_1x_4 + x_2x_3(1 - \frac{3}{2}x_4) + x_2x_4 + x_3x_4$$

由

$$1 - \frac{3}{2}(x_3 + x_4)(x_1 - \frac{1}{2}(x_3 + x_2)) + x_2 \geqslant 0$$

易知

$$f(x_1x_2,x_3,x_4) \geqslant 0$$

又因

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 - \frac{3}{2}((x_1 + x_4)x_2x_3 + x_1x_4(x_2 + x_3)) = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3 - \frac{3}{2}x_2x_3) + x_2x_3 + x_1x_4(1 - \frac{3}{2}(x_2 + x_3))$$

若 $x_1 > x_4$,用小摄动法.

$$f(x_1 - \varepsilon,x_2,x_3,x_4 + \varepsilon) - f(x_1,x_2,x_3,x_4) = ((x_1 - x_4 - \varepsilon)\varepsilon)1 - \frac{3}{2}(x_2 + x_3)$$

由

$$1 - \frac{3}{2}(x_2 + x_3) = (x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)) + x_4$$

知,当 $x_1 > \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ 或 $x_4 > 0$ 时,对小正数 ε 有

$$f(x_1 - \varepsilon,x_2,x_3,x_4 + \varepsilon) > f(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

而当 $x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_3$,且 $x_4 = 0$ 时

$$1 - \frac{3}{2}(x_2 + x_3) = 0$$

此时有

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0) = f(\frac{1}{3} - \varepsilon,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\varepsilon) = f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3} - \varepsilon,\varepsilon) < f(\frac{1}{3} - \varepsilon,\frac{1}{3},\frac{1}{3} - \varepsilon,2\varepsilon)$$

综上有 $$f(x_1,x_2,x_3,x_4)\leqslant f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$$

所以 $$0\leqslant f(x_1,x_2,x_3,x_4)\leqslant\frac{9}{32}$$

推广到 n 变量情形，若 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负数，且设

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+\\&x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n-\\&\frac{n-1}{n-2}((x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_1x_2x_n+\\&x_1x_3x_4+x_1x_3x_n+x_1x_{n-1}x_n)+\\&(x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+\cdots+x_2x_3x_n+\\&x_2x_4x_5+\cdots+x_2x_4x_n+\cdots+\\&x_2x_{n-1}x_n)+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)\end{aligned}$$

则有 $$0\leqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

证明 不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 0$，由于

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\\&x_1x_2(1-\frac{n-1}{n-2}\sum_{j=3}^{n}x_j)+x_1x_3(1-\frac{n-1}{n-2}\sum_{j=4}^{n}x_j)+\cdots+\\&x_1x_{n-1}(1-\frac{n-1}{n-2}x_n)+x_1x_n+\\&x_2x_3(1-\frac{n-1}{n-2}\sum_{j=4}^{n}x_j)+x_2x_4(1-\frac{n-1}{n-2}\sum_{j=5}^{n}x_j)+\cdots+\\&x_2x_{n-1}(1-\frac{n-1}{n-2}x_n)x_2x_n+\cdots+\\&x_{n-2}x_{n-1}(1-\frac{n-1}{n-2}x_n)+x_nx_{n-1}\end{aligned}$$

由 $$1-\frac{n-1}{n-2}\sum_{j=3}^{n}x_j=\left(x_1-\frac{1}{n-2}\sum_{j=3}^{n}x_j\right)+x_2\geqslant 0$$

等易知 $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$$

若 $x_1>x_n$，由于

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&(x_1+x_n)\sum_{j=2}^{n-1}x_j+x_1x_n+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=2\\i\neq j}}^{n-1}x_ix_j-\\&\frac{n-1}{n-2}\Big(x_1x_2\sum_{j=2}^{n-1}x_j+\\&\frac{(x_1+x_n)}{2}\sum_{\substack{i,j=2\\i\neq j}}^{n-1}x_ix_j+\frac{1}{3}\sum_{\substack{i,j,k=2\\i\neq j,j\neq k,k\neq i}}^{n-1}x_ix_jx_k\Big)\end{aligned}$$

用小摄动法

$$f(x_1-\varepsilon,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n+\varepsilon)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$$

$$\varepsilon(x_1-x_n-\varepsilon)\left(1-\frac{n-1}{n-2}\sum_{j=2}^{n-1}x_j\right)$$

$$1-\frac{n-1}{n-2}\sum_{j=2}^{n-1}x_j=\left(x_1-\frac{1}{n-2}\sum_{j=2}^{n-1}x_j\right)+x_n$$

当 $x_1>\frac{1}{n-2}\sum_{j=2}^{n-1}x_j$ 或 $x_n>0$ 时

$$1-\frac{n-1}{n-2}\left(1-\sum_{j=2}^{n-1}x_j\right)>0$$

对小正数 ε 有

$$f(x_1-\varepsilon,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n+\varepsilon)>f(x_1,\cdots,x_n)$$

当 $x_1=\frac{1}{n-2}\sum_{j=2}^{n-1}x_j$，且 $x_n=0$ 时，有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f\left(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{1}{n-1},0\right)=$$

$$f\left(\frac{1}{n-1}-\varepsilon,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{1}{n-1},\varepsilon\right)=$$

$$f\left(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{1}{n-1}-\varepsilon,\varepsilon\right)<$$

$$f\left(\frac{1}{n-1}-\varepsilon,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1}-\varepsilon,2\varepsilon\right)$$

所以

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)=$$

$$C_n^2\frac{1}{n^2}-\frac{n-1}{n-2}C_n^3\frac{1}{n^3}=$$

$$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})-\frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})^2=$$

$$\frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

证法6 因为

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$$

所以

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

又据题意，不妨设 $z<\frac{1}{2}$，令

$$x=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta,y=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta,z=\sin^2\beta,0^\circ\leqslant\beta<45^\circ$$

则

$$xy+yz+zx-2xyz=xy(1-z)+z(x+y-xy)=$$

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^6\beta+\sin^2\beta\cdot$$

$$\cos^2\beta(1-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta)\geqslant 0$$

又

$$xy+yz+zx-2xyz=$$

$$xy(1-2z)+z(y+x)=$$

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^4\beta\cdot\cos 2\beta+\frac{1}{4}\sin^22\beta=$$

$$\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cdot\frac{1}{4}(1+\cos 2\beta)^2\cos 2\beta+\frac{1}{4}(1-\cos^2 2\beta)\leqslant$$

$$\frac{1}{16}(1+\cos 2\beta)^2\cos 2\beta+\frac{1}{4}(1-\cos^2 2\beta)=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{32}(2\cos 2\beta(1-\cos 2\beta)(1-\cos 2\beta))\leqslant$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{32}(\frac{2}{3})^3=\frac{7}{27}$$

当且仅当 $\beta=30°$，$\alpha=k\cdot 180°+45°(k\in\mathbf{Z})$ 时，等号成立.

荷兰命题

2 找出一对正整数 a，b，使

(1) $ab(a+b)$ 不能被 7 整除；

(2) $(a+b)^7-a^7-b^7$ 能被 7^7 整除.

解法 1 我们有熟知的不等式

$$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2 \quad ①$$

因 7 不能整除 $(a+b)ab$，我们必须选择 a，b，使得 7^3 除整

$$a^2+ab+b^2$$

即

$$a^2+ab+b^2\equiv 0(\bmod 7^3) \quad ②$$

因为

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \quad ③$$

式③等价于

$$a^3\equiv b^3(\bmod 7^3) \quad ④$$

根据费马定理的欧拉推广，对任何与 n 互素的数 c，有

$$c^{\phi(n)}\equiv 1(\bmod n)$$

这里 $\phi(7^3)=(7-1)7^2=3\cdot 98$

所以 $c^{3\cdot 98}\equiv 1(\bmod 7^3)$（对任何 $c\not\equiv 0(\bmod 7)$）

例如，对于 $c=2$. 设 $b=1$，$a=2^{98}$，那么

$$(2^{98})^3\equiv 1(\bmod 7^3)$$

而且，因为 $2^{98}\equiv 4(\bmod 7)$

$$a+b=2^{98}+1\equiv 5(\bmod 7),a-b=2^{98}-1\equiv 3(\bmod 7)$$

7 不能整除 $ab(a+b)$ 和 $a-b$.

现在 2^{98} 非常大，当然可以化为较小的数($\bmod 7^3=343$)，例如

$$2^{10}=1\ 024=3\cdot 7^3-5,2^{10}\equiv -5(\bmod 7^3),2^{20}\equiv 25(\bmod 7^3)$$

$$2^{40}\equiv 61,2^{80}\equiv -52,2^{90}\equiv -83,2^8\equiv -87,2^{98}\equiv 18(\bmod 7^3)$$

故 $a=18$，$b=1$ 为解.

注 许多选手试图用探索法来求解，其错解如下：首先像如上要求式②成立，并从 $(a+b)^2>a^2+ab+b^2\geqslant 7^3=343$，得出 $a+b>18$，并非常

幸运地从第一种情况 $a+b=19$，求出 a 或 b 等于 18. 若这个问题求的是一组解，这个解法倒是非常好的.

解法 2 $(a+b)^7-a^7-b^7=$

$$7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6=$$
$$7ab(a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^4+b^5)=$$
$$7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)=$$
$$7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$$

因为 $7\nmid ab(a+b), 7^7\mid 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

所以 $$7^3\mid a^2+ab+b^2$$

即 $$343\mid a^2+ab+b^2$$

因为 $$18^2=324<343<361=19^2$$

试取 $a=18$，则令 $343=18^2+18b+b^2$，得 $b=1$. 于是

$$ab=18, a+b=19$$

显然有 $$7\nmid ab(a+b)$$

而 $$7^7\mid(a+b)^7-a^7-b^7$$

用上面的方法不难得出：正整数

$$a=7^3t+18b, b, t\in\mathbf{Z}, t>0$$

和 $$a=7^3t+324b, 7+b, t\in\mathbf{Z}, t\geqslant 0$$

是满足题设条件(1)与(2)的全部整数. 在第一对数中令 $t=0$，$b=1$ 即得我们所举的特例.

注 关于 $a=18, b=1$ 的具体求法如下.

设 $a=7k+a_1, k\in\mathbf{Z}, a_1\in\{1,\pm2,\pm3\}$ 容易知道在 $a_1=-3$ 时，$7\mid a^2+a+1$，并且

$$a^2+a+1=(7k-3)^2+(7k-3)+1=$$
$$7^2k^2-5\times7k+7=7(7k^2-5k+1)$$

于是 ① 成为

$$7^2\mid 7k^2-5k+1 \quad ⑤$$

设 $k=7h+a_2$，h 为整数，$a_2\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$，容易知道在 $a_2=3$ 时

$$7\mid 7k^2-5k+1$$

并且 $$7k^2-5k+1=7(7h+3)^2-5(7h+3)+1=$$
$$7(7h+3)^2-7\times5h-14=$$
$$7((7h+3)^2-5h-2)$$

于是 ⑤ 成为

$$7\mid(7h+3)^2-5h-2=7^2h^2+6\times7h-5h+7$$

于是 $7\mid h$. 令 $h=7l$（l 为非负整数），则

$$k=7^2l+3, a=7^3l+7\times3-3=7^3l+18$$

特别地，取 $l=0$ 得 $a=18$.

罗马尼亚命题

3 平面上有两定点 O 和 A，对平面上除 O 以外的任何点 X，用 $a(X)$ 表示射线 OA 和 OX 之间的角度，该角是 OA 按逆时针方向旋转到 $OX(0 \leq a(X) < 2\pi)$ 得到的．设 $C(X)$ 是以 O 为圆心，以 $OX + a(X)/OX$ 为半径的圆．如果该平面上的每一点都被涂上几种颜色中的一种，证明：平面上存在一点 Y，$a(Y) > 0$，其上的颜色与 $C(Y)$ 圆上的某一点颜色相同．

证法 1 设平面的每一点都被涂上 n 种不同颜色中的一种，那么对于任何点集，可能有 $k \leq n$ 种颜色，总共有

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = 2^n - 1$$

个不同的颜色组合可能出现在点集中．

考虑所有以 O 为圆心，半径小于 1 的同心圆的各点组成的集合．在这些圆中的任何 2^n 个圆中，至少有两个圆，权称为 R 和 S，且有同样的颜色集合．我们将其半径分别定为 r 与 s，且

$$0 < r < s < 1$$

我们称在 R 上有一点 Y，使得圆 $C(Y)$ 的半径为

$$r + \frac{a(Y)}{r}$$

与圆 S 相重叠，也就是

$$r + \frac{a(Y)}{r} = s$$

或
$$a(Y) = r(s - r)$$

很清楚，$0 < r(s - r) < 1$，当点 X 沿 R 按逆时针方向运动时（从线 OA 开始），$\angle AOX$ 的角度在间隔$(0,1)$之间变化．当这个角度达到 $r(s - r)$ 时，X 为所求的 R 上的点 Y，所以 $C(Y) = S$，而且 Y 的颜色在圆 S 上某部位出现．

证法 2 先证明一个结论：

令 $a_0 = \sqrt{8\pi}$，将平面区域 $0 \leq x \leq a_0, 0 \leq y \leq 2\pi$ 内的点都涂上颜色，如果颜色的种数有限，则一定存在 $a \in (0, \sqrt{8\pi})$，在直线 $x = a$ 上与抛物线 $y = x(a - x)$ 上分别有一点(a, b)与$(a, c(a - c))$有相同的颜色，$0 < b < 2\pi, 0 < c < \sqrt{2\pi}$．

事实上，抛物线

$$y = x(\sqrt{8\pi} - x) = -(x - \sqrt{2\pi})^2 + 2\pi$$

上有无限多个点，而只有有限种颜色，必有无限多个点为同色，设为第 1 种颜色，并设这些点的横坐标为 $a_1 > a_2 > \cdots$

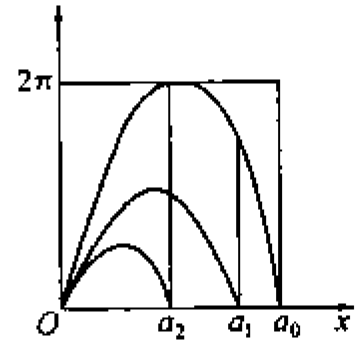


图 25.1

如图 25.1 所示，在抛物线 $y = x(a_1 - x)$ 上，考虑横坐标为 $a_2, a_3, \cdots$ 的点，如果有一点的颜色为第 1 种，那么因直线 $x = a_1$ 有点 $(a_1, a_1(a_0 - a_1))$（即直线 $x = a_1$ 与抛物线 $y = x(a_0 - x)$ 的交点），它的颜色为第 1 种. 结论已经成立. 如果这无限多个点都不是第 1 种颜色，那么必有无限多个点是同一种颜色. 为了不使记号复杂起见，不妨设 $y = x(a_1 - x)$ 上横坐标为 $a_2 > a_3 > \cdots$ 的点都是第 2 种颜色，如此继续，如果颜色只有 n 种，那么进行到第 n 步时，在直线 $y = a_n$ 上将有 n 个点，颜色分别为第 1 种，第 2 种，$\cdots$，第 n 种（这些点就是直线 $x = a_n$ 与抛物线 $y = x(a_i - x)$ 的交点，$i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$）. 这样，在抛物线 $y = x(a_n - x)$ 上任何一点必与上述 n 个点中的某一点同色.

现在回到原问题的证明：我们另取一个坐标平面，考虑其上面满足 $0 \leqslant x, 0 \leqslant y < 2\pi$ 的点所成的区域 G. 令原点与原平面上的点 O 同色，G 中的点 (x_0, y_0) 与原平面上使 $OX = x_0, a(X) = y_0$ 的点 X 同色. 这样就将原平面上的点与 G 的点建立了对应 φ，圆 $C(X)$ 变成了区域 G 内的直线 $x = x_0 + y_0/x_0$ 的一段. 要证明的结论转化为：在 G 内一定有点 (x_0, y_0)，它与直线 $x = x_0 + y_0/x_0$ 上某一点的颜色相同 $(0 < y_0 < 2\pi)$. 或者换一种说法：存在一个数 $a > 0$，在直线 $x = a$ 与抛物线 $y = x(a - x)$（也就是 $a = x + y/x$）上各有一点 (a, b) 与 $(x_0, x_0(a - x_0))$ 同色，其中 $0 < b < 2\pi, 0 < x_0 < a$. 而这是已证明了的结论.

注 完全类似地（而且更简单），如果平面上的点都涂上颜色，而且颜色的种类有限，那么一定能找到一对点 (a, b) 与 (c, a)，它们的颜色相同，并且 $c < a$.

> **4** $ABCD$ 为一凸四边形，其边 CD 与以 AB 为直径的圆相切. 求证：当且仅当 BC 和 AD 两边相互平行时，AB 也与以 CD 为直径的圆相切.

罗马尼亚命题

证法 1 首先考虑两条射线 OL 和 OM，它们构成一锐角且 $\angle\theta = \angle LOM$，再考虑其中一条射线，如 OL 上的两点 E, F，其中 E 在 O 与 F 之间，如图 25.2 所示. 用 $C(E, F)$ 表示直径为 EF 的圆. 那么，由相似性，当且仅当比值 $\frac{EF}{OF} = K(\theta)$ 与 E, F 的选择无关，即对固定的 θ，$K(\theta)$ 为一定值时，$C(E, F)$ 与 OM 相切.

现在考虑这个问题，首先假设 AB 和 CD 不平行. 令 OL, OM 分别为通过 A, B 和 D, C 的射线. 因为 $C(A, B)$ 与 OM 相切，故

$$\frac{AB}{OB}=K(\theta)$$

当且仅当$\frac{DC}{OC}=K(\theta)$时，圆 $C(C,D)$ 与 OL 相切.

这些比式，AB/OB 和 DC/OC，当且仅当 $BC\mathbin{/\!/}AD$ 时才相等.

在 $AB\mathbin{/\!/}CD$ 的情况下，当且仅当 $AB=CD$ 时，圆 $C(C,D)$ 与 AB 相切.而当且仅当 $ABCD$ 为一平行四边形，即当且仅当 BC 和 AD 也平行时，$AB=CD$ 才成立.

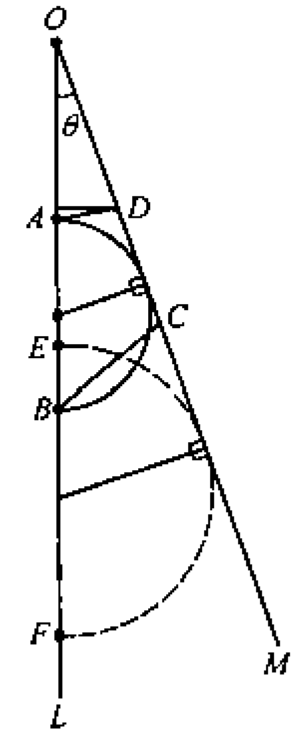


图 25.2

证法 2　设 E,F 分别为 AB,CD 的中点，如图 25.3 所示.如果 $BC\mathbin{/\!/}AD$，则 $EF\mathbin{/\!/}AD$，从而

$$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF} \qquad ①$$

设 E' 与 F' 分别为 E 到 CD 与 F 到 AB 的垂足，则由 ① 得

$$AE\cdot FF'=DF\cdot EE' \qquad ②$$

因为 CD 与以 AB 为直径的圆相切，故必以 E' 为切点，于是

$$EE'=AE(\text{等于圆的半径}) \qquad ③$$

代入式 ②，得

$$FF'=DF \qquad ④$$

故 AB 与以 DC 为直径的圆相切于 F'.

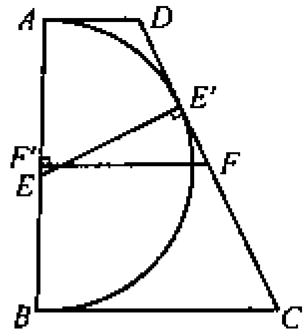


图 25.3

反之，若 AB 与以 CD 为直径的圆相切，则式 ④ 成立.由 ③ 与 ④ 导出式 ② 成立，从而式 ① 成立.于是 A 与 D 到直线 EF 有相等的距离，所以 $AD\mathbin{/\!/}EF$.同理可证 $BC\mathbin{/\!/}EF$，所以 $AD\mathbin{/\!/}BC$.

5 设 d 为平面凸多边形各对角线之和，该多边形有 $n(n>3)$ 个顶点，设 p 为多边形周长.证明

$$n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数值.

蒙古命题

证法 1　考虑凸多边形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$（n 边形），设 A_iA_j 为对角线，由三角不等式

$$A_iA_j+A_{i+1}A_{j+1}>A_iA_{i+1}+A_jA_{j+1}$$

把全部$\frac{1}{2}n(n-3)$条对角线 A_iA_j 所对应这样的不等式相加起来，每条对角线在左边出现两次，每条边在右边出现 $n-3$ 次，所以得到

$$2d>(n-3)p$$

或

$$n-3<\frac{2d}{p}$$

为得到上界，考虑对角线 A_iA_j.因为这是连结 A_i 和 A_j 的最短

路径，它比任何以这两点为端点的多边形路线都短，这样有

$$A_iA_j < A_iA_{i+1} + \cdots + A_{j-1}A_j$$

及

$$A_iA_j < A_jA_{j+1} + \cdots + A_{i-1}A_i$$

若 n 为奇数，比方说 $n = 2k - 1$，对于每个 A_iA_j，任取上述两不等式中右边式子较少项数的一个. 当把这 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 个不等式相加时，我们在左边得到 d，在右边得到各边长度之和，其中每一边都刚好出现 $2 + 3 + \cdots + k - 1 = \frac{1}{2}k(k-1) - 1$ 次. 因此

$$d < \frac{p}{2}(k(k-1) - 2) = \frac{p}{2}\left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} - 2\right)$$

若 n 为偶数，比方说 $n = 2k$，除对角线 A_iA_{i+k} 外再如上运用这些不等式. 对那些 k"直径"运用不等式 $A_iA_{i+k} \leqslant \frac{1}{2}p$，把这 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 个不等式相加，得到

$$d < k \cdot \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p(k(k-1) - 2) = \frac{p}{2}(k(k-1) - 2 + k) =$$

$$\frac{p}{2}(k^2 - 2) = \frac{p}{2}\left(\frac{n^2}{4} - 2\right)$$

最后很容易证明对于偶数 n 有

$$\frac{n^2}{4} = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

对于奇数 n 有

$$\frac{n^2 - 1}{4} = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 因此 d 在各种情况下的上界为

$$d < \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right)$$

证法 2 设多边形的顶点为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 并约定 A_{i+n} 即 A_i. 对角线

$$A_iA_{i+j} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + \cdots + A_{i+j-1}A_{i+j} = \sum_{k=1}^{j} A_{i+k-1}A_{i+k}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n; j = 2, 3, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]$$

当 n 为奇数时，将以上各式加起来，便得

$$d < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k=1}^{j} A_{i+k-1}A_{i+k} = \sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{n} A_{i+k-1}A_{i+k} =$$

$$\sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k=1}^{j} p = \sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]} jp = p\left(\frac{\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)}{2} - 1\right)$$

即 $$\frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)-2=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

当 n 为偶数时,需要注意对角线 $A_iA_{i+\frac{n}{2}}$ 在总和 d 中只能计算一次,因此

$$d < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\sum_{k=1}^{j}A_{i+k-1}A_{i+k}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A_{i+k-1}A_{ik}=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k=1}^{j}A_{i+k-1}A_{i+k}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A_{i+k-1}A_{k}=$$
$$p\left(\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}-1\right)-\frac{1}{2}p\cdot\frac{n}{2}=\frac{1}{2}p\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2-2\right)$$

即 $$\frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

现在证明

$$\frac{2d}{p} > n-3$$

设 A_iA_{i+k} 与 $A_{i+1}A_{i+1+k}$ 相交于 O,我们有

$$A_iA_{i+k}+A_{i+1}A_{i+1+k}=A_iO+OA_{i+1}+OA_{i+k}+OA_{i+1+k}>$$
$$A_iA_{i+1}+A_{i+k}A_{i+k+1}$$
$$i=1,2,\cdots,n;k=2,3,\cdots,n-2$$

将以上各式相加便得

$$2d > (n-3)p$$

6 设 a,b,c,d 为奇数,$0<a<b<c<d$,$ad=bc$.证明:如果 $a+d=2^k$,$b+c=2^m$(k,m 为两整数),那么 $a=1$.

波兰命题

证明 因为 $ad=bc$,所以有

$$a((a+d)-(b+c))=(a-b)(a-c)>0$$

所以 $$2^k=a+d>b+c=2^m$$

因此 $k>m$.因为

$$ad=a(2^k-a)=bc=b(2^m-b)$$

所以 $$b^2-a^2=2^m(b-2^{k-m}a)=(b-a)(b+a)$$

因此 2^m 可整除 $(b-a)(b+a)$.数 $b-a$ 和 $b+a$ 不能同时被 4 整除,因为其和 $2b$ 不能被 4 整除.我们得出结论:其中一个可被 2^{m-1} 整除,将它用 x 表示,那么

$$0<x\leqslant b+a<b+c=2^m$$

所以 $$x=2^{m-1}$$

数 $b+c-x=2^{m-1}$ 或者等于 $c+a$(若 $x=b-a$),或者等于 $c-a$(若 $x=b+a$).若 a,b 有一公约数 d,则 d 须可整除其和(以

及其差),但 x 只可被 2 整除,a,b 为奇数,故 $(a,b)=1$.类似地 $(a,c)=1$,但 a 可整除 bc,所以 $a=1$.

注 再做一些工作我们就可确定满足给定条件的 a,b,c,d.因为

$$b-a<b<\frac{1}{2}(b+c)=2^{m-1}$$

所以 $b-a\neq 2^{m-1}$,因此由上述定义的 x 为 $b+a=2^{m-1}$.因为 $a=1$,知 $b=2^{m-1}-1$,$c=2^m-b=2^{m-1}+1$,最后 $d=bc=2^{2m-2}-1$.

相反地,对任何整数 $m\geqslant 3$,数 $a=1$,$b=2^{m-1}-1$,$c=2^{m-1}+1$,$d=(2^{m-1})^2-1$ 满足所给的条件(其中 $k=2(m-1)$).



布拉格老街

第 26 届国际数学奥林匹克

芬兰，1985

1 某圆的圆心落在四边形 $ABCD$ 的 AB 边上，其他三边与该圆相切，证明

$$AD + BC = AB$$

英国命题

证法 1　如图 26.1 所示，圆心 O 位于 AB 上，点 E,F,G 为切点，将 $\triangle OFC$ 绕点 O 旋转得到 $\triangle OEH$，这里 H 位于直线 AD 上．令 $\theta = \angle OCF = \angle OHE$，那么同样地，$\angle OCG = \theta$.

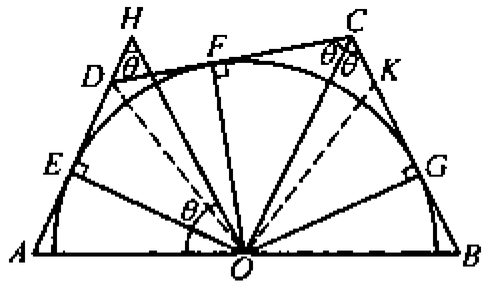


图 26.1

因为四边形 $ABCD$ 内接于一半圆，$\angle AOH = \pi - 2\theta$，所以

$$\angle AOH = \pi - (\theta + \pi - 2\theta) = \theta = \angle AHO$$

因此

$$OA = AH = AE + FC = AE + GC \quad ①$$

用同样的方法，也就是说通过将 $\triangle OFD$ 绕点 O 旋转得到 $\triangle OGK$，K 位于线 BC 上，得到

$$OB = BK = BG + GK = BG + ED \quad ②$$

式 ① 与式 ② 相加，得

$$AB = AD + BC$$

证法 2　如图 26.2 所示，设圆 O 的圆心 O 在凸四边形的边 AB 上，与 BC 相切于 E，与 CD 相切于 F，与 DA 相切于 G. 连结 OE，OC，OF，OD 和 OG. 设 $\angle OAG = \alpha$，$\angle OBE = \beta$，因 A,B,C,D 四点共圆，故有

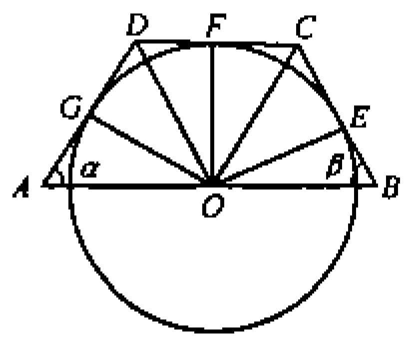


图 26.2

$$\angle DCB = \pi - \alpha, \angle ADC = \pi - \beta$$

又因 OC，OD 分别平分 $\angle DCB$，$\angle ADC$，故

$$\angle ODF = \angle ODG = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$$

$$\angle OCF = \angle OCE = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$$

设圆 O 的半径为 r，则由三角学知

$$OA = \frac{r}{\sin\alpha}, OB = \frac{r}{\sin\beta}$$

$$AG = r \cdot \cot\alpha, BE = r \cdot \cot\beta$$

$$DG = r \cdot \cot\frac{\pi - \beta}{2} = r \cdot \tan\frac{\beta}{2} = r \cdot \frac{1 - \cos\beta}{\sin\beta}$$

$$CE = r \cdot \cot\frac{\pi - \alpha}{2} = r \cdot \tan\frac{\alpha}{2} = r \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

所以
$$AB = OA + OB = \frac{r}{\sin\alpha} + \frac{r}{\sin\beta}$$

$$\begin{aligned} AD + BC &= AG + DG + BE + CE = \\ &(AG + CE) + (DG + BE) = \\ &\left(r \cdot \cot\alpha + r \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \left(r \cdot \cot\beta + r \cdot \frac{1 - \cos\beta}{\sin\beta}\right) = \\ &\frac{r}{\sin\alpha} + \frac{r}{\sin\beta} \end{aligned}$$

从而
$$AB = AD + BC$$

证法 3 如图 26.3 所示，由 $ABCD$ 四点共圆（图中未画此圆）即知 $\angle CDA' = \angle ABB'$，这点使我们发现：作适当的对称变换，图中会出现平行线．由于 AA' 与 BB' 都与圆 O 相切，故有一条直线 OO' 使直线 AA' 与直线 BB' 关于 OO' 对称，作线段 CD 关于 OO' 的对称象 C_1D_1，则 C_1，D_1 分别在 AA' 与 BB' 上且 C_1D_1 亦与圆 O 相切．$C_1D_1 \parallel AB$ 就是前面说的出现的平行线，而且由 $C_1D = CD_1$ 可知

$$AD + BC = AC_1 + BD_1$$

因而转化为求证 $AB = AC_1 + BD_1$．但是 $\angle BOD_1 = \angle OD_1C_1 = \angle BD_1O$，即 $\triangle BOD_1$ 为等腰三角形，故得 $BO = BD_1$．同理可得 $AO = AC_1$．此题获证．

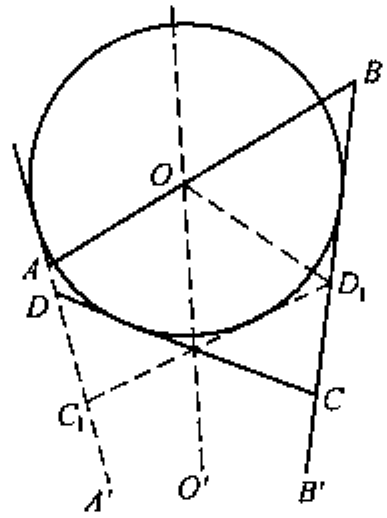


图 26.3

❷ 设 n 与 k 是已知的两个素数，$k < n$．在集合 $M = \{1, 2, \cdots, n - 1\}$ 中的每一个元素都被涂上蓝色或白色，并且

（1）对于所有的 $i \in M$，i 与 $n - i$ 具有同种颜色；

（2）对于所有的 $i \in M$，$i \neq k$，i 与 $|i - k|$ 具有同种颜色，证明 M 中的所有元素都具有同种颜色．

澳大利亚命题

解法 1 要证明所有元素具有同种颜色，我们采用一种方法（它保留了给定的条件），对这些元素进行置换——这种置换不改变元素的颜色．

考虑 k 的前 $n - 1$ 个倍数并且用模 n 简化它们，令

$$m_r \equiv rk(\bmod n), r = 1, 2, \cdots, n - 1$$

因此 $(n, k) = 1$，$rk \neq 0$，且因 $ik \equiv jk(\bmod n)$ 当且仅当 $i = j$ 时成立，集合 $\{m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}\}$ 为 M 的一个排列．

现有

ⅰ 当 $m_{r-1}+k<n$ 时，$m_r=m_{r-1}+k$；

ⅱ 当 $m_{r-1}+k>n$ 时，$m_r=m_{r-1}+k-n$.

在情况 ⅰ 中，m_r 与 $|m_r-k|=m_{r-1}$ 的颜色相同（由(2)）；在情况 ⅱ 中，m_r 与 $|m_r-k|=n-m_{r-1}$ 的颜色相同（由(2)），并由(1)知 $m_r,n-m_{r-1}$ 及 m_{r-1} 的颜色相同.

解法 2　根据欧几里得除法，因 $(n,k)=1$，有

$$\begin{cases} n=m_1k+r_1,0<r_1<k,(k,r_1)=1 \\ k=m_2r_1+r_2,0<r_2<r_1,(r_1,r_2)=1 \\ \vdots \\ r_{i-2}=m_ir_{i-1}+1 \end{cases} \tag{③}$$

用 $x\sim y$ 表示 M 中数 x 与 y 同色. 今任取 $i\in M$，若 $i>k$，则由带余除法，可令

$$i=mk+r,0\leqslant r<k$$

则由条件(2)知

$$i\sim i-k\sim i-2k\sim\cdots\sim i-mk=r$$

所以要证明 M 中的数都同色，只要证明 $1,2,\cdots,k-1,k$ 都同色就可以了. 又因

$$n=m_1k+r_1,0<r_1<k$$

$$k\sim n-k\sim n-2k\sim\cdots\sim n-m_1k=r_1$$

所以要证明 $1,2,\cdots,k$ 都同色，又只要证明集合 $M_1=\{1,2,\cdots,k-1\}$ 中的数都同色就可以了.

因为 $(k,r_1)=1,0<r_1<k$. 不难验证，对于 k,r_1 与集合 $M_1=\{1,2,\cdots,k-1\}$ 来说，仍满足题目中的条件(1)和(2). 即仍然有

ⅰ 任取 $i\in M_1$，i 与 $k-i$ 同色；

ⅱ 任取 $i\in M_1$，且 $i\neq r_1$，则 i 与 $|r_1-i|$ 同色.

我们来证明 ⅰ 与 ⅱ.

任取 $i\in M_1$，则 $i\in M$ 且 $i\neq k$，由(2) $i\sim|k-i|=k-i$. 即 ⅰ 成立.

又任取 $i\in M_1$，若 $i<r_1$，则由条件(1)及已证

$$|r_1-i|=r_1-i\sim n-(r_1-i)=mk+r_1-r_1+i=$$
$$mk+i\sim i$$

即当 $i<r_1$ 时，ⅱ 成立.

若 $i>r_1$，则由(2)有

$$|r_1-i|=i-r_1\sim|k-(i-r_1)|=(k+r_1)-i\sim n-$$
$$((k+r_1)-i)=mk+r_1-k-r_1+i=$$
$$(m-1)k+i\sim i$$

即当 $i > r_1$ 时，ii 也成立. 故 ii 成立.

因此，类似地可以证明，要证 $M_1 = \{1,2,\cdots,k-1\}$ 中的数都同色，又只要证 $M_2 = \{1,2,\cdots,r_1-1\}$ 中的数都同色. 如此继续，最后只要证明数 1 同色就可以了. 这是必然的，从而命题得证.

3 对以所有整数为系数构成的多项式 $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$，用 $w(P)$ 表示该多项式中奇数系数的数目. 对 $i = 0,1,\cdots$，使 $Q_i(x) = (1+x)^i$. 求证：如果 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为整数，并且 $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，那么

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}) \geqslant w(Q_{i_1})$$

荷兰命题

证法 1 首先注意到在 $k = 2^m$ 的特殊情况下，在 $(1+x)^k$ 的二项式扩展中除第一项和最后一项外，其他所有项的系数都为偶数，所以

$$(1+x)^k \equiv 1 + x^k \pmod 2 \quad ①$$

其次，设 R 与 S 表示任意的整系数多项式，且若 $\deg(R) < k$，那么

$$w(R + x^kS) = w(R) + w(S) \quad ②$$

这是因为 R 中各项的 x 的幂次都低于 x^kS 各项的幂次，且三角不等式

$$w(R+S) \leqslant w(R) + w(S)$$

成立，这是因为 R, S 中 x 的同幂次项中的奇系数之和在 $R+S$ 中产生偶系数，而偶系数之和不会产生新的奇系数.

我们将用数学归纳法，来证明所需的结果. 当 $i_n = 0$ 时，结果成立. 当 $i_n = 1$ 时，n 为 2 或 1，结果同样也成立.

现假设 $i_m > 1$，选择 m 使得

$$k = 2^m \leqslant i_n < 2^{m+1}$$

并用 Q 表示 $Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}$，则或 $i_1 < k$，或 $i_1 \geqslant k$.

i 选择 r 使得 $i_r < k \leqslant i_{r+1}$，并令

$$Q = Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_r} + Q_{i_{r+1}} + \cdots + Q_{i_n} = R + (1+x)^kS$$

其中，R 为前 r 个 Q_i 之和，$\deg(R)$ 和 $\deg(S)$ 都小于 k，现在

$$w(Q) = w(R + (1+x^k)S) = w(R + S + x^kS) = w(R+S) + w(S)$$

因为 $R = R + S - S, w(-S) = w(S)$

由三角不等式得

$$w(R) \leqslant w(R+S) + w(S)$$

故 $w(Q) \geqslant w(R)$

由归纳假设，$w(R) \geqslant w(Q_{i_1})$，因此，在情况 i 下有

$$w\left(\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}\right) \geqslant w(Q_{i_1})$$

Ⅱ $i_1 \geqslant k = 2^m$,所以

$$Q_{i_1} = (1+x)^k R, Q = (1+x)^k S$$

因为 $i_n < 2^{m+1}$,$\deg(R)$ 和 $\deg(S)$ 都小于 k,再运用式 ① 和式 ② 得到

$$w(Q) = w(S + x^k S) = 2w(S)$$

由归纳假设,$w(S) \geqslant w(R)$,故

$$w(Q) \geqslant 2w(R) = w(R + x^k R) = w(Q_{i_1})$$

证毕.

证法2　将自然数 i 用二进制表示为

$$i = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots, a_i \in \{0,1\}$$

或将其简记为向量$(a_0, a_1, a_2, \cdots)$,其中只有有限多个 $a_j \neq 0$. 设有两个向量

$$\boldsymbol{k}_1 = (a_0, a_1, a_2, \cdots), \boldsymbol{k}_2 = (b_0, b_1, b_2, \cdots)$$

若对每一个 i,都有 $b_i \leqslant a_i$,则称 $\boldsymbol{k}_2$ 前于 $\boldsymbol{k}_1$,或 $\boldsymbol{k}_1$ 后于 $\boldsymbol{k}_2$,记做 $\boldsymbol{k}_2 \prec \boldsymbol{k}_1$.用 $S(i)$ 表示 i 的"数字和",即

$$S(i) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

则前于 i 的向量恰有 $2^{S(i)}$ 个,根据初等数论,i!中因数2的幂指数为

$$\left[\frac{i}{2}\right] + \left[\frac{i}{2^2}\right] + \cdots = i - S(i)$$

所以 C_i^k 中因数2的幂指数为

$$(i - S(i)) - (k - S(k)) - ((i-k) - S(i-k)) =$$
$$S(k) - S(i) + S(i-k) \geqslant 0$$

最后一步由二进制的加法立即得出.并且由二进制的加法还可以看出等号当且仅当 $k \prec i$ 时成立,故 C_i^k 为奇数的充要条件是 k 前于 i,于是$(1+x)^i$ 中系数 C_i^k 为奇数的个数是前于 i 的向量的个数,也就是 $2^{S(i)}$.

现在考虑

$$Q = (1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \cdots + (1+x)^{i_n}$$

中奇系数的个数,要证明它不小于 $2^{S(i_1)}$.

设 $\boldsymbol{k} = (b_0, b_1, b_2, \cdots) \prec i_1$,如果 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中有奇数个 $j_1 = i_1, j_2, \cdots, j_m (m = 2u-1)$ 在 k 之后,那么 $(1+x)^{i_1}$, $(1+x)^{i_2}, \cdots, (1+x)^{i_n}$ 中有奇数个$(1+x)^{j_1}, (1+x)^{j_2}, \cdots, (1+x)^{j_m}$,它们的展开式中 x^k 的系数 $C_{j}^k (j = 1,2,\cdots,m)$ 是奇数,所以 Q 中 x^k 的系数是奇数.

如果 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中有偶数个在 k 之后，设 $j_1=i_1,j_2,\cdots,j_m$ $(m=2u)$ 在 k 之后，记

$$i_1=(a_0,a_1,a_2,\cdots)$$

将表示 j_t 的向量

$$j_t=(c_0,c_1,c_2,\cdots)$$

中的下标 t 满足 $a_t=1$ 的分量 c_t 删去，得到的向量记为 $j'_t(t=2,3,\cdots,m)$. 考虑这些 j'_t，如果 j'_u 不在其他与之不等的 j_t 之后，则称 j'_u 为极大的. 现在取一个极大的 j'_u，如果 $j'_2,\cdots,j'_m$ 中只有奇数个与 j'_u 相同，那么将 j_u 中的变在 j'_u 时删去的 c_i 换成 k 的分量 b_i，这时得到的向量记为 k'，则 k' 在 $j_1,\cdots,j_m$ 奇数个之后，从而也在 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中奇数个之后，于是在 Q 中 $x^{k'}$ 的系数为奇数.

如果在 $j'_2,\cdots,j'_m$ 中有偶数个与 j'_u 相同，将这偶数个去掉，考虑剩下的向量，如果其中又有偶数个相同的极大向量，再将它们去掉，这样继续下去. 由于 $m-1$ 是奇数，最后总能得到奇数个相同的极大向量. 按照上述的做法得到 k'，k' 在 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中奇数个之后，Q 中 $x^{k'}$ 的系数为奇数.

综上所述，对于 i_1 的每一个在前的 k，在 Q 中有一项 $x^{k'}$（k' 可能与 k 相同，也可能不同），它的系数为奇数，并且不同的 k 所对应的 k' 也不相同. 因此 Q 中奇系数的个数不小于 $2^{S(i_1)}$.

4 已知由 1 985 个互不相同的正整数构成的集合 M，其中的任何一个元素都不能被一个大于 26 的素数整除. 证明：M 中至少包括一个由 4 个互不相同的元素构成的子集，该 4 个元素的积是一个整数的 4 次方幂.

蒙古命题

证明 因为只有 9 个素数小于 26，M 的 1 985 个元素中的任一个数的素数分解中最多只有 9 个不同的素数

$$m=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_9^{k_9},k_i\in\mathbf{Z},k_i\geqslant 0,m\in M \qquad ①$$

对每个 M 中的元素，我们给出一个 9 元素与之对应（即矢量）

$$(x_1,x_2,\cdots,x_9)$$

其中，若式 ① 中 p_i 的指数 k_i 为偶数，$x_i=0$；若 k_i 为奇数，$x_i=1$.

这样可有 2^9 个不同矢量. 根据抽屉原理，任何由 2^9+1 个 M 的元素构成的子集必然包含至少两个不同的整数，比如 a_1 和 b_1，其指数矢量相同. 并可推出其积为完全平方，即 $a_1b_1=c_1^2$.

当我们从集合 M 中去掉这一对数时，还剩下

$$1\ 985-2>2^9+1$$

个数，再次应用抽屉原理，并且再次去掉这样的数对，只要 M 中还剩下多于 2^9+1 个数，就一直进行下去.

因为

$$1\,985 > 3(2^9 + 1) = 1\,539$$

我们可以去掉 $2^9 + 1$ 对数 a_i, b_i，还留有

$$1\,985 - 2(2^9 + 1) = 959 > 2^9 + 1 = 513$$

个数在 M 中.

现在看看那些被去掉的 $2^9 + 1$ 对数并取其积的平方根 c_i，即

$$a_ib_i = c_i^2, c_i = \sqrt{a_ib_i}$$

c_i 除素因子 $p_1p_2\cdots p_q$ 外不可能还有其他素因子，因此至少存在一对 c_i, c_j，其指数矢量相同，且对某整数 d，$c_ic_j = d^2$，可推出对 M 中的某些 a_i, a_j, b_i, b_j 有

$$d^4 = c_i^2c_j^2 = a_ib_ia_jb_j$$

成立.

注　同样道理可推出更普遍的结论：如果 M 的素数因子仅限于 n 个不同的素数，且 M 中包括至少 $3(2^n + 1)$ 个不同元素，那么 M 中有一个由 4 个元素构成的子集，其积为某一整数的 4 次方.

5 以 O 为圆心的圆通过 $\triangle ABC$ 的两顶点 A, C，并与 AB，BC 两边分别相交于 K, N 两点，$\triangle ABC$ 和 $\triangle KBN$ 的外接圆相交于 B, M 两点. 证明：$\angle OMB$ 为直角.

苏联命题

证法 1　如图 26.4 所示，三个圆两两相交，直线 AC，KN 和 BM 是它们的三条根轴. $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心和点 O 都在 AC 的垂直平分线上. 由于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BKN$ 的外接圆交于两个不同的点，因此，$\triangle BKN$ 的外接圆圆心不在此垂直平分线上. 由于可知三条根轴必交于一点 P——称为根心. 它对于三个圆的幂是相等的. 易知，$\angle PMN = \angle BKN = \angle NCA$. 因此，$PMNC$ 是一个圆内接四边形. 由圆幂定理有

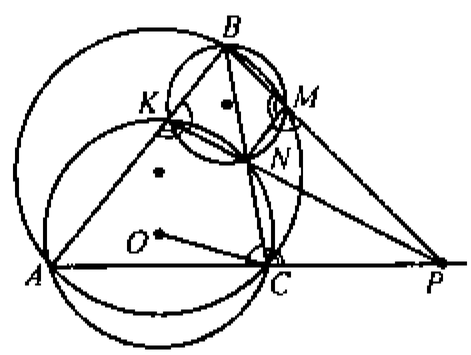


图 26.4

$$BM \cdot BP = BN \cdot BC = BO^2 - r^2 \quad ①$$

$$PM \cdot PB = PN \cdot PK = PO^2 - r^2 \quad ②$$

其中，$r = OC$ 为圆的半径. 由式 ② - ① 得

$$PO^2 - BO^2 = BP(PM - BM) = PM^2 - BM^2 \quad ③$$

即 OM 为 $\triangle OBP$ 的高.

证法 2　先叙述一个关于三角形外心且下面将用到的性质：设 P 是 $\triangle ABC$ 的外心，则

$$\angle PBC = \begin{cases} \pi/2 - \angle A, \angle A \leqslant \pi/2 \\ \angle A - \pi/2, \angle A > \pi/2 \end{cases}$$

证明简单,略.

下面只画出本题有关线段,图 26.5 中是 $\angle A > \pi/2$ 的情形,其他情形证明相同.

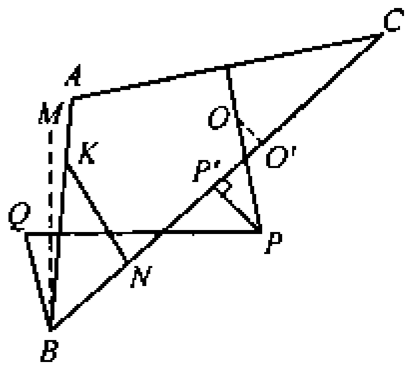


图 26.5

如图 26.5 所示,令 P,Q 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BKN$ 的外心,那么 PQ 是线段 BM 的中垂线.因此,要证 $\angle OMB = 90°$,只要证明 $OM // PQ$ 就可以了,换言之,只要证明点 O 与 B 到直线 PQ 等距离就可以了;对此,能证明 OP 与 BQ 平行且相等就足够了,下面证明此点.

O 与 P 都在线段 AC 的中垂线上,O 与 P 在 BC 上的投影 O' 与 P' 分别为 NC 与 BC 的中点.A,K,N,C 四点共圆说明 $\triangle NBK \backsim \triangle ABC$.设相似比为 λ.再设 $\triangle ABC$ 的三角与所对三边分别为 $\alpha = \angle A$,$\beta = \angle B$,$\gamma = \angle C$ 与 a,b,c.那么马上可算出 OP 与 BC 交角等于 $\pi/2 - \gamma$,且

$$\angle QBN = \angle QBK + \angle KBN = (\alpha - \pi/2) + \beta = \pi/2 - \gamma$$

故知 $OP // BQ$.为计算 OP 先算出

$$O'P' = a/2 - (a - \lambda c)/2 = \lambda c/2$$

于是

$$OP = O'P'/\cos(\pi/2 - \gamma) = \lambda c/(2\sin\gamma) = \lambda \cdot \gamma_1 = \gamma_2 = BQ$$

其中,γ_1 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径,γ_2 为 $\triangle NBK$ 的外接圆半径.

此证法属于仲翔

证法 3　首先 AC,KN,BM 相交于一点 F,如图 26.6 所示,这是一个熟知的结论,可证明如下.

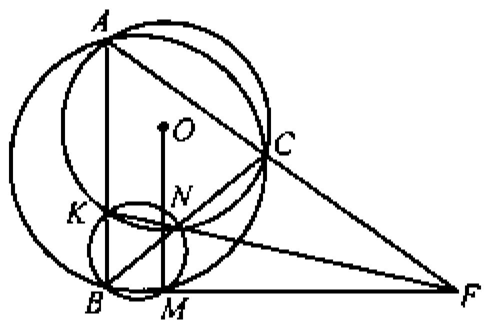


图 26.6

设 AC 与 KN 相交于 F,FB 交圆 KBN 于 B 及另一点 M',则由割线定理

$$FB \times FM' = FN \times FK = FC \times FA$$

所以 M' 在圆 ABC 上,从而 M' 为圆 ABC 与圆 KBN 的交点,即 M' 与 M 重合.

现在我们集中注意圆 O 及有关线段,如图 26.7 所示.这时

$$FM \times FB = FN \times FK = F \text{ 对圆 } O \text{ 的幂}$$

另一方面,由于

$$\angle FMN = \angle BKN = \angle ACB$$

所以 M,N,C,F 四点共圆,从而

$$BM \times BF = BN \times BC = B \text{ 对圆 } O \text{ 的幂}$$

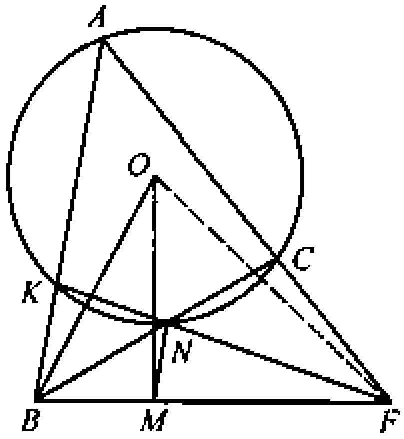


图 26.7

于是

$$\begin{aligned} BO^2 - OF^2 &= (BO^2 + \text{圆 } O \text{ 半径的平方}) - \\ &(OF^2 + \text{圆 } O \text{ 半径的平方}) = (B \text{ 对圆 } O \text{ 的幂}) - \\ &(F \text{ 对圆 } O \text{ 的幂}) = BM \times BF - FM \times BF = \\ &(BM - FM) \times BF = BM^2 - FM^2 \end{aligned}$$

所以 $\angle OMB$ 是直角.

瑞典命题

6 对任一实数 x_1,按以下构成数列 $x_1,x_2,\cdots$

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right), n \geqslant 1$$

证明:存在且只存在一个值 x_1,使得

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1(对所有\ n)$$

证法 1 设 $P_1(x) = x$,定义

$$P_{m+1}(x) = P_n(x)\left(P_n(x) + \frac{1}{n}\right), n = 1,2,\cdots \quad ①$$

从这个递归定义中,可得到

(1)P_n 为 2^{n-1} 次多项式;

(2)P_n 系数为正,且对于 $x \geqslant 0$,是一个凸的上升函数;

(3)$P_n(0) = 0, P_n(1) \geqslant 1$;

(4)$P_n(x_1) = x_n$.

因为条件 $x_{n+1} > x_n$ 等价于

$$x_n > 1 - \frac{1}{n}$$

我们可以将这个题重新组织为:证明存在惟一的正实数 t,满足

$$1 - \frac{1}{n} < P_n(t) < 1(对所有\ n)$$

因为 P_n 是连续的,当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,P_n 值从 0 增大到大于等于 1 的某值.因此存在惟一的 a_n, b_n,使

$$a_n < b_n, P_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n}, P_n(b_n) = 1 \quad ②$$

根据 ① 有

$$P_{n+1}(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

以及 $$P_{n+1}(a_{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

因此

$$a_n < a_{n+1} \quad ③$$

因为 $$P_{n+1}(b_n) = 1 + \frac{1}{n}, P_{n+1}(b_{n+1}) = 1$$

所以

$$b_n > b_{n+1} \quad ④$$

因为 P_n 为凸函数,$P_n(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant b_n$ 上的图形位于弦 $y = \frac{1}{b_n}x$ 之下,从而

$$P_n(x) \leqslant \frac{x}{b_n}, 0 \leqslant x \leqslant b_n$$

特别有
$$P_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{a_n}{b_n}$$

据此及事实 $b_n \leqslant 1$，可发现

$$b_n - \frac{b_n}{n} \leqslant a_n, b_n - a_n \leqslant \frac{b_n}{n} \leqslant \frac{1}{n}(\text{对所有 } n)$$

这样，得到两个有界的无限序列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$. 前者递增，后者递减，$a_n < b_n$，当 n 接近增加时，它们的第 n 个元素之间的差也接近于 0. 从而得出结论：它们都趋向于一共同值 t

$$a_n < t < b_n(\text{对所有 } n)$$

这个值惟一满足

$$1 - \frac{1}{n} < P_m(t) < 1(\text{对所有 } n)$$

证法 2 证明本题需要一条定理：单调有界数列必有极限.

先证惟一性. 如果有这样的 x_1 存在，因

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < 1$$

则数列 $\{x_n\}$ 必有极限 x，在递推公式

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right) \quad ⑤$$

两边取极限便得

$$x = x^2 \quad ⑥$$

由于 $\{x_n\}$ 是递增数列，$x \neq 0$，所以 $x = 1$.

若又有 $0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_n < \cdots < 1$ 满足同样的递推关系，则也有 $x'_n \to 1$. 所以，$x_n - x'_n \to 0$.

注意由式 ⑤ 及 $x_n < x_{n+1}$，可得 $x_n + \frac{1}{n} > 1$，即

$$x_n > 1 - \frac{1}{n} \quad ⑦$$

所以，利用 ⑥ 得

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x'_{n+1}| &= |x_n(x_n + \frac{1}{n}) - x'_n(x'_n + \frac{1}{n})| = \\ &|(x_n - x'_n)(x_n + x'_n + \frac{1}{n})| \geqslant \\ &|x_n - x'_n| \geqslant \cdots \geqslant |x_1 - x'_1| \end{aligned}$$

于是由 $x_n - x'_n \to 0$，得 $x_1 = x'_1$.

现在证明 x_1 的存在性. 对每个自然数 n，如果取

$$x_{n+1} \in (1 - \frac{1}{n+1}, 1)$$

那么由 ⑤ 可得

$$x_n=\frac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+4x_{n+1}}}{2}\in(1-\frac{1}{n},1) \quad ⑧$$

从而可逐步由 ⑤ 求出 $x_n,x_{n-1},\cdots,x_1$,满足

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<1 \quad ⑨$$

及关系 ⑤.并且在 ⑧ 中取 $n=1$ 及 $n=2$,有

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4x_2}}{2}\in\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad ⑩$$

形如 ⑨ 的数列.如果能依关系 ⑤ 推至无穷,并且每一项都大于前一项,且小于 1.那么,x_1 即为所求.否则,就会使下列两种情况之一发生:对某一自然数 m

ⅰ $x_m\geqslant x_{m+1}$;

ⅱ $x_m>1$.

为不使记号复杂,不妨设对每个 $n,m=n+2$.于是对每个自然数 n,存在一个长为 $n+1$ 的数列 ⑨,其中 x_1 是由 x_{n+1} 依公式 ⑤ 逐步确定的,我们把它记为 $x_1^{(n)}$,下面证明 $\{x_1^{(n)}\}$ 有一个收敛子列.

上述两种情况,必有一种对无限多个 n 出现,不妨设均是第一种情况.由递推公式 ⑤ 也就是

$$x_{n+2}\leqslant 1-\frac{1}{n+2}$$

于是
$$x_1^{(n)}<x_1^{(n+1)}$$

(因为后者对应于满足 $x_{n+2}>1-\frac{1}{n+2}$ 的 x_{n+2}),从而 $\{x_1^{(n)}\}$ 递增,而且有界(由于 ⑩),故有极限 x_1 存在.由这个 x_1,可依递推公式 ⑤ 逐步作出 $x_2,x_3,\cdots$.现在证明这个 x_1 即为所求,不然的话将有 m,使得 $x_m\geqslant x_{m+1}$ 或 $x_m>1$.

不妨设有 $x_m\geqslant x_{m+1}$,对这个 m,可取定一个 $n>m$ 并且 $x_1^{(n)}$ 与 x_1 相差很小,从而 $x_m^{(n)}$ 与 x_m,$x_{m+1}^{(n)}$ 与 x_{m+1} 均相差很小,但 $x_m^{(n)}<x_{m+1}^{(n)}$,所以 $x_m\geqslant x_{m+1}$ 不可能成立.同理可证 $x_m>1$ 不可能,于是 x_1 即为所求.

证法 3　首先注意到对任何 n,x_n 是 x_1 的首项系数为 1 的非负系数多项式函数,故在 $x_1\in[0,+\infty)$ 时,x_n 及其导函数 x'_n 都是增函数.以下讨论中总把 x_n 看做定义在 $[0,+\infty)$ 上的 x_1 的函数.

题目要求 $0<x_n<x_{n+1}<1(n=1,2,\cdots)$,即是要求

$$\begin{cases}0<x_n<x_n(x_n+1/n)\\ x_n<1\end{cases},n=1,2,\cdots$$

解得

$$1 - 1/n < x_n < 1, n = 1,2,\cdots \quad ⑪$$

而 $x_n(0) = 0, x_n(1) \geqslant 1$,由 x_n 为增函数知 ⑪ 的解为

$$0 \leqslant a_n < x_1 < b_n \leqslant 1, n = 1,2,\cdots \quad ⑫$$

其中,a_n 与 b_n 分别是 $x_n = 1 - 1/n$ 与 $x_n = 1$ 在 $[0, +\infty)$ 中的解. 本题即是要证使 ⑫ 成立的 x_1 的值存在且惟一. 由 $x_n(b_n) = 1$ 知

$$x_{n+1}(b_n) = x_n(b_n)(x_n(b_n) + 1/n) > 1$$

而 x_{n+1} 为增函数,故 $x_{n+1}(x_1) = 1$ 的解 $b_{n+1} < b_n$. 所以 $b_1, b_2, \cdots$ 是递减序列.

同理得 $a_1, a_2, \cdots$ 是递增序列. 但始终有 $a_n < b_n$,因而 $a_1, a_2, \cdots$ 有极限 a;$b_1, b_2 \cdots$ 有极限 b. 且 $a \leqslant b$. 为使 ⑫ 成立,必须且仅须 $a \leqslant x_1 \leqslant b$,欲证此种 x_1 值存在且惟一,剩下只须指出 $a = b$. 但 $0 \leqslant b - a < b_n - a_n$,所以只须证明 $b_n - a_n \to 0$. 根据中值定理,存在 $\xi \in (a_n, b_n)$ 使

$$(b_n - a_n)x'_n(\xi) = 1 - (1 - 1/n) = 1/n \quad ⑬$$

对 $x'_n(\xi)$ 的值作如下估计. 因

$$x'_n = \left(x_{n-1}\left(x_{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)\right)' = \left(2x_{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)x'_{n-1}$$

$$\xi \in (a_n, b_n) \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$$

故在 $n > 2$ 时恒有

$$2x_{n-1}(\xi) + \frac{1}{n-1} > 2\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n-1} > 1$$

从而

$$x'_n(\xi) > x'_{n-1}(\xi)$$

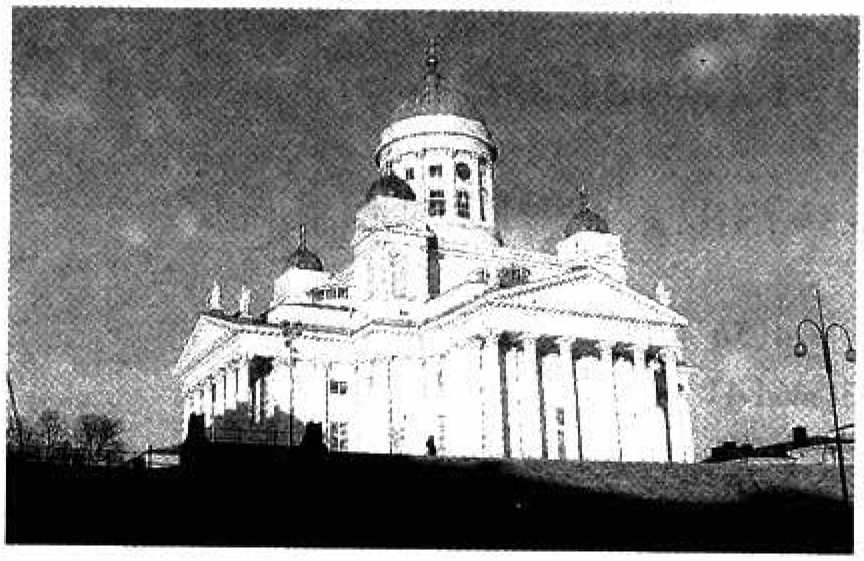
递推得,$n > 2$ 时,因 $\xi > a_n > a_2$,所以

$$x'_n(\xi) > x'_2(\xi) > x'_2(a_2)$$

但 $x'_2(a_2)$ 是正值常数(注意 $a_2 > a_1 \geqslant 0$),回到式 ⑬ 就得

$$0 < b_n - a_n = \frac{1}{x'_n(\xi)} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{x'_2(a_2)} \cdot \frac{1}{n}$$

由此即知 $b_n - a_n \to 0$. 本题全部证完.



芬兰国家图书馆

第 27 届国际数学奥林匹克

波兰,1986

联邦德国命题

1 设正整数 d 不等于 2,5,13. 证明:在集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到两个不同元素 a,b,使 $ab-1$ 不是完全平方数.

证法 1 用反证法. 设有正整数 d,使得

$$2d-1=x^2 \quad ①$$

$$5d-1=y^2 \quad ②$$

$$13d-1=z^2 \quad ③$$

其中,x,y,z 均为整数.

则显然 x 为奇数,于是有

$$x^2=8u+1,d=4u+1$$

即 d 为奇数,从而 y,z 均为偶数.

由 ③ 与 ②,得

$$8d=z^2-y^2=(z-y)(z+y) \quad ④$$

因 y,z 均为偶数,故可令 $y=2y',z=2z'$,代入式 ④,便得

$$2d=(z'-y')(z'+y') \quad ⑤$$

因 $z'-y'$ 与 $z'+y'$ 有相同的奇偶性,必须都为偶数,于是得 d 为偶数,与已证 d 为奇数矛盾. 这个矛盾证明了本题的结论成立.

证法 2 我们证明 $2d-1,5d-1,13d-1$ 中至少有一个不是完全平方数.

(1) 当 $d\equiv 0,2 \pmod 4$,则 $2d-1\equiv 3 \pmod 4$,所以 $2d-1$ 不是平方数.

(2) 当 $d\equiv 1 \pmod 4$,则令 $d=4h+1$,以下分两种情形讨论.

i 若 $h\equiv 1,2 \pmod 4$,则有

$$5d-1=20h+4=4(5h+1)$$

因为 $$5h+1\equiv 2,3 \pmod 4$$

故 $5h+1$ 非平方数,从而 $5d-1$ 非平方数.

ii 若 $h\equiv 0,3 \pmod 4$,则因

$$13d-1=52h+12=4(13h+3)$$

于是 $$13h+3\equiv 3,2 \pmod 4$$

故 $13h+3$ 非平方数,从而 $13d-1$ 非平方数.

(3) 当 $d\equiv 3 \pmod 4$,则

$$5d-1\equiv 2 \pmod 4$$

所以 $5d-1$ 非平方数.

综上所述,不论 d 为何种正整数,$2d-1,5d-1,13d-1$ 中至少有一个非整数的平方,从而命题得证.

2 平面上给定 $\triangle A_1A_2A_3$ 及点 P_0,定义 $A_s=A_{s-3}$,$s\geqslant 4$,构造点列 $P_0,P_1,P_2,\cdots$ 使得 P_{k+1} 为绕中心 A_{k+1} 顺时针旋转 120° 时 P_k 所到达的位置,$k=0,1,2,\cdots$,若 $P_{1\,986}=P_0$,证明:$\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

中国命题

证明 我们利用复数来解此题.令 $u=e^{i\pi/3}$,根据点列 P_0,$P_1,P_2,\cdots$ 的构造,用点同时表示它们在复平面上所代表的复数,则有

$$P_1=(1+u)A_1-uP_0 \quad ①$$

$$P_2=(1+u)A_2-uP_1 \quad ②$$

$$P_3=(1+u)A_3-uP_2 \quad ③$$

①$\times u^2+$②$\times(-u)$ 得

$$P_3=(1+u)(A_3-uA_2+u^2A_1)+P_0=W+P_0$$

W 为与 P_0 无关的常数,同理得

$$P_6=W+P_3=2W+P_0,\cdots$$

终得

$$P_{1\,986}=662W+P_0=P_0$$

故 $W=0$.从而

$$A_3-uA_2+u^2A_1=0$$

由 $u^2=u-1$,得

$$A_3-A_1=(A_2-A_1)u$$

这表明 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

3 正五边形的五个顶点每个对应一个整数,使得这五个整数的和为正.若其中三个相连顶点相应的整数依次为 x,y,z,而中间的 $y<0$,则要进行如下的调整:整数 x,y,z 分别换为 $x+y,-y,z+y$,只要所得的五个整数中至少还有一个为负数时,这种调整就继续进行,问是否这种操作进行有限次以后必定终止.

民主德国命题

解法 1 操作有限次后必定终止.证明如下.

设五个顶点上的数顺次为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5. 构造目标函数

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_5)^2+(x_4-x_1)^2+(x_5-x_2)^2$$

不妨设 $x_1<0$,则 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 在操作后,变为 $-x_1,x_1+x_2,x_3,x_4,x_5+x_1$. 这时,目标函数的改变量为

$$\begin{aligned}&f(-x_1,x_1+x_2,x_3,x_4,x_5+x_1)-f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\\&(-x_1-x_3)^2+(x_1+x_2-x_4)^2+(x_3-x_5-x_1)^2+\\&(x_4+x_1)^2+(x_5-x_2)^2-((x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+\\&(x_3-x_5)^2+(x_4-x_1)^2+(x_5-x_2)^2)=\\&2x_1(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)<0\end{aligned}$$

这表明,每经一次操作,目标函数 f 的值至少要减少 2,但因 f 为整数且 $f\geqslant 0$,故操作只能进行有限次.

解法 2 设五个顶点对应的整数依次为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,构造目标函数

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=&|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|+\\&|x_1+x_2|+|x_2+x_3|+|x_3+x_4|+|x_4+x_5|+|x_5+x_1|+\\&|x_1+x_2+x_3|+|x_2+x_3+x_4|+|x_3+x_4+x_5|+\\&|x_4+x_5+x_1|+|x_5+x_1+x_2|+|x_1+x_2+x_3+x_4|+\\&|x_2+x_3+x_4+x_5|+|x_3+x_4+x_5+x_1|+\\&|x_4+x_5+x_1+x_2|+|x_5+x_1+x_2+x_3|\end{aligned}$$

若 $x_2<0$ 时,按题设就要求作一次操作,这时上述函数变为

$$\begin{aligned}&f(x_1+x_2,-x_2,x_2+x_3,x_4,x_5)=\\&|x_1+x_2|+|x_2|+|x_2+x_3|+|x_4|+|x_5|+\\&|x_1|+|x_3|+|x_2+x_3+x_4|+|x_4+x_5|+|x_5+x_1+x_2|+\\&|x_1+x_2+x_3|+|x_3+x_4|+|x_2+x_3+x_4+x_5|+\\&|x_4+x_5+x_1+x_2|+|x_5+x_1|+|x_1+x_2+x_3+x_4|+\\&|x_3+x_4+x_5|+|x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5|+\\&|x_4+x_5+x_1|+|x_5+x_1+x_2+x_3|\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&f(x_1+x_2,-x_2,x_2+x_3,x_4,x_5)-f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\\&|x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5|-|x_1+x_3+x_4+x_5|=\\&\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5-(x_1+x_3+x_4+x_5)\\-(x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5)-(x_1+x_3+x_4+x_5)\end{cases}=\\&\begin{cases}2x_2\leqslant-2\\-2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\leqslant-2\end{cases}\end{aligned}$$

这意味着,每经一次操作,函数 f 的值严格减少,且减少的值不小

于2. 因为 f 在开始时的值是有限数,所以经过有限次操作必停止.

4 以点 O 为中心的正 n 边形($n > 5$)的两个相邻顶点记为 A,B,$\triangle XYZ$ 与 $\triangle OAB$ 全等,最初令 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle OAB$ 重叠,然后在平面上移动 $\triangle XYZ$,使点 Y 和 Z 都沿着多边形周界移动一周,而点 X 保持在多边形内移动,求 X 的轨迹.

冰岛命题

解法 1 如图 27.1 所示,设 A,B,C 是正 n 边形连续的三个顶点. Y 在 AB 上,Z 在 BC 上,则因

$$\angle YXZ = \angle AOB = \frac{2\pi}{n}, \angle YBZ = \frac{n-2}{n}\pi$$

所以
$$\angle YXZ + \angle YBZ = \pi$$

从而,X,Y,B,Z 四点共圆. 连结 BX,则

$$\angle YBX = \angle YZX = \angle YBO$$

所以,X 在 B 与 O 决定的直线上,而且在 BO 的延长线上.

下面证明:当 Y 与 Z 关于 OB 对称时,即 Y 取 Y_0,Z 取 Z_0 的位置时,OX_0 最大. 设 Y_0Z_0 的中点为 M_0,YZ 的中点为 M,则易知 M 在 $\triangle BY_0Z_0$ 内部,设 XC 与 Y_0Z_0 相交于 N,则

$$XN \leqslant XM = X_0M_0$$

但 $XN \geqslant XM_0$,所以 $XM_0 \leqslant X_0M_0$,即得 $OX_0 \geqslant OX$.

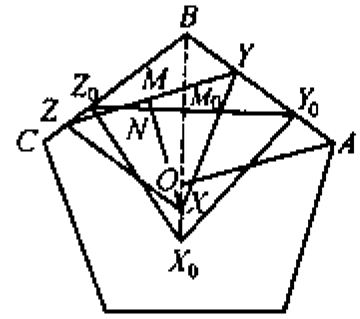


图 27.1

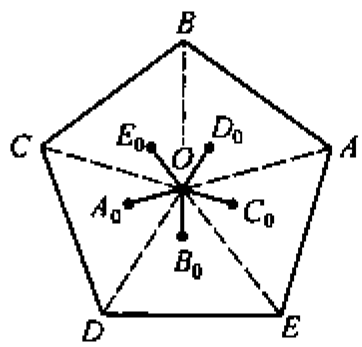


图 27.2

综上所述,并根据对称关系,本题的轨迹是由 n 条以点 O 为中心,分别垂直于多边形的边,长度为 $a\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\Big/\sin\frac{2\pi}{n}$($a$ 为多边形的边长)的 n 条线段组成的"星形",如图 27.2 中的实线段 $OA_0,OB_0,OC_0,\cdots$ 组成的图形.

解法2 将 O 作为复平面的原点. 设 A,B,C 是这正 n 边形连续的三个顶点,并依逆时针方向排列. 设在移动过程中的某一时刻,Y 在线段 AB 上,Z 在线段 BC 上,依定比分点公式得

$$Y = (1-\lambda)A + \lambda B, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$
$$Z = (1-\mu)B + \mu C, 0 \leqslant \mu \leqslant 1$$

令 $t = e^{i2\pi/n}$,于是 $B = tA, C = tB = t^2A$. 显然应有

$$(Y - X)t = Z - X$$

由上式解出 X,得

$$X = \frac{Z - Yt}{1-t} = \frac{1}{1-t}(\mu-\lambda)(C-B) = \frac{1}{1-t}(\mu-\lambda)(tB-B)$$

即
$$X = (\lambda - \mu)B$$

由于 $\lambda-\mu$ 为实数,上式表明点 X 总在 O 与 B 所决定的直线上.其次,由

$$|A|=|Y-X|$$

得出 $$|A|=|(1-\lambda)A+\mu B|=|1-\lambda+\mu t||A|$$

可见 $$|1-\lambda+\mu t|=1$$

由此得 $$1\leqslant|1-\lambda|+|\mu t|=1-\lambda+\mu$$

此即 $\mu\geqslant\lambda$.则可知 X 只能在从 B 到 O 的延长线上移动.由对称性与连续性可知,当线段 YB 与 ZB 等长时,X 离 O 最远,由此可得

$$\lambda+\mu=1$$

或 $$1-\lambda=\mu$$

于是由 $$|1-\lambda+\mu t|=1$$

得 $$\mu|1+t|=1$$

由此解出 $$2\mu=(\cos\frac{\pi}{n})^{-1}$$

从而 X 与 O 的最远距离为

$$(\mu-\lambda)|B|=(2\mu-1)|B|=(1-\cos\frac{\pi}{n})(\cos\frac{\pi}{n})^{-1}|B|$$

用 a 表示正 n 边形之边长,我们有

$$|B|=a(2\sin\frac{\pi}{n})^{-1}$$

从而 X 到 O 的最远距离为

$$a(1-\cos\frac{\pi}{n})(\sin\frac{2\pi}{n})^{-1} \qquad ①$$

由此得出结论:所求轨迹为以 O 为中心的"星形",即从 O 出发,将 O 与每一顶点的连线,向与顶点相反的方向上取线段长如式 ①,见图 27.2.

5 f 为定义在非负实数上的且取非负实数值的函数,求所有满足下列条件的 f:

(1) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$;

(2) $f(2)=0$;

(3) $f(x)\neq 0$,当 $0\leqslant x<2$.

英国命题

解 如果 $u>2$,那么在(1)中取 $y=2,x=u-2$,则有

$$f(u)=f((u-2)+2)=f((u-2)f(2))f(2)=0$$

又由(3)知 $$f(x)=0\Leftrightarrow x\geqslant 2$$

在(1)中,令 $x\geqslant 0,0\leqslant y<2$,则

$$f(xf(y))f(y)=0\Leftrightarrow xf(y)\geqslant 2$$

$$f(x+y)=0\Leftrightarrow x+y\geqslant 2$$

因此,当 $x>0,0\leqslant y<2$ 时,有

$$xf(y) \geqslant 2 \Leftrightarrow x + y \geqslant 2$$

即等价于
$$f(y) \geqslant \frac{2}{x} \Leftrightarrow x \geqslant 2 - y$$
$$f(y) < \frac{2}{x} \Leftrightarrow x < 2 - y$$

固定 y，让 x 从左、右两边趋向于 $2 - y$，由上两式可得
$$f(y) = \frac{2}{2 - y}$$

于是，所求的 f 为
$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{2 - y}, 0 \leqslant y < 2 \\ 0, y \geqslant 2 \end{cases}$$

函数 f 显然满足条件(2)，(3)，下面验证它也满足条件(1)。

对 $x + y$ 与 $xf(y)$ 进行讨论，有且仅有以下四种情况。

i $x + y < 2, xf(y) < 2$. 此时
$$0 \leqslant y < 2, f(y) = \frac{2}{2 - y}$$
$$f(xf(y)) = \frac{2}{2 - xf(y)} = \frac{2}{2 - \frac{2x}{2 - y}} = \frac{2 - y}{2 - (x + y)}$$

所以
$$f(xf(y))f(y) = \frac{2 - y}{2 - (x + y)} \cdot \frac{2}{2 - y} = \frac{2}{2 - (x + y)} = f(x + y)$$

ii $x + y \geqslant 2, xf(y) \geqslant 2$. 此时式(1)两边都等于0，因而相等；

iii $x + y \geqslant 2, xf(y) < 2$. 这时如果 $y < 2$，由
$$xf(y) = \frac{2x}{2 - y} < 2$$
得出 $x + y < 2$ 与所给条件矛盾. 故必 $y \geqslant 2$，这时
$$f(xf(y))f(y) = 0 = f(x + y)$$

iv $x + y < 2, xf(y) \geqslant 2$. 因为此时 $0 \leqslant y < 2$，于是
$$xf(y) = x\left(\frac{2}{2 - y}\right) \geqslant 2$$
即 $x + y \geqslant 2$，这与 $x + y < 2$ 矛盾.

所以，f 确定满足所给的三个条件.

6 平面上有有限个点构成一个集合，其中每个点的坐标为整数，可不可以把此集合中某些点染红色，而其余的点染白色，使得与纵、横坐标轴平行的每一条直线 l 上所包含的红、白点的个数至多相差一个.

民主德国命题

解 可以. 我们用归纳法证明这个结论. 令题设的点集为 A，

它包含 n 个点.为方便计,称平行于横轴的直线为行,平行于纵轴的直线为列.

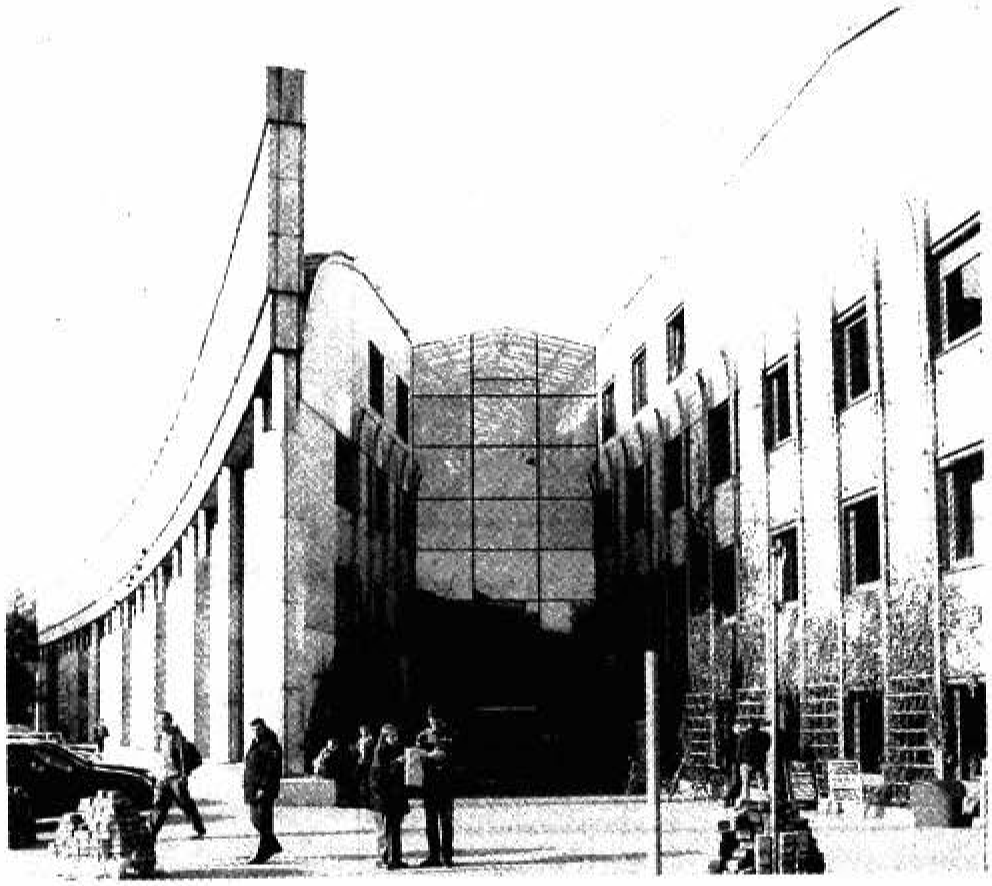
当 $n = 1$,命题的结论显然成立.

设命题的结论当 $n = k$ 时成立,考虑 $n = k + 1$ 的情形.

(1) 设至少有一行(列)包含 A 中奇数个点,不妨设为行 l,删去 l 中的一点 P,$P \in A$,把 A 中余下的 k 个点染色,使之符合题目要求.记点 P 所在的列为 l',若 l' 红白点各一半,则 P 可任意染色;不然,则不妨设 l' 上红点比白点多一个,则把 P 染白即可.至于 P 所在的行 l 上,因除 P 外为偶数个点,必然红白各半,对 P 的染色方法不影响结论的成立.

(2) 设每行每列均包含 A 中偶数个点,任取一点 $P \in A$,设 P 所在的行和列分别为 l 和 l',去掉点 P,把余下的 k 个点染色,使之符合要求.不妨设 l 中红点比白点多一个,则易证 l' 中也必然是红点比白点多一个.事实上,我们把 l 上的点(P 除外)称为 $\overline{A}$ 类,l' 列上的点(P 除外)称为 $\overline{B}$ 类,其余的点称为 $\overline{C}$ 类.因为除 l' 列外,其余各列均为偶数个点(红点与白点各半),故 $\overline{A}$ 类与 $\overline{C}$ 类两类中红点与白点必然各半,今 $\overline{A}$ 类中红点比白点多一个,故 $\overline{C}$ 类中白点比红点多一个.完全类似地可证,除第 l 行,其余各行均有偶数个点,因此,$\overline{B}$ 类与 $\overline{C}$ 类两类中红点与白点也各一半.今 $\overline{C}$ 类中白点比红点多一个,故 $\overline{B}$ 类中红点比白点多一个.这样,我们只要把点 P 染成白色即可.

根据归纳原理,本题要求的结论成立.



华沙大学图书馆

第 28 届国际数学奥林匹克

古巴,1987

1 令 $p_n(k)$ 是集$\{1,2,\cdots,n\}$的保持 k 个点不动的排列的数目.求证

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$$

联邦德国命题

证法 1　对于任意的自然数 n,均有

$$p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) + \cdots + p_n(n) = n! \quad ①$$

记 $p(m)$ 为 m 个数的排列中没有一个数保持不动的排列数,则对于任意的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$,有

$$p_n(k) = C_n^k p(n-k) \quad ②$$

将②代入①,有

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p(n-k) = C_n^0 p(n) + C_n^1 p(n-1) + \cdots + C_n^n p(0) = n!$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p(n-k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p(n-k) =$$

$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k-1!}p(n-k) =$$

$$n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}p((n-1)-(k-1)) =$$

$$n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}p((n-1)-k) = n(n-1)! = n!$$

证法 2　我们用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

假定命题对 $n-1$ 时成立,即有

$$\sum_{k=0}^{n-1} kp_{n-1}(k) = (n-1)!$$

又对自然数 $n-1$,显然有

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k) = (n-1)!$$

考虑自然数 n 的情况:$1,2,\cdots,(n-1),n$ 的任一个保持 k 个数位置不变的排列可以从 $1,2,\cdots,(n-1)$ 的排列按下法得到.

(1) 将 $p_{n-1}(k-1)$ 个保持 $k-1$ 个数不变的排列每一个在最后加上 n,即得 $p_n(k)$ 中的一个排列,这样的排列的个数为

$$p_{n-1}(k-1)$$

(2) 将 $p_{n-1}(k)$ 个保持 k 个数不变的排列的每一个中不在原来位置的 $n-k-1$ 个数中任一个换成 n,并把这个数附在最后做第 n 个,就得到 $p_n(k)$ 中一个排列,这样得的排列个数为

$$C_{n-k-1}^1 p_{n-1}(k) = (n-k-1)p_{n-1}(k)$$

(3) 将 $p_{n-1}(k+1)$ 个保持 $k+1(k \leqslant n-2)$ 个数不变位置的排列中任何一个把原来位置不变的一个数换成 n,并把这个数附在第 n 位,即得 $p_n(k)$ 中的一个排列,这样可得到的排列的个数为

$$C_{k+1}^1 p_{n-1}(k+1) = (k+1)p_{n-1}(k+1)$$

所以

$$p_n(k) = p_{n-1}(k-1) + (n-(k+1))p_{n-1}(k) + (k+1)p_{n-1}(k+1) \quad ③$$

在 ③ 中,顺次令 $k = 0,1,\cdots,n$,并分别乘以 k,便得到

$$0p_n(0) = 0(n-1)p_{n-1}(0) + 0 \cdot 1p_{n-1}(1)$$

$$1p_n(1) = 1p_{n-1}(0) + 1(n-2)p_{n-1}(1) + 1 \cdot 2p_{n-1}(2)$$

$$2p_n(2) = 2p_{n-1}(1) + 2(n-3)p_{n-1}(2) + 2 \cdot 3p_{n-1}(3)$$

$$3p_n(3) = 3p_{n-1}(2) + 3(n-4)p_{n-1}(3) + 3 \cdot 4p_{n-1}(4)$$

$$\vdots$$

$$(n-2)p_n(n-2) = (n-2)p_{n-1}(n-3) + (n-2)(n-(n-1)) \cdot p_{n-1}(n-2) + (n-2)(n-1)p_{n-1}(n-1)$$

$$(n-1)p_n(n-1) = (n-1)p_{n-1}(n-2) + (n-1)(n-2)p_{n-1}(n-1)$$

$$np_n(n) = np_{n-1}(n-1)$$

把以上各式相加,即得

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p_{n-1}(k) + \sum_{k=0}^{n-1}k(n-k-1)p_{n-1}(k) + \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)kp_{n-1}(k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}((k+1) + k(n-k+1) + (k-1)k)p_{n-1}(k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(kn-k+1)p_{n-1}(k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)kp_{n-1}(k)+\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-1}(k)=$$
$$(n-1)(n-1)!+(n-1)!=n!$$

证法 3 把概率技术应用到组合问题有时是很有效的. 我们只限于最简单的概率模型. 设 S 是一有限集合, $A\subseteq S$ A 的概率 (probability) 是 $\mathrm{Prob}(A)=|A|/|S|$. 特别是对每个 $\sigma\in S$, $\mathrm{Prob}(\{\sigma\})=1/|S|$. 设 $X:S\to R$ 是一个函数. 在这我们称 X 是一个随机变量 (random variable). X 的平均 (average) 或期望值 (expected value) 由下式给出, 即

$$E(X)=\frac{1}{|S|}\sum_{\sigma\in S}X(\sigma)$$

也许期望值最有用的性质是它的线性性 (linearity), 即

$$E(cX)=cE(X)$$

及 $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$

X 的 k 阶矩 (moment) 定义为 $\mu_k=E(X^k)$, k 阶阶乘矩 (factorial moment) 定义为 $E_k(X)=E(X^k)$. 在许多重要的应用中

$$X=X_1+\cdots+X_n$$

其中, X_i 是某子集 $P_i\subseteq S$ 的特征函数 (charateristic function), 即 X_i 满足: 如果 $\sigma\in P_i$, 则 $X_i(\sigma)=1$; 如果 $\sigma\notin P_i$, 则 $X_i(\sigma)=0$. 那么 $E(X_i)=\mathrm{Prob}(P_i)$. X 的 k 阶阶乘矩为

$$E_k(X)=\frac{k!}{|S|}\sum_{\sigma\in S}\binom{X(\sigma)}{k} \qquad ④$$

$$E_k(X)=\frac{k!}{|S|}\sum_{[n]^k}\sum_{\sigma\in S}X_{i_1}(\sigma)X_{i_2}(\sigma)\cdots X_{i_k}(\sigma) \qquad ⑤$$

在 ⑤ 中外层的和是对 $[n]$ 的所有的 k 元求和. 要说明 ④ 与 ⑤ 相等, 只须注意恰好属于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 中 r 个集合的元素 $\sigma\in S$ 对每个和的贡献是 $\binom{r}{k}$.

令 S_n 表示 $[n]$ 的所有的排列 π 组成的集合, X_i 是集合 $\{\pi\mid\pi(i)=i\}$ 的特征函数. 那么

$$\sum_{k=0}^{n}kp_n(k)=\sum_{\pi\in S_n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\pi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi\in S_n}X_i(\pi)=n(n-1)!=n!$$

用概率的语言, $E(X)=1$, 其中 $X(\pi)$ 是 π 的不动点数; 随机排列的不动点的期望值是 1.

2 锐角$\triangle ABC$的顶点A的内角平分线交BC边于L,又交三角形的外接圆于N;过L分别作AB和AC边的垂线LK和LM,垂足是K和M,求证:四边形$AKNM$的面积等于$\triangle ABC$的面积.

苏联命题

证明 如图28.1所示,设$\varphi=\frac{1}{2}\angle A$,则

$$AK=AM=AL\cdot\cos\varphi$$

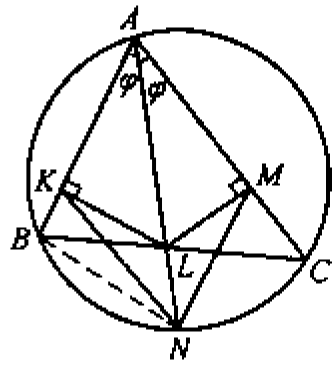


图28.1

于是$\triangle AKN\cong\triangle AMN$,所以

$$S_{AKNM}=2S_{\triangle AKN}=AK\cdot AN\cdot\sin\varphi=$$
$$AL\cdot AN\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}AL\cdot AN\cdot\sin A \quad ①$$
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A \quad ②$$

连结BN,在$\triangle ABN$和$\triangle ALC$内,有$\angle BAN=\angle LAC$,$\angle BNA=\angle LCA$,所以,$\triangle ABN\backsim\triangle ALC$.从而有

$$AB:AL=AN:AC$$

即

$$AB\cdot AC=AL\cdot AN \quad ③$$

由①,②,③即知

$$S_{AKNM}=S_{\triangle ABC}$$

3 令$x_1,x_2,\cdots,x_n$是实数,满足条件$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,求证:对于每一整数$k\geqslant 2$,存在不全为0的整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,对于所有的整数$i$使得$|a_i|\leqslant k-1$,并且有

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

联邦德国命题

证明 由柯西不等式得

$$(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^2\leqslant$$
$$(1^2+1^2+\cdots+1^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=n$$

即得 $$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant\sqrt{n}$$

所以,当$0\leqslant a_i\leqslant k-1$时,我们有

$$a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|\leqslant$$
$$(k-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\leqslant(k-1)\sqrt{n}$$

把区间$[0,(k-1)\sqrt{n}]$等分成k^n-1个小区间,每个小区间的长度为$(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$.由于每一个a_i只能在$0,1,\cdots,k-1$这k个整数中取值.因此

$$a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|$$

共能取 k^n 个正数值，因此必有二数会落在同一个小区间之内，设它们分别是 $\sum_{i=1}^{n}a'_i|x_i|$ 与 $\sum_{i=1}^{n}a''_i|x_i|$，因此有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(a'_i-a''_i)|x_i|\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1} \qquad ①$$

显然，对 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$|a'_i-a''_i|\leqslant k-1$$

现在取

$$a_i=\begin{cases}a'_i-a''_i, x_i\geqslant 0\\ a''_i-a'_i, x_i<0\end{cases}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n$. 于是式 ① 可表示为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

其中，a_i 为整数，适合 $|a_i|\leqslant k-1$，$i=1,2,\cdots,n$.

4 求证：不存在这样一个函数 $f:N_0\to N_0$，$N_0=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，使得对于任何 $n\in\mathbf{N}$.

$$f(f(n))=n+1\ 987$$

成立.

越南命题

证明 如果存在这样的函数，则

$$f(n+1\ 987)=f(f(f(n)))=f(n)+1\ 987 \qquad ①$$

对于所有的 $n\in N_0$ 成立.

利用数学归纳法可以证明：对任意的 $n,k\in N_0$，有

$$f(n+1\ 987k)=f(n)+1\ 987k \qquad ②$$

因为当 $k=1$ 时，式 ① 已保证 ② 成立. 假定

$$f(n+1\ 987(k-1))=f(n)+1\ 987(k-1)$$

则

$$\begin{aligned}f(n+1\ 987k)&=f((n+1\ 987(k-1))+1\ 987)=\\&f(n+1\ 987(k-1))+1\ 987=\\&f(n)+1\ 987(k-1)+1\ 987=\\&f(n)+1\ 987k\end{aligned}$$

设 $r\in N_0$，且 $r\leqslant 1\ 986$，并令

$$f(r)=1\ 987k+l \qquad ③$$

其中，$l,k\in N_0$，$l\leqslant 1\ 986$.

根据定义，有

$$f(f(r))=r+1\ 987$$

又

$$f(f(r))=f(1\ 987k+l)=f(l)+1\ 987k$$

即得

$$r + 1\,987 = f(l) + 1\,987k \quad ④$$

由 $r \leqslant 1\,986$ 知 $k = 0$ 或 $k = 1$.

若 $k = 1$,则由式③和式④有

$$f(r) = 1\,987 + l$$

$$f(l) = r < 1\,987 + l$$

所以

$$r \neq l \quad ⑤$$

若 $k = 0$,则由③与④得

$$f(r) = l, f(l) = r + 1\,987 > l$$

仍有 $r \neq l$,即式⑤普遍成立.

因此,数集 $\{0,1,2,\cdots,1\,986\}$ 中的数总是两两配对,使得

$$f(l) = r, f(r) = 1\,987 + l$$

或

$$f(r) = l, f(l) = 1\,987 + r$$

而且 $r \neq l$.但是数集 $\{0,1,2,\cdots,1\,986\}$ 中一共有 1 987 个数,两两配对后总有一对数相同,与 $r \neq l$ 矛盾.因此题目中要求的函数不存在.

5 证明:对于任意的自然数 $n \geqslant 3$,在欧氏平面上存在一个含 n 个点的集,使得每一对点之间的距离是无理数,并且每三点构成一个非退化三角形,具有有理面积.

民主德国命题

证法 1 如图 28.2 所示,设 O 是圆心,在圆周上顺次取 n 个点 $P_i(i = 1,2,\cdots,n)$,记 $\varphi_i = \angle P_iOP_{i+1}$,且 $\angle P_iOP_{i+1}$ 为正.设圆的半径为 r.

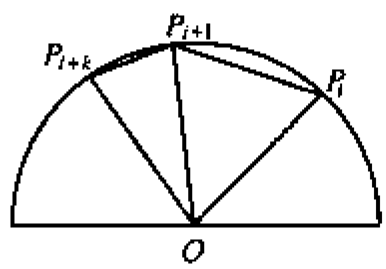


图 28.2

计算同半圆上 P_i 与 P_{i+k} 的距离为 $d_{i,i+k}$.显然有

$$d_{i,i+k} = 2r \cdot \sin\left(\sum_{j=i}^{i+k-1} \frac{\varphi_i}{2}\right) = rD_{i,i+k} \quad ①$$

根据加法定理,若所有的 $\sin\frac{\varphi_i}{2}$ 与 $\cos\frac{\varphi_i}{2}$ 都是有理数,则式①中的

$$D_{i,i+k} = 2\sin\left(\sum_{j=i}^{i+k-1} \frac{\varphi_i}{2}\right) \quad ②$$

也是有理数.

设 a 是一个有理数,因为

$$\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2 = 1 \quad ③$$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{2a}{a^2+1} = 0 \quad ④$$

由于式④,对于每一个正数 $\delta > 0$,存在有理数 a,使

$$0 < \frac{2a}{a^2+1} < \delta \quad ⑤$$

因为 $y = \sin x$ 是连续函数，根据式③，对每个有理数 a 都有一个角 x，使 $\sin x = \frac{2a}{a^2+1}$. 由于在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，$y = \sin x$ 严格单调，故相当小的非负数 $\frac{2a}{a^2+1}$ 所对应的角 x 是一个相当小的正数.

当 $\sin x = \frac{2a}{a^2+1}$ 时，根据式③，如果 $\sin x$ 是有理数，则 $\cos x$ 也是有理数. 今选择 $\delta = \sin\frac{\pi}{2(n+1)}$，则根据上述推导，可得

$$0 < x < \frac{\pi}{2n+1} \tag{6}$$

使得 $\sin x$ 与 $\cos x$ 都是有理数.

今取

$$\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varphi_2}{2} = \cdots = \frac{\varphi_n}{2} = x$$

则因

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i}{2} = nx = n\frac{\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$

故有 $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i < \pi$，即 n 个点都在同一半圆上.

根据式②和 φ_i 的取法，易知 $D_{i,i+k}$ 为有理数，故取 $r = \sqrt{2}$，则由①，任意两点间的距离

$$d_{i,i+k} = \sqrt{2}D_{i,i+k} = \text{无理数}$$

但 $\triangle OP_iP_{i+k}$ 的面积 $S_{i,i+k}$ 为

$$S_{i,i+k} = \frac{1}{2}\mid OP_i\mid\mid OP_{i+k}\mid\sin\angle P_iOP_{i+k} = \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\sum_{j=i}^{i+k-1}\varphi_j\right) = \sin\left(\sum_{j=i}^{i+k-1}\varphi_j\right)$$

因 $\sin\frac{\varphi_i}{2}$ 与 $\cos\frac{\varphi_i}{2}$ 为有理数，故 $\sin\varphi_j$ 为有理数，$\cos\varphi_j$ 为有理数，从而 $\sin\left(\sum_{j=i}^{i+k-1}\varphi_j\right)$ 为有理数，即 $S_{i,i+k}$ 为有理数.

于是，对于任意的三点 $P_i, P_{i+j}, P_{i+k}(j < k)$，它们所构成的 $\triangle P_iP_{i+j}P_{i+k}$ 的面积

$$S = S_{i,i+j} + S_{i+j,i+k} - S_{i,i+k}$$

为三个有理数之代数和，必为一有理数.

故本题的结论是肯定的.

证法 2 在抛物线 $y = x^2$ 上取点列 $\{P_i\}$，即

$$P_i(i\sqrt[3]{2}, i^2\sqrt[3]{4}), i = 1,2,\cdots,n$$

则显然 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 中任何三点都不在同一直线上.

其中任两点的距离 d_{ij} 为

$$d_{ij} = |P_iP_j| = \sqrt{(i\sqrt[3]{2} - j\sqrt[3]{2})^2 + (i^2\sqrt[3]{4} - j^2\sqrt[3]{4})^2} = \sqrt{(i-j)^2\sqrt[3]{4} + 2(i^2 - j^2)^2\sqrt[3]{2}} \quad ⑦$$

易见 d_{ij} 为一无理数.

又任意三点 P_i, P_j, P_k 所成的 $\triangle P_iP_jP_k$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i\sqrt[3]{2} & j\sqrt[3]{2} & k\sqrt[3]{2} \\ i^2\sqrt[3]{4} & j^2\sqrt[3]{4} & k^2\sqrt[3]{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & j & k \\ i^2 & j^2 & k^2 \end{vmatrix} = (j-i)k^2 + (k-j)i^2 + (i-k)j^2$$

S 显然为一有理数.

故本题的结论是成立的.

6 已知 $n > 2$,求证:如果 $k^2 + k + n$ 对于整数 k,$0 \leqslant k \leqslant \sqrt{n/3}$,都是素数,则 $k^2 + k + n$ 对于所有整数 k,$0 \leqslant k \leqslant n - 2$,都是素数.

苏联命题

证法 1　用反证法.若本题结论不成立,则存在满足 $\sqrt{n/3} < x \leqslant n - 2$ 的整数使 $x^2 + x + n$ 为合数,不妨设其最小的数为 k,即

$$k^2 + k + n = \alpha\beta \quad ①$$

其中,α 是 $k^2 + k + n$ 的最小素因子.因为 $k > \sqrt{n/3}$,$n^2 < 3k^2$,所以

$$\alpha\beta = k^2 + k + n < 4k^2 + k < 2k(2k + 1)$$

所以 $\alpha \leqslant 2k$,又当 $k = 0$ 时,n 为素数,因此,α 与 k 互质,所以 $\alpha < 2k$ 且 $\alpha \neq k$.又因

$$k^2 + k + n \leqslant (n-2)^2 + (n-2) + n = n^2 - 2n + 2 < n^2$$

所以,$\alpha < n$.

现在分两种情况讨论.

ⅰ 若 $\alpha < k$,令 $k = p\alpha + t$,此处 p, t 为正整数,$1 \leqslant t \leqslant \alpha$.则

$$n + k^2 + k = n + (p\alpha + t)^2 + (p\alpha + t) = n + t^2 + t + \alpha(p^2\alpha + 2pt + p) = \alpha\beta$$

或
$$\alpha\beta - \alpha(p^2\alpha + 2pt + p) = n + t^2 + t$$

即
$$n + t^2 + t = \alpha(\beta - p^2\alpha - 2pt - p) = \alpha\beta_1$$

若 $\beta_1 = 1$,则 $n + t^2 + t = \alpha$,与 $\alpha < n$ 矛盾.若 $\beta_1 > 1$,则因 $t < \alpha < k$,与 k 的最小性定义矛盾.

ⅱ 若 $k < \alpha < 2k$,不妨设 $\alpha = k + t$,$1 \leqslant t \leqslant k - 1$.则

$$n + k^2 + k = n + (\alpha - t)^2 + (\alpha - t) = \alpha\beta$$
$$\alpha\beta = (n + t^2 - t) + \alpha(\alpha - 2t + 1)$$

或 $$n + (t-1)^2 + (t-1) = \alpha(\beta + 2t - \alpha - 1)$$

因为 $\alpha \leqslant \beta, t \geqslant 1$,故

$$\beta + 2t - \alpha - 1 \geqslant 1$$

若 $\beta + 2t - \alpha - 1 > 1$,则 $n + (t-1)^2 + (t-1)$ 为一合数,因 $0 < t-1 < k$,与 k 的最小性的定义矛盾.

若 $\beta + 2t - \alpha - 1 = 1$,则 $t = 1, \beta = \alpha$.这时式①变为

$$n + (\alpha-1)^2 + (\alpha-1) = \alpha^2$$

或 $$n = \alpha$$

与 $\alpha < n$ 矛盾.

综上所述,知当 $[\sqrt{n/3}] < k \leqslant n-2$ 时,$k^2 + k + n$ 恒为素数,又由题设条件,已有当 $0 \leqslant k \leqslant [\sqrt{n/3}]$ 时,$n + k^2 + k$ 为素数.因此,对一切满足 $0 \leqslant k \leqslant n-2$ 的 k,$n + k^2 + k$ 都是素数.

证法 2　若本题结论不成立.则有满足条件 $\sqrt{n/3} < x \leqslant n-2$ 的正整数存在,使得 $x^2 + x + n$ 为合数,不妨设其最小者为 x,则

$$x^2 + x + n = \alpha\beta$$

其中,$1 < \alpha \leqslant \beta$,$\alpha$ 是 $x^2 + x + n$ 的最小质因子.

因为 $\sqrt{n/3} < x$,所以 $n < 3x^2$,从而

$$x^2 + x + n < 4x^2 + x < 2x(2x+1)$$

所以 $\alpha \leqslant 2x$.因为

$$(x^2 + x + n) - (k^2 + k + n) = (x-k)(x+k+1)$$

顺次令 $k = 0,1,2,\cdots,x-1$,则得

$$x - k = 1,2,\cdots,x$$

$$x + k + 1 = x+1, x+2, \cdots, 2x$$

因为 $\alpha \leqslant 2x$,故必存在某一个 k,使 $\alpha = x - k$ 或 $\alpha = x + k + 1$,总之有

$$\alpha \mid (x-k)(x+k+1) = (x^2 + x + n) - (k^2 + k + n)$$

因为 $\alpha \mid x^2 + x + n$,而 $k^2 + k + n$ 为素数,必然

$$\alpha = k^2 + k + n$$

但 $$x - k \leqslant n - 2 < n + k + k^2 = \alpha$$

$$x + k + 1 \leqslant (n-2) + k + 1 < n + k + k^2 = \alpha$$

与 $\alpha \mid (x-k)(x+k+1)$ 矛盾.

这个矛盾证明了不存在满足 $\sqrt{n/3} < x \leqslant n-2$ 的 x,使 $x^2 + x + n$ 为合数.故本题结论成立.

第 29 届国际数学奥林匹克

澳大利亚,1988

1 考虑平面上半径为 R 和 $r(R > r)$ 的两个同心圆.设 P 是小圆圆周上的一个固定的点,B 是大圆圆周上的动点.直线 BP 交大圆周于另一点 C.过 P 与 BP 垂直的直线 l 与小圆周交于另一点 A(如果 l 与小圆相切于 P,则 $A = P$).

(1) 求 $BC^2 + CA^2 + AB^2$ 的取值的集合;

(2) 求线段 AB 中点的轨迹.

卢森堡命题

此解法属于杨晓兰

解法 1 (1)令 $I = BC^2 + CA^2 + AB^2$,来求 I 取值的集合.我们逐一分析图 29.1 ~ 29.4 的情形.

在图 29.1 的情形,因 B,P,O 共线,$A = P$,有

$$BC^2 = 4R^2, AB^2 = (R - r)^2, AC^2 = (R + r)^2$$

于是 $$I = 4R^2 + (R - r)^2 + (R + r)^2 = 6R^2 + 2r^2$$

在图 29.3 的情形,因 BP 与 OP 垂直,A,O,P 共线并且 BP 与小圆相切.这时有

$$AB^2 = CA^2 = BP^2 + 4r^2, BC^2 = 4BP^2, BP^2 = R^2 - r^2$$

于是 $$I = 6BP^2 + 8r^2 = 6R^2 + 2r^2$$

在图 29.2 或图 29.4 的一般情形(见图 29.4),设 D 为 BC 与小圆周的另一交点.因 BP 与 AP 垂直,A,O,D 共线,即 AD 为小圆的直径.又此时明显有 $BD = CP$.令 $PD = a, BD = CP = b$,我们有

$$AB^2 = BP^2 + AP^2 = (a + b)^2 + AD^2 - PD^2 = 4r^2 + 2ab + b^2$$

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 = AD^2 - PD^2 + PC^2 = 4r^2 - a^2 + b^2$$

$$BC^2 = (a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$$

于是 $$I = 8r^2 + 6ab + 6b^2 = 8r^2 + 6b(a + b)$$

作 BH 与小圆相切,设切点为 H.有

$$BH^2 = BD \cdot BP = b(a + b)$$

又显然有 $BH^2 = R^2 - r^2$,于是

$$R^2 - r^2 = b(a + b)$$

代入上式得 $$I = 8r^2 + 6(R^2 - r^2) = 6R^2 + 2r^2$$

因此,对于所有的情形都有 $I = 6R^2 + 2r^2$,即 I 所取值的集合为 $\{6R^2 + 2r^2\}$.

分析 设两同心圆的圆心为 O,OP 延长线与大圆的交点为 E.设想动点 B 由 E 出发在大圆周上沿逆时针方向旋转.图 29.1 ~ 29.4 画出了当 B 在上半圆周运动到各种不同位置时的图形.其中图 29.1 表示 $B = E$ 的情形,这时 $A = P$;图 29.3 是 BP 与 OP 垂直时的情形;图 29.2 和图 29.4 是一般情形.当 B 运动到下半圆周时,虽然图中并未画出,但由于点 B 和点 C 的位置是对称的,我们可在上述诸图中对调 B,C 两点的位置以得到相应的图形.在所有这些图中,我们以 G 表示 OP 的中点,M 和 M_1 分别表示 AB 和 AC 的中点.

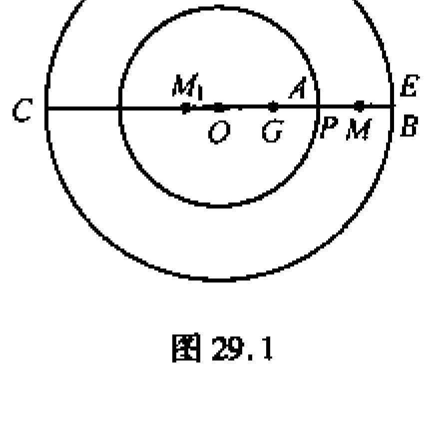


图 29.1

(2) 为求 AB 中点 M 的轨迹，首先我们注意到当 B 在大圆周上变动时，M 与 OP 中点 G 的距离 MG 是个常量，它等于 $R/2$. 为证明这点，我们只考虑图 29.4 中的一般情形，其他简单的情形留给读者.

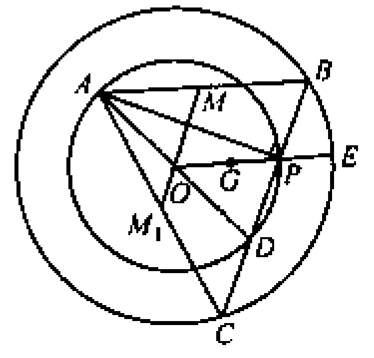


图 29.2

在图 29.4 中连结 MO 和 M_1O. 因 M,O,M_1 分别为 AB,AD,AC 的中点，有 $MO\parallel BC,M_1O\parallel BC$，从而 M,O,M_1 共线. 于是 $\angle AOM_1=\angle ADC$. 因 $AP\perp BC$，有 $AP\perp M_1O$，于是 $\angle AOM_1=\angle POM_1$. 由此得 $\angle POM_1=\angle ADC$，又得 $\angle ADB=\angle MOG$. 考虑 $\triangle MOG$ 和 $\triangle BDO$. 由

$$OG=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}OD,OM=\frac{1}{2}BD,\angle ADB=\angle MOG$$

得 $\triangle MOG\backsim\triangle BDO$，且相似比为 $\frac{1}{2}$. 这就得到了 $MG=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}R$.

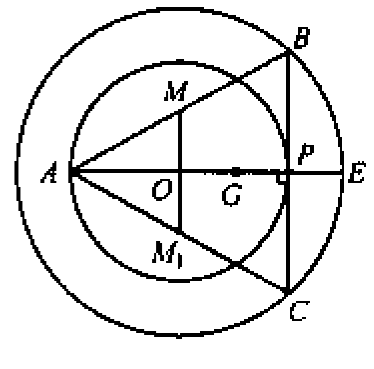


图 29.3

至此我们已经可以看出，AB 中点 M 的轨迹应为以 G 为圆心，$R/2$ 为半径的一个圆. 事实上，刚才已经证明，AB 中点 M 一定在这个圆上；另一方面，当 B 从点 E 出发沿大圆周转一圈时，$\angle BPE$ 由 $0°$ 连续变到 $360°$，同时 $\angle MOG$ 也由 $0°$ 连续变到 $360°$，因此 M 的轨迹为整个圆周(更详细的证明留给读者).

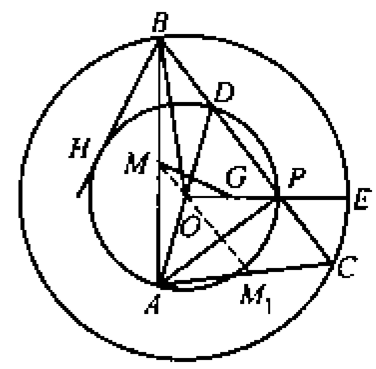


图 29.4

解法 2 (1) 如图 29.5 所示，设两圆的圆心为 O，直线 BC 交小圆周于另一点 D，设 E 是 BC 的中点，则 E 也是 DP 的中点，且 $OE\perp BC$.

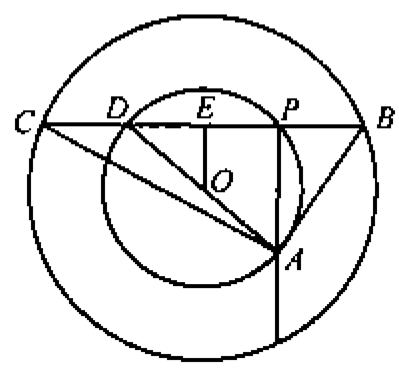


图 29.5

因为 $AP\perp BD$，所以 AD 是小圆的直径.

又因 E 是 PD 中点，所以 $OE=\frac{1}{2}AP$. 根据勾股定理有

$$AB^2=AP^2+PB^2 \quad ①$$

$$AC^2=AP^2+PC^2 \quad ②$$

$$BC^2=(2BE)^2=4BE^2=4(OB^2-OE^2)=4R^2-4OE^2 \quad ③$$

又

$$\begin{aligned}PB^2+PC^2=&(BE\pm PE)^2+(CE\mp PE)^2=\\&(BE+PE)^2+(BE-PE)^2=\\&2BE^2+2PE^2=2(R^2-OE^2)+\\&2(r^2-OE^2)=2R^2+2r^2-4OE^2\end{aligned} \quad ④$$

又

$$AP^2=4OE^2 \quad ⑤$$

由①,②,③,④,⑤诸式得

$$BC^2+CA^2+AB^2=6R^2+2r^2 \quad ⑥$$

(2) 如图29.6所示,设 OP 的中点为 O',AB 的中点为 M,由三角形的中线定理,得知在 $\triangle OAB$ 内

$$OM^2=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2)-AM^2 \quad ⑦$$

在 $\triangle MPO$ 内

$$O'M^2=\frac{1}{2}(OM^2+PM^2)-O'P^2 \quad ⑧$$

因为 PM 是 Rt$\triangle APB$ 斜边 AB 上的中线,所以

$$PM^2=AM^2 \quad ⑨$$

将⑦,⑨代入⑧,并注意到

$$OA=r,OB=R,O'P=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}r$$

就有
$$O'M^2=\frac{1}{4}R^2$$

即
$$O'M=\frac{1}{2}R$$

所以,AB 的中点的轨迹是以 OP 的中点 O' 为圆心,$R/2$ 为半径的圆.

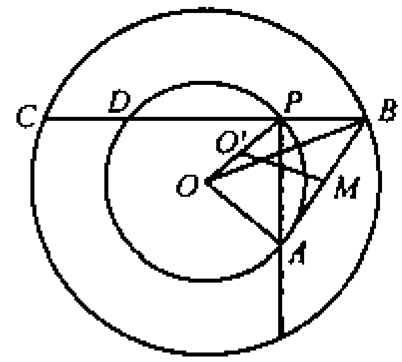


图29.6

解法3 (1) 首先由 $AP\perp BC$ 得到

$$AC^2=AP^2+PC^2,AB^2=AP^2+PB^2$$

$$BC^2+CA^2+AB^2=2(AP^2+PC^2+PB^2)+2PC\cdot BP$$

(以下我们必须利用点 O 的性质).利用 $OP=OA,OC=OB$ 以反映点 O 的几何属性似乎利少弊多,为了真正联系到距离的平方,产生出构造直角三角形这一非常自然的想法.

过点 O 作直线 m 垂直于 AP,交 AP 于中点 L;作点 B 关于直线 m 的对称点 B',如图29.7所示.因为

$$AP\perp BC,m\perp AP$$

所以
$$BP /\!/ m$$

故 $AB' /\!/ m$ 且 $AB'=PB$,$\angle APB=90°$,所以 $PBB'A$ 是一个矩形.

因为

$$\angle PBB'=90°,BB'=AP$$

所以
$$BC^2+AP^2=B'C^2=4R^2$$

亦即
$$AP^2+BP^2+CP^2=4R^2-2PC\cdot BP$$

再由圆内幂
$$PC\cdot BP=R^2-r^2$$

于是

$$BC^2+CA^2+AB^2=2(AP^2+BP^2+CP^2)+2PC\cdot BP=$$
$$8R^2-2R^2+2r^2=6R^2+2r^2$$

分析 题目条件比较强,思路也比较多.经过探索,我们发现:点 P 是整个平面的一个关键点,欲寻求 A,B,C 三点间关系,须将点 P 与之联系起来.点 O 是图形的另一个关键点,是图形的对称中心,它能够提供许多有关的信息和证题需要的条件.

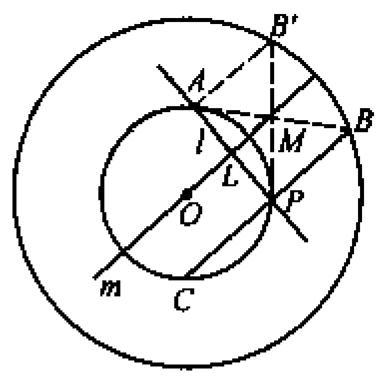


图29.7

(2) 欲求 AB 中点轨迹，仍需要将 A,B 与点 P 联系起来，因为 A,B 都是动点而 P 是定点.

我们寻求 AB 中点 M 与点 P 的关系，不难发现 M 为 PB' 的中点，B' 在大圆周上，因此点 M 在以 P 为位似中心，位似比为 $1/2$ 的变换下大圆的像上，即一半径为 $R/2$ 的圆 Q 上.

反之，对于以 OP 的中点为圆心的圆上任一点 K，连结 PK 并延长交大圆于 B'，则 K 为 PB' 的中点. 作点 B' 关于 OK 的对称点 B，B 必在大圆周上，且由作法知点 K 就是得到的 AB 的中点.

综上可知，AB 中点轨迹是以 OP 中点为圆心，$R/2$ 为半径的圆周.

解法 4 (1) 设 BC 弦心距为 x，如图 29.8 所示. 由题意知

$$\begin{aligned}BC^2 + CA^2 + AB^2 &= BC^2 + AP^2 + PC^2 + BP^2 + AP^2 = \\ &BC^2 + 2AP^2 + (BP + CP)^2 - 2BP \cdot CP = \\ &2(2BD)^2 + 2(2OD)^2 - 2PE \cdot PF = \\ &8(R^2 - x^2) + 8x^2 - 2(R - r)(R + r) = \\ &6R^2 + 2r^2\end{aligned}$$

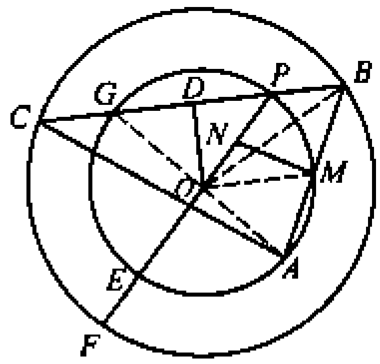


图 29.8

(2) 设 AB 中点为 M，OP 中点为 N，则在 $\triangle ONM$ 与 $\triangle OGB$ 中

$$ON = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2}OG, OM = \frac{1}{2}BC$$

$$\angle NOM = \angle OPG = \angle OGB$$

所以 $\triangle ONM \backsim \triangle OGB$，相似比为 $1:2$. 于是

$$NM = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R$$

则 M 在以 OP 中点为圆心，半径为 $R/2$ 的圆上. 因此当 B 在大圆上变动一周时，M 就在该圆上变动一周.

解法 5 (1) 如图 29.9 所示，延长 PA 交大圆分别于 M,N，设 $MP = u, BP = x, PN = v, PC = y$.

因为 $MN \perp BC$，所以

$$u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = (2R)^2 \quad ⑩$$

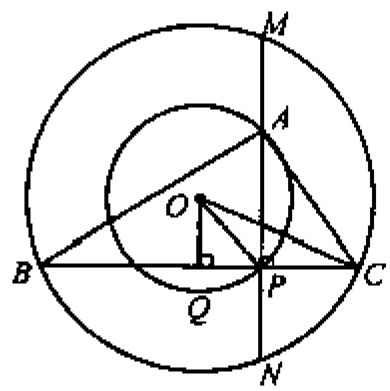


图 29.9

设 $AP = m$，在 $\mathrm{Rt}\triangle APC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle APB$ 中应用勾股定理得

$$AC^2 = m^2 + y^2, AB^2 = m^2 + x^2$$

所以

$$\begin{aligned}S &= 2m^2 + x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2(u - v)^2 + \\ &2(x^2 + y^2) + 2xy = 2(u^2 + v^2 + x^2 + y^2) - 4uv + 2xy\end{aligned}$$

因为 $xy = uv$，所以

$$S = 2(u^2 + v^2 + x^2 + y^2) - 2xy$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle POQ$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle QOC$ 中(其中，$OQ \perp BC$ 于 Q)

$$R^2 = OQ^2 + (\frac{x+y}{2})^2, r^2 = OQ^2 + (\frac{x-y}{2})^2$$

所以
$$R^2 - r^2 = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2$$

所以
$$xy = R^2 - r^2 \quad ⑪$$

将 ⑩,⑪ 分别代入 S 的表达式,则
$$S = 2(2R)^2 - 2(R^2 - r^2) = 6R^2 + 2r^2$$
所以 S 所取值的集合是一个单点集$\{6R^2 + 2r^2\}$.

(2) 过 A 作 BC 的平行线,交大圆分别于 B',C',连结 BB',由圆的对称性知:四边形 $PABB'$ 为矩形,如图 29.10所示.因此求 AB 中点的轨迹问题转化为求矩形 $PAB'B$ 的中心轨迹,也即求 $B'P$ 的中点轨迹.注意到 P 是小圆上的定点,B' 是大圆上的动点,因此以 P 为相似中心,对大圆进行相似比为 1/2 的相似变换,所得的图形仍为圆,此圆即为 BA 中点的轨迹.

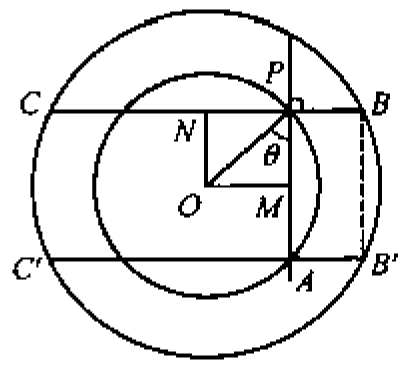


图 29.10

捷克斯洛伐克命题

2 设 n 为一正整数,且 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 是某个集合 B 的子集.设

(1) 每一个 A_i 恰含有 $2n$ 个元素;

(2) 每一个 $A_i \cap A_j (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2n+1)$ 恰含有一个元素;

(3) B 中每一个元素至少属于两个子集 A_i.

问对怎样的值 n,可以对 B 中的每一元素贴一张写有 0 或 1 的标签,使得每个 A_i 中恰含有 n 个贴上了写有 0 的标签的元素?

此解法属于徐明曜

解法 1 当且仅当 n 为偶数时上述要求可以满足.

为解此题,先把它转化为一个图论问题.

以 $V = \{A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}\}$ 为顶点集合作一个 $2n+1$ 个点的完全图* G,它的边集合是
$$E = \{\{A_i, A_j\} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1\}$$
边数
$$|E| = C_{2n+1}^2 = n(2n+1)$$

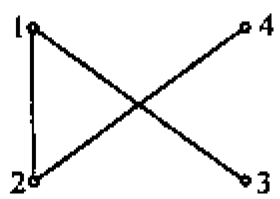


图 29.11

我们如下建立集合 E 到 B 的一个映射 φ:因为由条件(2),对于任意的 $A_i, A_j, i \neq j, A_i \cap A_j$ 恰含一个元素,我们记这个元素为 b_{ij},并规定

* 一个非空有限集合 V 和 V 的全体二元子集的集合 $V^{(2)}$ 的一个子集合 E 在一起叫做一个图 G,记做 $G = (V, E)$;V 叫做图 G 的顶点集合,E 叫做图 G 的边集合.例如,取 $V = \{1,2,3,4\}$,$E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\}\}$,则图 $G = (V, E)$ 可用图 29.11 所示来表示:任取四个点代表 G 的四个顶点 1,2,3,4.对每条边,即 V 的一个二元子集,它属于 E,则用一条线连结该二元子集中的两个顶点,代表这条边.如图 29.11 所示.

称图 $G = (V, E)$ 为完全图,如果 $E = V^{(2)}$,即 V 的任意二点之间都有一条边相连.四点完全图如图 29.12 所示.

解法3 （此解法属于王健梅）先证 B 中每一个元素恰属于两个子集. 由条件(3) 知, B 中每个元素在 A_i 中至少出现两次, 所以有

$$2\mid B\mid \leqslant (2n+1)\mid A_i\mid = 2n(2n+1)$$

得出
$$\mid B\mid \leqslant n(2n+1)$$

另一方面, 由容斥原理得

$$\mid B\mid = \sum_{i=1}^{2n+1}\mid A_i\mid - \sum_{i\neq j}\mid A_i\cap A_j\mid + \sum_{i\neq j\neq k}\mid A_i\cap A_j\cap A_k\mid - \cdots \geqslant \sum_{i=1}^{2n+1}\mid A_i\mid - \sum_{i\neq j}\mid A_i\cap A_j\mid = 2n(2n+1) - C_{2n+1}^2 = n(2n+1)$$

(这里用了条件(2)), 所以等号成立. 而这当且仅当对 $\forall i,j,k$, $A_i\cap A_j\cap A_k = \varnothing$ 才可能, 所以 B 中每个元素恰属于两个子集.

考虑所有 A_i 中贴 0 的元素, 共有 $n(2n+1)$ 个(可以重复计算). 由于 B 中每一个贴 0 的元素恰属于两个子集, 所以共有 $n(2n+1)/2$ 个不同的元素贴 0, 由此知 n 为偶数. 若 n 为偶数, 可用归纳法证明存在符合要求的贴标签方法.

当 $n=2$ 时, 不妨设五个子集为 (a,b,c,d), (a,e,f,g), (b,e,h,l), (c,f,h,m), (d,g,l,m). 把元素 a,b,f,l,m 贴 0, 易验证符合要求.

设 $n=k$ 时成立, 则当 $n=k+2$ 时, 共 $2(k+2)+1$ 个子集, 每个子集含 $2(k+2)$ 个元素. 将 $A_1\cap A_i$, $A_2\cap A_i$ 中元素贴 0($i=5,6,\cdots,k+5$), $A_3\cap A_i$, $A_4\cap A_i$ 中元素贴 0($i=k+6,k+7,\cdots,2k+5$), 其余 $A_i\cap A_j$ 中元素贴 1($1\leqslant i\leqslant 4$, $5\leqslant j\leqslant 2k+5$), $A_1\cap A_2$ 中元素贴 1, $A_1\cap A_3$ 贴 1, $A_1\cap A_4$ 贴 0, $A_2\cap A_3$ 贴 0, $A_2\cap A_4$ 贴 1, $A_3\cap A_4$ 贴 0, 则易验证 A_1,A_2,A_3,A_4 每个集合中恰好 $k+2$ 个元素贴了 0, $A_5,A_6,\cdots,A_{2k+5}$ 中每个子集有两个贴 0, 两个贴 1. 去掉集合 A_1,A_2,A_3,A_4 及 $A_5,A_6,\cdots,A_{2k+5}$ 每个集合中已贴标签的元素, 剩下 $2k+1$ 个集合, 每个集合中有 $2k$ 个元素, 且符合条件(1), (2), (3), 由归纳假设, 存在符合要求的贴标签方法, 所以当 $n=k+2$ 时也存在符合要求的贴标签方法.

所以对所有偶数 n, 存在符合要求的贴法.

解法4 由条件(2) 与(3) 知, B 中每一元素恰属于两个子集 A_i, A_j. 假如有某元素同属于 A_1,A_2,A_3, 则由(2) 知, A_1 和 A_2, $A_3,\cdots,A_{2n+1}$ 的公共元素至多有 $2n-1$ 个. 又由(1) 可知, A_1 中还有一个元素只属于 A_1, 和条件(3) 矛盾. 故 B 中每一元素恰属于两个子集. 又由条件(2) 知, 集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}$ 中公共元素的个数

$$A_i\subseteq\{a_{ij}\mid j\neq i, j=1,2,\cdots,2n+1\}$$
$$i\in\{1,2,\cdots,2n+1\} \quad ④$$

又由 ③ 知

$$\{a_{ij}\mid j\neq i, j=1,2,\cdots,2n+1\}\subseteq A_i$$

故对任意 i, $A_i=\{a_{ij}\mid j\neq i, j=1,2,\cdots,2n+1\}$. 再由(1) 知 $\mid A_i\mid = 2n$, 故对给定 i, $a_{ij}(j\neq i)$ 两两不同. 又由于条件(2) 有

$$B=\bigcup_i^{2n+1}A_i=\{a_{ij}\mid j<i, i=2,3,\cdots,2n+1\}$$

且 B 中任意两个元素 $a_{i_1j_1}$, $a_{i_2j_2}$ 当且仅当 $i_1=i_2$, $j_1=j_2$ 时相同. 事实上根据 ③ 知 $a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$, 有 $a_{i_1j_1}=a_{i_1j_2}$, 故 $j_1=j_2$, 类似地 $i_1=i_2$. 因由条件(1) 有 $\mid A_i\mid = 2n$, 于是

$$\mid B\mid = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$$

分析结论 （暂缓确定 n, 下设 n 满足条件).

Ⅰ 我们要么构造出具体的标法, 要么用逻辑证明, 证明标法的确存在. 但是由于集合元素已经非常确定, 所以用构造法具有很大的优越性.

Ⅱ 构造仅与 i,j 有关, 抓住这一关键, 我们可以进行直观的描述; 将 i,j 用点表示; a_{ij} 用连结 $i,j(i\neq j)$ 的线段表示. 下面只须将 a_{ij} 来染色, 使从每一点 i 出发的 $2n$ 条线段中恰有 n 条染红色, n 条染蓝色.

为

$$C_{2n+1}^2=\frac{2n(2n+1)}{2}$$

现在,我们将 B 的$\frac{2n(2n+1)}{2}$个元素作如下之排列,即

$$\begin{array}{llllll}
b_{11} \\
b_{21} & b_{22} \\
b_{31} & b_{32} & b_{33} \\
b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{2n-1,1} & b_{2n-1,2} & \cdots & b_{2n-1,2n-1} \\
b_{2n,1} & b_{2n,2} & \cdots & \cdots & b_{2n,2n-1} & b_{2n,2n}
\end{array}$$

按下面的办法构造子集,即

$$A_1=\{b_{11},b_{21},b_{31},b_{41},\cdots,b_{2n1}\}$$
$$A_2=\{b_{21},b_{22},b_{32},b_{42},\cdots,b_{2n2}\}$$
$$A_3=\{b_{31},b_{32},b_{33},b_{43},\cdots,b_{2n3}\}$$
$$A_4=\{b_{41},b_{42},b_{43},b_{44},\cdots,b_{2n4}\}$$
$$\vdots$$
$$A_{2n}=\{b_{2n,1},b_{2n,2},b_{2n,3},b_{2n,4},\cdots,b_{2n,2n}\}$$
$$A_{2n+1}=\{b_{1,1},b_{2,2},b_{3,3},b_{4,4},\cdots,b_{2n,2n}\}$$

A_i 的这种取法,显然符合题设的条件(1),(2),(3).

取 n 为偶数,令 $n=2k$,则 $2n=4k$,将 B 的元素划分成 k 个 4×4 的矩阵.对于每一个三角形阵,按下法贴上 0 或 1 的标签

$$\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

而对于每一个 4×4 的方阵,则按下法贴上 0 或 1 的标签

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

不难直接验证,每一个子集 A_i 中贴 0 或 1 标签的元素各占一半.

注　因为 B 中元素为 $n(2n+1)$,要使每个 A 贴 0 和 1 的个数各占一半,当且仅当 n 为偶数,令 $n=2k$,则 $2n=4k$,因此可把集合 B 对应的矩阵 $\boldsymbol{B}$(按虚线)全部分成 4×4 阶矩阵.

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \\ b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} & b_{75} & b_{76} & b_{77} \\ b_{81} & b_{82} & b_{83} & b_{84} & b_{85} & b_{86} & b_{87} & b_{88} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{2n,1} & b_{2n,2} & b_{2n,3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n,2n} \end{bmatrix}$$

将 B 中每一个三角阵都放一个矩阵 T_2，使之重叠；再将 B 中每一个 4 阶方阵放一个矩阵 T_1，使之重叠. 于是 B 中的每一元素都贴上了 0 或 1 的标签，并且满足每一 A 中贴 0 和贴 1 的元素的个数各占一半.

3 $\mathbf{N}^*$ 为正整数集. 在 $\mathbf{N}^*$ 上定义函数 f 如下：$f(1)=1,f(3)=3$，且对 $n\in\mathbf{N}^*$ 有

$$f(2n)=f(n) \quad ①$$

$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n) \quad ②$$

$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n) \quad ③$$

问有多少个 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\leqslant 1\ 988$ 使得 $f(n)=n$.

英国命题

解法 1 为找出 $f(n)$ 和 n 的关系，通常先对于较小的 n 值计算出 $f(n)$，并试图找出规律. 经计算得到下表.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15	1	17	9

但从上表计算中似乎也看不到什么规律. 这时我们再来分析题目所给出的递推关系：为计算 $f(4n+1)$，需知 $f(2n+1)$ 和 $f(n)$，而 $2n+1$ 又可能是 $4m+1$ 型或 $4m+3$ 型，因此在使用递推关系时，光知道一个数是 $4m+1$ 型或 $4m+3$ 型是不够的，还应知道 $2n+1$ 以至 n（如是奇数的话）是 $4m+1$ 型或 $4m+3$ 型的，以便应用不同的递推关系式. 为了解决这个困难，我们会看到如果先把数 n 表示成二进制，即令

$$n=\sum_{i=0}^{k}a_i2^{k-i},a_0=1,a_i=0\text{ 或 }1,i>0 \quad ④$$

计算起来可能会容易应用递推关系式，因而也便于寻找 $f(n)$（当然 $f(n)$ 也用二进制表示）与 n 的关系.

在把数表示成二进制后，上表变成

此解法属于王鲁燕

分析 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，利用题目的条件证明：对任意正整数 n 有

$$f(2n+1)-f(2n)=2\left(f\left(2\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)-f\left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)\right)$$

反复应用这一结论，由上式及题目条件可推出

$$f(2n+1)-f(2n)=2^{k+1}$$

其中，k 是适合条件 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 的整数. 由此及题中式 ①，我们就容易想到要用二进制来解本题，并看出应有解答中的式 ⑤ 成立.

n	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
$f(n)$	1	01	11	001	101	011	111	0001	1001

n	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010
$f(n)$	0101	1101	0011	1011	0111	1111	00001	10001	01001

稍经观察即可发现 $f(n)$ 似应为由 n 表示成二进制后颠倒诸位数字后得到的(当然得到的是 $f(n)$ 的二进制表达式). 于是我们猜想若设 n 表示成二进制式 ③, 则应有

$$f(n)=\sum_{i=0}^{k}a_i2^i \tag{5}$$

下面用对 n 的归纳法证明式 ⑤. 上表说明式 ⑤ 对于较小的 n 成立, 因此可假定对于比 n 小的值式 ⑤ 已经成立, 来证式 ⑤ 对 n 也成立. 分以下三种情形讨论.

ⅰ n 是偶数. 这时 $a_k=0$. 由题中式 ① 得

$$f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)=f\left(\sum_{i=0}^{k-1}a_i2^{k-1-i}\right)=\sum_{i=0}^{k-1}a_i2^i$$

故式 ④ 成立.

ⅱ $n\equiv1\pmod 4$. 这时 $a_k=1, a_{k-1}=0$. 由题中式 ② 得

$$\begin{aligned}f(n)&=2f\left(\frac{n+1}{2}\right)-f\left(\frac{n-1}{4}\right)=\\&2f\left(\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^{k-1-i}+1\right)-f\left(\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^{k-2-i}\right)=\\&2\left(2^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i\right)-\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i=2^k+\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i\end{aligned}$$

故式 ④ 成立.

ⅲ $n\equiv3\pmod 4$. 这时 $a_k=a_{k-1}=1$. 由题中式 ③ 得

$$\begin{aligned}f(n)&=3f\left(\frac{n-1}{2}\right)-2f\left(\frac{n-3}{4}\right)=\\&3f\left(\sum_{i=0}^{k-1}a_i2^{k-1-i}\right)-2f\left(\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^{k-2-i}\right)=\\&3\sum_{i=0}^{k-1}a_i2^i-2\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i=3a_{k-1}2^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i=\\&2^k+2^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i\end{aligned}$$

故式 ⑤ 成立. 证毕.

有了式 ⑤, 就很容易求出满足 $f(n)=n$ 且 $n\leqslant 1\,988$ 的解的个数了. 先将 1 988 化成二进制得

11111000100

它是一个十一位数.明显地,在所有的 t 位二进制数中,颠倒数字后值仍不变的恰有 $2^{\left[\frac{t-1}{2}\right]}$ 个,这里$[x]$表示不超过x的最大整数.故在一位数到十位数中,满足 $f(n)=n$ 的值的个数为

$$\sum_{t=1}^{10}2^{\left[\frac{t-1}{2}\right]}=2\sum_{i=0}^{4}2^{i}=2(2^5-1)=62$$

在十一位数中有 $2^{\left[\frac{10}{2}\right]}=2^5=32$ 个,但其中有且仅有两个大于 1 988,它们是

$$11111011111,11111111111$$

故所求的满足 $f(n)=n$ 且 $n\leqslant 1\,988$ 的 n 值的个数为

$$62+32-2=92$$

解法 2 (1)继续探索.麻烦的关键是在于条件将 $4n+1$ 与 $4n+3$ 区分开来,为了避免这一点,就应该寻求它们之间共同的属性,进行统一处理.再回到条件中有

$$f(4n+3)-f(2n+1)=2(f(2n+1)-f(2n))$$
$$f(4n+1)-f(2n)=2(f(2n+1)-f(2n))$$

这样就达到了统一,使条件更宜于叠代.从而

$$f((n_tn_{t-1}\cdots n_2n_11)_2)-f((n_tn_{t-1}\cdots n_1)_2)=$$
$$2(f((n_tn_{t-1}\cdots n_21)_2)-f((n_tn_{t-1}\cdots n_20)_2))=$$
$$2^2(f((n_tn_{t-1}\cdots 1)_2)-f((n_tn_{t-1}\cdots 0)_2))=\cdots=$$
$$2^{t-1}(f((11)_2)-f((10)_2))=2^tn_t$$

注意到 $n_t=1$,为了避免分情况讨论最好将偶数情况统一起来,即

$$f((n_tn_{t-1}\cdots n_2n_1n_0)_2)=f((n_tn_{t-1}\cdots n_2n_1)_2)+2^tn_0$$

这样,再进行叠代最后得到

$$f(n_tn_{t-1}\cdots n_2n_1n_0)=n_0\cdot 2^t+n_1\cdot 2^{t-1}+\cdots+n_{t-2}\cdot 2^2+$$
$$f(\overline{1n_{t-1}})=n_0\cdot 2^t+n_1\cdot 2^{t-1}+\cdots+$$
$$n_{t-2}\cdot 2^2+n_{t-1}\cdot 2+1=$$
$$(n_0n_1n_2\cdots n_{t-1}n_t)_2$$

(2)进行归纳证明(略).

(3)求 $F(1\,988)$,$1\,988=(11111000100)_2$.

$f(n)=n\Leftrightarrow n_t=n_0,n_{t-1}=n_1,\cdots,n_{t-i}=n_i,i=0,1,\cdots,t$

对于 $n\leqslant 1\,988$,当 t 是奇数 $2k-1$ 时,$n_{2k-1}=n_0=1,\cdots,n_k=n_{k-1}$.这样的数有 $2^{k-1}(k=1,2,3,4,5)$ 个.所以总共有 $\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}=2^5-1$ 个数,n 小于等于 1 988 且满足 $f(n)=n$.

当 t 为偶数 $2k$ 时,则

$$n_{2k}=n_0=1,\cdots,n_{k+1}=n_{k-1},n_k=0\text{ 或 }1$$

此解法属于何宏宇

分析结论 设个数为 $F(1\,988)$.一种想法是直接计算 $f(n)$,再利用 $f(n)$ 求 $F(1\,988)$.另一种想法是不求$f(n)$确定出 $F(1\,988)$,或讨论 $F(n)$ 的属性.但后一种想法缺乏基础,什么条件都用不上,都得借助 $f(n)$,因此应该求出 $f(n)$.

分析条件 (怎样求 $f(n)$)只能用条件①,②,③三式不断叠代讨论奇偶性.这一点抽象出来即用数学概念反映出来就是 2 或 4 进制.事实上,2 或 4 进制具有一定的等同性,所以,可以假设

$$n=(n_tn_{t-1}\cdots n_1n_0)_2$$
$$n_i=0,1$$

下一步怎么办?不断叠代仍很麻烦.

这样的数共有 2^{k-1} 个.故 $k \leqslant 5$ 时满足 $f(n)=n$ 的数有

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^6 - 1$$

在这些数中大于 1 988 的有两个数即

$$(11111011111)_2, (11111111111)_2$$

所以 $$F(1\,988) = 2^5 - 1 + 2^6 - 1 - 2 = 92$$

解法3 首先证明:$f(2^k)=1$,由已知 $f(2n)=f(n)$ 得

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) = f(2^{k-2}) = \cdots = f(2) = f(1) = 1$$

下面用数学归纳法证明 $f(2^k+1)=2^k+1$.

(1) $k=1$ 时,$f(2^1+1)=f(3)=3=2^1+1$ 成立.

(2) 假设 $k=m$ 时,$f(2^m+1)=2^m+1$ 成立,则

$$f(2^{m+1}+1) = f(4\cdot 2^{m-1}+1) = 2f(2^m+1) - f(2^{m-1}) = 2(2+1) - 1 = 2^{m+1}+1$$

这就是说 $k=m+1$ 时,命题也成立.

综合(1)与(2),命题对所有的自然数 k 都成立.

同理可证:$f(2^k-1)=2^k-1$.

下证 $f(n)$ 是 n 写成二进制数后,反序所成的二进制数.

当 n 是奇数时,分为两类:一类是 $n=4m+1$,一类是 $n=4m+3$.当 $n=4m+1$ 时,用二进制数表示为

$$n = 4m + 1 = 1 + \sum_{j=1}^{k} 2^j a_j$$

其中,a_j 等于 0 或 1,显然 $a_1=0$,$m=\sum\limits_{j=2}^{k} a_j 2^{j-2}$,所以

$$2m + 1 = 1 + \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{j-1}$$

先证 $f(n)$ 是 $n=4m+1$ 写成二进制数后,反序所成的二进制数.(用数学归纳法)

ⅰ $n=1$ 时,$f(1)=1$;$n=2$ 时,$f(2)=1$;$n=3$ 时,$f(3)=f(2+1)=1+2$;$n=4$ 时,$f(4)=1$.命题皆成立.

ⅱ 假设 $n<4m+1$ 时,命题成立.则

$$f(2m+1) = \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{(k-1)-(j-1)} + 2^{k-1}$$

(因为 $2m+1<4m+1$).

$$f(m) = \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{(k-2)-(j-2)}$$

(因为 $m<4m+1$),所以

$$f(4m+1) = 2f(2m+1) - f(m) = 2 + \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{k-j}$$

这就是说 $n = 4m+1$ 时，命题成立.

综合 i 与 ii 命题得证.

同理可证 $f(n)$ 是 $n = 4m+3$ 当写成二进制数时，反序所成的二进制数.

其次证明 $f(n)$ 是 $n = 2m$ 写成二进制数后，反序所成的二进制数.

设 m 为奇数，将 m 写成二进制数

$$m = \sum_{j=0}^{m} a_j 2^j = a_m a_{n-1} \cdots a_1 a_0, a_j = 0 \text{ 或 } 1$$

则
$$2m = \sum_{j=0}^{m} a^j 2^{j+1} = a_m a_{n-1} \cdots a_1 a_0 0$$

所以
$$f(2m) = f(m) = a_0 a_1 \cdots a_m = 0 a_0 a_1 \cdots a_m$$

结论成立.

设 m 为偶数时，不妨设 $m = 2m'$，则 $f(2m) = f(2m') = f(m')$，若 m' 是奇数，已证；若 m' 为偶数，又可设 $m' = 2m''$，重复上面过程，即可得到结论正确.

下面求 $n \leqslant 1\,988$ 时，使 $f(n) = n$ 的 n 的个数.

因为 $n \leqslant 1\,988 < 2\,048 = 2^{11}$，所以 n 写成二进制数后最多是 11 位，又 1 988 的二进制数是 11111000100，所以根据已知及上面证得的结论，我们有：

1 位数的二进制数只有数字 1，所以 1 位数的二进制数的个数是 1；2 位数的二进制数只有 11，所以它的个数为 1；3 位数的二进制数只有 101 和 111，所以它的个数为 2^1；4 位数的二进制数的形式是 $1\times\times1$，只有一个方格的数字待定，4 位数的个数为 2^1；5 位数的二进制数的形式是 $\times\times\times$，只有两个 $\times\times$ 中的数字待定，所以它的个数为 2^2；同理，6 位，7 位，8 位，9 位，10 位数的二进制数的个数分别为 $2^2, 2^3, 2^3, 2^4, 2^4$，11 位数的二进制数的个数为 2^5-2（因为在 2^5 个二进制数中，11111111111 和 11111011111 都大于 11111000100，所以 11 位数的个数为 2^5-2）.

所以满足题设条件的 n 的个数为

$$1+1+2+2+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+(2^5-2) = 92$$

4 证明：满足不等式

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

的实数 x 的集合是互不相交的区间的并集，并且这些区间长度的总和等于 1 988.

爱尔兰命题

证法 1 首先指出这样一基本事实：在 $O\text{-}xy$ 坐标平面上，如

果一条连续曲线有一头在 x 轴的上方，另一头在 x 轴的下方，那么这条连续曲线必定要与 x 轴相交.这一基本事实合乎人们的直观经验，容易为大家所接受(在大学的数学分析课程里，将给出这一事实的严格数学证明).我们承认这一基本事实，并将在下面的解题过程中用到它.事实上，我们在中学数学讨论求根问题时经常用到这一点.

此证法属于 张筑生

考查函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}$$

设 $l\in\{1,2,\cdots,69\}$，$x\in(l,l+1)$.我们把函数 f 的表示式写成

$$f(x)=\sum_{k=1}^{l}\frac{k}{x-k}+\sum_{k=l+1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}$$

容易看出，当 x 在开区间 $(l,l+1)$ 内增大变化时，$\sum_{k=1}^{l}\frac{k}{x-k}$ 与 $\sum_{k=l+1}^{70}\frac{k}{x-k}$ 都减小(前者保持正值并减小，后者保持负值但绝对值增大).函数 f 在 $(l,l+1)$ 中是严格单调下降的.对于 $x\in(l,l+1)$，当 $x\to l$ 时 $f(x)\to+\infty$，当 $x\to l+1$ 时 $f(x)\to-\infty$.我们断定：存在惟一的 $\xi_l\in(l,l+1)$，使得 $f(\xi_l)=0$.同样容易看出，函数 f 在 $(70,+\infty)$ 也是严格单调下降的.在 $(70,+\infty)$ 范围内，当 $x\to 70$ 时 $f(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to-\frac{4}{5}$.仿照上面的讨论又可断定：函数 f 在 $(70,+\infty)$ 范围内也只有惟一的零点 ξ_{70}.另外，还容易看出，对于 $x<1$，应有 $f(x)<0$.

通过以上的讨论，我们得知，使得 $f(x)\geqslant 0$ 的实数 x 的集合是

$$(1,\xi_1],(2,\xi_2],\cdots,(69,\xi_{69}],(70,\xi_{70}]$$

这些互不相交的区间的并集，这些区间的长度总和

$$S=\sum_{k=1}^{70}(\xi_k-k)=\sum_{k=1}^{70}\xi_k-\sum_{k=1}^{70}k$$

另一方面，我们注意到，方程 $f(x)=0$ 与以下的方程同解

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-70)-\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}\frac{k(x-1)(x-2)\cdots(x-70)}{x-k}=0 \quad ①$$

上式左边是一个 70 次的多项式，它的所有各根之和应为

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{70}=-a_1$$

其中，a_1 是式 ① 左边多项式中 x^{69} 的系数.通过计算，我们得到

$$a_1=-\sum_{k=1}^{70}k-\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k=-\frac{9}{5}\sum_{k=1}^{70}k$$

由此又得到 $S=\sum_{k=1}^{70}\xi_k-\sum_{k=1}^{70}k=-a_1-\sum_{k=1}^{70}k=$

$$\frac{9}{5}\sum_{k=1}^{70}k-\sum_{k=1}^{70}k=\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k=$$

$$\frac{4}{5}\times\frac{70\times 71}{2}=4\times 7\times 71=28\times 71=1\ 988$$

证法 2　由分析，在 $(j,j+1)$ 中有惟一的一个 x_j 使得 $f(x_j)=\frac{5}{4}$，而在 $(j,j+1)$ 上，使 $f(x)\geqslant\frac{5}{4}$ 的 x 即是区间 $(j,x_j)(j=1,2,3,\cdots,69)$. 如图 29.13 所示，在 $(70,+\infty)$ 上，存在惟一的一个 x_{70} 使得 $f(x_{70})=\frac{5}{4}$，而在 $(70,+\infty)$ 上，使 $f(x)\geqslant\frac{5}{4}$ 的 x 即是区间 $(70,x_{70}]$. 于是 $\{x\mid f(x)\geqslant\frac{5}{4}\}=\bigcup_{k=1}^{70}(k,x_k]$，所以满足 $f(x)\geqslant\frac{5}{4}$ 的 x 的集合是 70 个互不相交的区间的并集. 它们长度和

$$D=\sum_{k=1}^{70}(x_k-k)=\sum_{k=1}^{70}x_k-\sum_{k=1}^{70}k$$

x_k 是方程 $f(x)=\frac{5}{4}$ 的根即是

$$5(x-1)(x-2)\cdots(x-70)=4((x-2)\cdots(x-70)+2(x-1)(x-3)\cdots(x-70)+\cdots+70(x-1)(x-2)\cdots(x-69))$$

的根. 此多项式恰是 70 次，有 70 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_{70}$. 故

$$\sum_{k=1}^{70}x_k=-\frac{a_{69}}{5}=-\left(5\sum_{i=1}^{70}(-i)-4\sum_{i=1}^{70}(+i)\right)/5=\frac{9}{5}\sum_{i=1}^{70}i$$

于是

$$D=\frac{9}{5}\sum_{i=1}^{70}i-\sum_{k=1}^{70}k=\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{70}i=\frac{4}{5}\times\frac{70\times 71}{2}=1\ 988$$

证法 3　当 $x<1$ 时，有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}<0$$

$$\lim_{x\to n^-}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to n^+}f(x)=+\infty,\ n=1,2,\cdots,70$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{5}{4}$$

由 $f(x)$ 连续性知，$f(x)$ 在每个区间 $(1,2),(2,3),\cdots,(69,70),(70,+\infty)$ 中有一根，记为 $x_1,x_2,\cdots,x_{70}$. $f(x)$ 的根即为

此证法属于何宏宇

分析条件　观察函数 $f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}$ 的性质.

$f'(x)=\sum_{k=1}^{70}(-k)/(x-k)^2<0,x\neq k$

(1) $x\in(-\infty,1)$ 时，易见 $f(x)<0$.

(2) $x\in(j,j+1)(j=1,2,\cdots,69)$ 时，当 $x>j$ 且 $x\to j$ 时，$f(x)\to+\infty$；当 $x<j+1$ 且 $x\to j+1$ 时，$f(x)\to-\infty$. $f(x)$ 在区间 $(j,j+1)$ 上单调递减.

(3) $x\in(70,+\infty)$ 时，易见 $f(x)>0$，且当 $x>70$ 且 $x\to 70$ 时，$f(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$. $f(x)$ 在区间 $(70,+\infty)$ 上单调递减.

(上面的讨论已给函数一个非常精确的描述，剩下的是一些技巧性的步骤，不再涉及路子是否正确.)

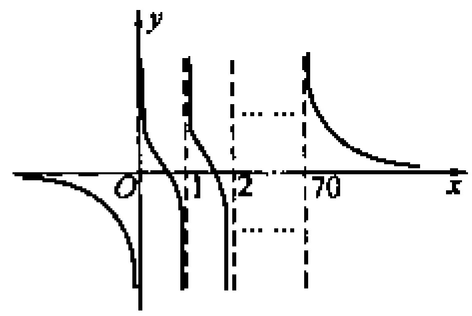


图 29.13

此证法属于王健梅

$$g(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-70)f(x)$$

的根，而 $g(x)$ 为 70 次多项式，首项系数为 $-\frac{5}{4}$，则

$$g(x)=-\frac{5}{4}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{70})$$

x^{69} 次项系数为

$$(1+2+\cdots+70)+\frac{5}{4}(1+2+\cdots+70)=\frac{9}{4}(1+2+\cdots+70)$$

由韦达定理

$$x_1+x_2+\cdots+x_{70}=-\frac{9}{4}(1+2+\cdots+70)/(-\frac{5}{4})=$$
$$\frac{9}{5}(1+2+\cdots+70)$$

$f(x)\geqslant 0$的解集为$(1,x_1]\cup(2,x_2]\cup\cdots\cup(70,x_{70}]$，区间长度总和为

$$d=\sum_{i=1}^{70}(x_i-i)=\sum_{i=1}^{70}x_i-\sum_{i=1}^{70}i=$$
$$(\frac{9}{5}-1)(1+2+\cdots+70)=1\ 988$$

5 在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高．连结 $\triangle ABD$ 的内心与 $\triangle ACD$ 的内心的直线分别与边 AB 及边 AC 相交于 K 及 L 两点．$\triangle ABC$ 与 $\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 与 T．求证：$S\geqslant 2T$．

希腊命题

证法 1 记 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ 的内心分别为 O_1 及 O_2，记它们的内切圆半径分别为 r_1 及 r_2，记 $AC=b$，$AB=c$，$\angle ABC=\alpha$，$\tan\alpha=b/c$．

此证法属于杨晓兰

注意到 $\triangle CAD\backsim\triangle ABD$，相似比是 $b:c$，于是

$$r_2/r_1=b/c=\tan\alpha$$

(1) 先讨论 $\alpha=45°$ 这一简单情形，如图 29.14 所示．

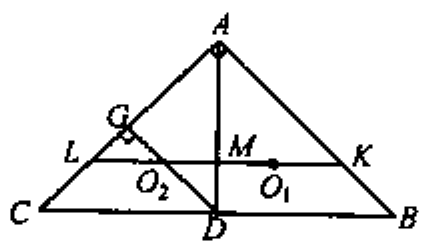


图 29.14

设 AD 与直线O_1O_2相交于 M，作 $O_2G\perp AC$．易知 $AG=AM$，$LG=r_2=MD$，于是 $AL=AD=b/\sqrt{2}$．得到

$$T:S=AL^2:AC^2=1:2,S=2T$$

(2) 一般情形，不妨设 $0°<\alpha<45°$，如图 29.15 所示．

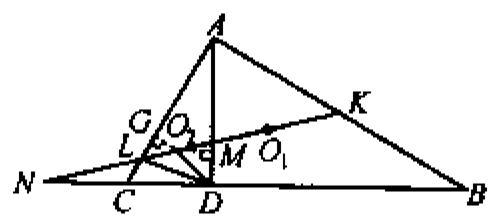


图 29.15

设直线 O_1O_2 与 BC 的延长线相交于N．记 $\angle O_1NB=\beta$，有

$$\tan\beta=(r_1-r_2)/(r_1+r_2)$$

又有

$$\cot(90°-\beta)=\tan\beta=\frac{1-r_2/r_1}{1+r_2/r_1}=$$
$$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\cot(45°+\alpha)$$

由此推出两个锐角 $90°-\beta$ 和 $45°+\alpha$ 相等，即 $\alpha+\beta=45°$，

$\angle AKL = 45°$，$\triangle AKL$ 是等腰直角三角形.

我们不难证明仍有 $AL = AD$. 作 $O_2M \perp AD$，$O_2G \perp AC$，如图 29.15 所示. 有 $LG = r_2 = MD$，又有 $AG = AM$，导出

$$AL = AD = b \cdot \cos \alpha$$

$$T = \frac{1}{2}(AL)^2 = \frac{1}{2}b^2 \cdot \cos^2\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b^2 \cdot \cot \alpha$$

由 $0° < \alpha < 45°$，有 $2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha < 1$. 由此推出 $2\cos^2\alpha < \cot \alpha$，因此 $2T < S$.

证法 2　以 D 为原点，DC 为 x 轴的正向建立坐标系，如图 29.16 所示. 并设 $|AB| = 1$，$\angle ABC = \varphi$，则 $|BD| = \cos \varphi$，$|AD| = \sin \varphi$，$|AC| = \tan \varphi$，$|DC| = \tan \varphi \cdot \sin \varphi$. 所以，各点的坐标为

$$A(0, \sin \varphi), B(-\cos \varphi, 0), C(\tan \varphi \cdot \sin \varphi, 0)$$

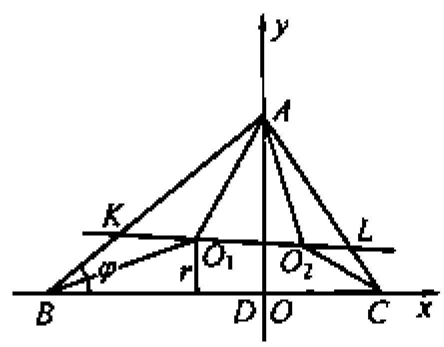


图 29.16

设 O_1，O_2 分别为 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心，令 O_1 到 BC 的距离为 r，则因

$$\frac{1}{2}r(\sin \varphi + \cos \varphi + 1) = \frac{1}{2}\sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

所以

$$r = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi + 1} = \frac{1}{2}(\sin \varphi + \cos \varphi - 1) \qquad ①$$

O_1 的坐标为 $(-r, r)$，类似可得 O_2 的坐标为 $(r \cdot \tan \varphi, r \cdot \tan \varphi)$. 于是，直线 O_1O_2 的斜率为

$$m = \frac{\tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 1} \qquad ②$$

所以 O_1O_2 的方程为

$$y - r = m(x + r) \qquad ③$$

又 AB 的方程为

$$x \cdot \sin \varphi - y \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0 \qquad ④$$

求 ③ 与 ④ 的交点，得 K 的横坐标为

$$\frac{(m+1)r - \sin \varphi}{\tan \varphi - m}$$

所以　$|AK| : |AB| = \dfrac{(m+1)r - \sin \varphi}{\tan \varphi - m} : (-\cos \varphi)$

因为 $AB = 1$，故得

$$|AK| = \frac{(m+1)r - \sin \varphi}{\cos \varphi(m - \tan \varphi)} \qquad ⑤$$

同理可得

$$|AL| = -\frac{(m+1)r - \sin\varphi}{\sin\varphi(m+\cot\varphi)} \quad ⑥$$

又
$$T = \frac{1}{2}|AL||AK|$$

将⑤,⑥及①,②代入可得

$$T = \frac{1}{2}\sin^2\varphi \quad ⑦$$

$$S = \frac{1}{2}\tan\varphi \quad ⑧$$

因 φ 为锐角,易证 $\tan\varphi \geqslant 2\sin^2\varphi$,所以有

$$S \geqslant 2T$$

证法3 设 $\triangle ABC$ 的三边为 $AB = c, AC = b, BC = a$,内切圆半径为 r. $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 的内心分别为 O_1, O_2;内切圆半径分别为 r_1, r_2. 则由

$$\triangle ABD \backsim \triangle CBA, \triangle ACD \backsim \triangle BCA$$

有
$$r_1 : r = c : a, r_2 : r = b : a$$

或
$$r_1 = rc/a, r_2 = rb/a$$

因为 $\angle O_1DA = \angle O_2DA = 45^\circ$,所以 $\triangle O_1DO_2$ 为一个直角三角形. 有

$$DO_1 = \sqrt{2}r_1 = \sqrt{2}rc/a, DO_2 = \sqrt{2}r_2 = \sqrt{2}rb/a$$

所以
$$DO_1 : DO_2 = c : b$$

从而
$$\triangle O_1DO_2 \backsim \triangle BAC$$

在四边形 BDO_2K 内,因为 $\angle O_1O_2D = \angle C$,所以

$$\angle O_1O_2D + \angle B = 90^\circ, \angle O_2DB = 135^\circ, \angle O_2KB = 135^\circ$$

因此,$\angle AKL = 45^\circ, AK = AL$,即 $\triangle AKL$ 是等腰直角三角形.

过 O_1 作 AB 的垂线,垂足为 E. 因 $\angle BKL = 135^\circ$,即有 $O_1E = EK = r_1 = rc/a$. 设 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$,则 $r = s - a$. 我们有

$$EK = \frac{(s-a)c}{a}$$

由于 $\triangle ABD \backsim \triangle CBA$ 及内切圆的性质知

$$\frac{AE}{s-c} = \frac{r_1}{r}$$

即
$$AE = \frac{r_1}{r}(s-c) = \frac{(s-c)c}{a}$$

$$AK = AE + EK = \frac{(2s-a-c)c}{a} = \frac{bc}{a}$$

$$S_{\triangle AKL} = \frac{1}{2}AK^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^2$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc$$

所以
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AKL}}=\frac{a^2}{bc}=\frac{b^2+c^2}{bc}\geqslant 2$$

即
$$S\geqslant 2T$$

证法 4 如图 29.17 所示,由 $\triangle CDA$ 经过旋转相似变换变为 $\triangle ADB$,点 P 变为点 Q.故

$$DP:DQ=DA:DB$$

或
$$DP:DA=DQ:DB$$

以及
$$\angle PDQ=\angle CDA=90^\circ$$

从而 $\triangle PDQ\backsim\triangle ADB$.再注意到 P,Q 是内心就有

$$\angle PDA=\angle QDB=\angle PKA=45^\circ=\angle ADQ,\angle DAQ=\angle KAQ$$

故 $\triangle ADQ\cong\triangle AKQ$.从而有 $AK=AD$.这样

$$T=\frac{1}{2}AD^2=\frac{AC^2\cdot AB^2}{2BC^2}=\frac{AC^2\cdot AB^2}{2(AC^2+AB^2)}\leqslant\frac{1}{4}AB\cdot AC$$

即
$$S\geqslant 2T$$

此证法属于何宏宇

分析 设 Q,P 分别为 $\triangle ABD,\triangle ACD$ 的内心.由于题目条件相对于结论是很强的,所以用解析的方法恐怕有些繁琐.用平面几何的方法就必须抓住 D,P,Q 三个关键点,PQ,AD 两条关键的线及 $\triangle DPQ$.因为要达到结论,必须了解有关 K,L 的属性;要利用条件,必须注意到点 P,Q,D 的特性;要证明问题又必须从条件推出结论.所以,我们必须首先考查 $\triangle PDQ$,将 P,Q 两点真正地联系起来.

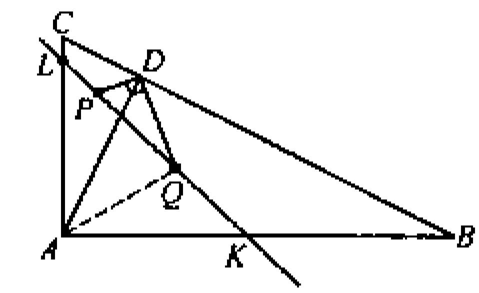


图 29.17

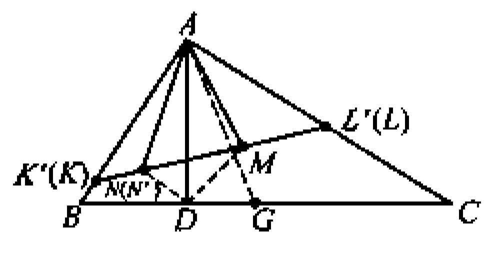


图 29.18

证法 5 如图 29.18 所示,设 N,M 分别是 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ 的内心,在 AC 上取点 L',使得 $AL'=AD$,则在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle AL'M$ 中

$$AD=AL',AM=AM,\angle DAM=\angle MAL'$$

则
$$\triangle ADM\cong\triangle AL'M,\angle AL'M=\angle ADM=45^\circ$$

设 $L'M$ 交 AB 于 K',则

$$\angle AK'M=90^\circ-\angle AL'M=45^\circ$$

故
$$AK'=AL'=AD$$

设 $\angle K'AD$ 平分线交 $L'K$ 于 N',连结 $N'D$,则在 $\triangle K'AN'$ 和 $\triangle DAN'$ 中

$$K'A=DA,AN'=AN',\angle K'AN=\angle N'AD$$

所以有 $\triangle K'AN\cong\triangle DAN',\angle ADN'=\angle AK'N'=45^\circ$

于是 DN' 是 $\angle ADB$ 的平分线,N' 为 $\triangle ABD$ 的内心,N' 与 N 重合.K' 与 K 重合,L' 与 L 重合.

设 G 为 BC 中点,则 $AG=\frac{1}{2}BC$,我们有

$$T=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}AK'\cdot AL'=\frac{1}{2}AD^2$$

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AD=AG\cdot AD\geqslant AD^2=2T$$

联邦德国命题

6 正整数 a 与 b,使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2.求证:$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是某个正整数的平方.

证法 1 为方便,记

$$f(a,b)=\frac{a^2+b^2}{ab+1} \quad ①$$

不妨设 $a \geqslant b > 0$,并令

$$a=nb-r, n \geqslant 1, 0 \leqslant r < b \quad ②$$

将 ② 代入 ①,有

$$f(a,b)=\frac{n^2b^2-2nbr+r^2+b^2}{nb^2-br+1} \quad ③$$

若 $f(a,b) \leqslant n-1$,则有

$$nb(b-r)+r^2+b^2 \leqslant br+n-1$$

因为 $n \geqslant 1, b > r \geqslant 0$,所以

$$nb(b-r) \geqslant n, r^2+b^2 \geqslant 2br \geqslant br$$

与上式矛盾,故 $f(a,b) \geqslant n$.

若 $f(a,b) \geqslant n+1$,则有

$$r^2+b^2 \geqslant nb^2+(n-1)br+(n+1)$$

当 $r=0$,因 $n \geqslant 1$,上式不成立.若 $r>0$,则由 ② 知 $n \geqslant 2$,仍与上式矛盾,故 $f(a,b) \leqslant n$.从而

$$f(a,b)=n \quad ④$$

现在分两种情况进行讨论.

i 若 $r=0$,则 $a=nb$,由 ③ 与 ④ 得

$$f(a,b)=\frac{n^2b^2+b^2}{nb^2+1}=n$$

即得

$$n=b^2 \quad ⑤$$

这时有

$$f(a,b)=f(b^3,b)=b^2 \quad ⑥$$

ii 若 $r>0$,则由 ③ 与 ④ 得

$$f(a,b)=\frac{n^2b^2-2nrb+r^2+b^2}{nb^2-br+1}=n$$

$$n^2b^2-2nbr+r^2+b^2=n^2b^2-nbr+n$$

解出 n,得

$$n=\frac{b^2+r^2}{br+1}=f(b,r) \quad ⑦$$

欲证 n 为完全平方数,可对 $f(b,r)$ 继续上述讨论.由于 a,b 是有限的正整数,必存在自然数 $m(m \geqslant 2)$,使

$$\left.\begin{aligned} a &= nb - r \\ b &= nr - s \\ &\vdots \\ u &= nv - y \\ v &= ny \end{aligned}\right\}\text{共 } m \text{ 个等式} \qquad ⑧$$

这时,我们有

$$n = f(a,b) = f(b,r) = f(r,s) = \cdots = f(v,y) \qquad ⑨$$

在式 ⑨ 中,已有 $v = ny$,从而

$$f(a,b) = f(v,y) = f(ny,y) = f(y^3,y) = y^2$$

$f(a,b)$ 必是完全平方数.

证法 2　设$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = n$,假设 n 不是完全平方数.则因

$$a^2 + b^2 - nab - n = 0 \qquad ⑩$$

设(a,b)是满足式 ⑩ 所有正整数对中使 $a + b$ 最小的.不妨设 $a \geqslant b$,固定 b,n,则式 ⑩ 可看做关于 a 的二次方程.

设 a' 是方程 ⑩ 的另一个根,则有

$$a + a' = nb, aa' = b^2 - n$$

由此可知,a' 也是整数,且

$$a' = \frac{b^2 - n}{a} \qquad ⑪$$

若 $a' < 0$,则 $n > b^2 > 0$,和

$$a'^2 + b^2 - na'b - n = 0$$

矛盾.所以 $a' \geqslant 0$.

又由假设 $n \neq b^2$,所以 $a' > 0$.即(a',b)也是满足式 ⑩ 的正整数对.于是

$$a' + b \geqslant a + b$$

即 $a' \geqslant a$,代入式 ⑪ 得

$$\frac{b^2 - n}{a} \geqslant a$$

或

$$b^2 - n \geqslant a^2$$

这和所设 $a \geqslant b$ 矛盾.所以 n 必是一个完全平方数.

证法 3　由于$(a^2+b^2)/(ab+1)$与$\frac{b}{a}$或$\frac{a}{b}$有关,不妨设 $b \geqslant a$,我们需要大致确定出$(a^2+b^2)/(ab+1)$的范围.为了精确起见,令 $b = p_1a + q_1(0 < q_1 \leqslant a)$,这样就有

$$S_1 = \frac{a^2+b^2}{ab+1} = \frac{p_1^2a^2 + 2p_1q_1a + q_1^2 + a^2}{p_1a^2 + q_1a + 1} =$$

分析　考查$(a^2+b^2)/(ab+1)$这一个整数.面临一个障碍就是 a^2+b^2 与 $ab+1$ 都是 a,b 的二次多项式,很难用同余、整除的方法将它们联系起来.这实

$$p_1+\frac{p_1q_1a+q_1^2+a^2-p_1}{p_1a^2+q_1a+1}=$$

$$p_1+2-\frac{p_1a(a-q_1)+q_1(a-q_1)}{p_1a^2+q_1a+1}+$$

$$\frac{(p_1-1)a^2+p_1+2+q_1a}{p_1a^2+q_1a+1}$$

注意到
$$0<q_1\leqslant a,p_1\geqslant 1$$
可得
$$p_1<S_1<p_1+2,q_1>0$$

由 S_1 是整数，故 $S_1=p_1+1$，即

$$b=S_1a-(a-q_1)$$

这时 $(S_1a-(a-q_1))^2+a^2=(a(S_1a-(a-q_1))+1)S_1$

即
$$S_1=\frac{a^2+(a-q_1)^2}{a(a-q_1)+1}$$

再令 $a_1=a-q_1$，则

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=S_1=\frac{a^2+a_1^2}{1+aa_1}$$

类似地令 $a=S_2a_1-a_2,a_1=S_3a_2-a_3,\cdots$

最终必有 $a_{t-1}=a_tS_{t+1}$，所以有

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=S_1=\frac{a^2+a_1^2}{1+aa_1}=S_1=\cdots=$$

$$\frac{a_{t-2}^2+a_{t-1}^2}{1+a_{t-2}a_{t-1}}=S_t=\frac{a_t^2+a_{t-1}^2}{1+a_ta_{t-1}}=S_{t+1}$$

事实上，将 $a_{t-1}=S_{t+1}a_t$ 代入得

$$\frac{a_t^2+a_{t-1}^2}{1+a_ta_{t-1}}=\frac{a_t^2(S_{t+1}^2+1)}{1+a_t^2S_{t+1}}=S_{t+1}$$

解出 S_{t+1} 有
$$S_{t+1}=a_t^2$$
故
$$S_1=S_2=\cdots=S_{t+1}=a_t^2$$

由此可知$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$为一个平方数，不难发现，a_t 正是 a,b 两数的最大公约数(辗转相除原理)．命题获证．

际上表明$(a^2+b^2)/(ab+1)$这个量很难描述，为此我们利用不等式的方法来描述它．

证法 4　因 a,b 是对称的，故不妨设 $b\geqslant a$．由带余数除法知，存在惟一的一对整数 m,r_1，使得

$$b=am+r_1,-a/2<r_1\leqslant a/2 \qquad ⑫$$

由于 $b\geqslant a\geqslant 1$，故必有 $m\geqslant 1$．由上式得

$$2\leqslant ab+1=a^2m+ar_1+1$$

$$a^2+b^2=m(ab+1)+a^2+amr_1+r_1^2-m$$

这样，$(ab+1)\mid(a^2+b^2)$ 就等价于

$$a^2m+ar_1+1\mid a^2+amr_1+r_1^2-m \qquad ⑬$$

分析　解本题的基本思想是利用整除性质：若 s 整除 t(以下写为 $s\mid t$)，则必有 $|s|\leqslant|t|$ 或 $t=0$．为了在具体问题中能应用这一性质常常要利用带余数除法．本题答案是$(a^2+b^2)/(ab+1)$等于 a 和 b 的最大公约数(以下记做$(a,$

直观地看,除数似应比被除数的绝对值大,所以猜测式 ⑬ 应等价于

$$a^2 + amr_1 + r_1^2 - m = 0 \quad ⑭$$

我们设法来证明这一点.从式 ⑭ 推出式 ⑬ 是显然的.下面来证明:从式 ⑬ 可推出式 ⑭.分 $m > 1$ 和 $m = 1$ 两种情形来讨论.

容易算出

$$a^2 + amr_1 + r_1^2 - m = -(a^2m + ar_1 + 1) + (m + 1)(a^2 + ar_1 - 1) + r_1^2 + 2 > -(a^2m + ar_1 + 1) \quad ⑮$$

$$a^2 + amr_1 + r_1^2 - m = (a^2m + ar_1 + 1) - (m - 1)(a^2 - ar_1 + 1) + r_1^2 - 2 \quad ⑯$$

当 $m > 1$ 时,利用 $a^2 - ar_1 + 1 \geqslant 2$ 及 $a^2 - ar_1 + 1 > r_1^2 - 2$,从式 ⑮ 和 ⑯ 推出

$$|a^2 + amr_1 + r_1^2 - m| < a^2m + ar_1 + 1$$

因此由整除性质知,从式 ⑬ 可推出式 ⑭.

当 $m = 1$ 时,若式 ⑬ 成立,则由式 ⑯ 可推出

$$a^2 + ar_1 + 1 \mid r_1^2 - 2 \quad ⑰$$

由于 $0 \leqslant |r_1| \leqslant a/2$,所以当 $r_1 \neq 0$ 时恒有

$$a^2 + ar_1 + 1 \geqslant a^2/2 + 1 \geqslant 2r_1^2 + 1 > |r_1^2 - 2| > 0$$

因而当式 ⑰ 成立时必有 $r_1 = 0$,进而由式 ⑰ 推出 $a = 1$.这样,$m = 1$ 时必有 $r_1 = 0, a = 1$,显见式 ⑭ 也成立.

显见,当 $r_1 \geqslant 1$ 时式 ⑭ 不可能成立.因此,式 ⑬ 成立时必有

$$-a/2 < r_1 \leqslant 0 \quad ⑱$$

而这时式 ⑭ 可改写为

$$m = (|r_1|^2 + a^2)/(|r_1|a + 1)$$

综合以上讨论,我们证明了:若 $ab + 1 \mid a^2 + b^2, b \geqslant a \geqslant 1$,则必有

$$m = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{|r_1|^2 + a^2}{|r_1|a + 1} \quad ⑲$$

其中,r_1, m 由式 ⑫ 给出,且满足式 ⑰.此外,当 $r_1 = 0$ 时,$m = a^2 = (a, b)^2$,即当 $r_1 = 0$ 时所要的结论已证明.当 $r_1 \neq 0$ 时,$|r_1|, a$ 满足和 a, b 相同的条件,且有式 ⑲ 成立.继续对 $|r_1|, a$ 进行同样的讨论.这样不断进行下去,即利用式 ⑫ 形式的辗转相除法,最后可得一组数列

$$\{b, a\}, \{|r_1|, a\}, \{|r_2|, |r_1|\}, \cdots, \{|r_l|, |r_{l-1}|\}$$

它们由下列式子给出,即

b)) 的平方,即 $(a, b)^2$.

$$\begin{cases} b = am + r_1, -a/2 < r_1 \leqslant -1 \\ a = |r_1| m + r_2, -|r_1|/2 < r_2 \leqslant -1 \\ \vdots \\ |r_{l-2}| = |r_{l-1}| m + r_l, -|r_{l-1}|/2 < r_l \leqslant -1 \\ |r_{l-1}| = |r_l| m \end{cases} \quad ⑳$$

满足

$$m = \frac{a^2+b^2}{ab+1} = \frac{|r_1|^2+a^2}{|r_1|a+1} = \cdots = \frac{|r_l|^2+|r_{l-1}|^2}{|r_l||r_{l-1}|+1} = |r_l|^2$$

这就证明了所要的结论.如果注意到最大公约数

$$(a,b) = (r_1,a) = (r_2,r_1) = \cdots = (r_l,r_{l-1}) = |r_l|$$

就推出 $m = (a,b)^2$.

利用式⑳及 $m = |r_l^2|$,以及循环数列的知识,可以证明满足本题条件的全部正整数解 $a_k, b_k (b_k \geqslant a_k)$,即

$$a_k = \frac{d}{\sqrt{d^4-4}}\left(\left(\frac{d^2+\sqrt{d^4-4}}{2}\right)^k - \left(\frac{d^2-\sqrt{d^4-4}}{2}\right)^k\right)$$

$$b_k = a_{k+1}, k = 1,2,\cdots$$

其中,d 是任意给定的正整数(d^2 相当于 m).

证法 5 用 x,y 代替 a,b,得到一族双曲线

$$x^2+y^2-qxy-q=0 \quad ㉑$$

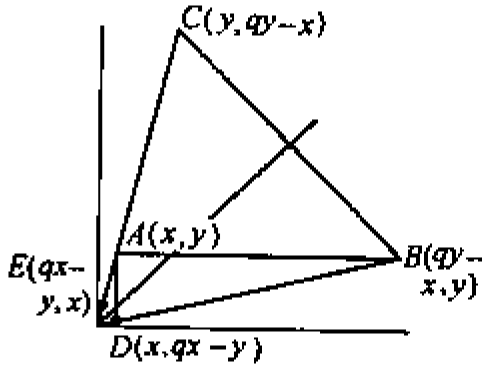


图 29.19

对每个 q 有一条双曲线,所有双曲线关于 $y = x$ 都是对称的.固定 q,设有一个格点 (x,y) 在这双曲线 H_q 上,则关于 $y = x$ 对称的点 (y,x) 也在其上,当 $x = y$ 时,易得 $x = y = q = 1$.因此可设 $x < y$.如图 29.19所示,如果 (x,y) 是格点,则固定 y 时,关于 x 的二次方程有两个解 x, x_1,其中,$x + x_1 = qy, x_1 = qy - x$,所以 x_1 也是整数.即 $B(qy-x,y)$ 是 H_q 的下支的一个格点.B 关于 $y = x$ 的对称点是格点 $C(y,qy-x)$,从 (x,y) 出发,利用变换

$$T:(x,y) \to (y,qy-x)$$

可以产生出 H_q 的上支的无限多个格点.

再从点 A 出发,固定 x,㉑是 y 的二次式,有两个解 y 和 y_1,其中,$y + y_1 = qx, y_1 = qx - y$.因而 y_1 是整数,$D(x,qx-y)$ 是 H_q 的下支上的格点.D 关于 $y = x$ 的对称点是点 $E(qx-y,x)$.从点 $A(x,y)$ 出发,可以由变换

$$S:(x,y) \to (qx-y,x)$$

得到双曲线 H_q 上支中在点 A 下面的点.但这样的点只有有限个.实际上,每次用变换 S 后,两个坐标都严格减小,当 y 是正的时,x 会是负的吗?不会.这时㉑成为

$$x^2+y^2+q|xy|-q > 0$$

所以在最后会要求 $x=0$，而由 ㉑ 有 $q=y^2$，这就是要证明的.

在图 29.19 中，画了 $q=4$ 的双曲线. 事实上，我们是用它的渐近线代替它，因为对大的 x 或 y，双曲线与其渐近线的偏差是可以忽略的.

至此我们并未证明 H_q 上有格点. 并不要求证明存在性. 即使在双曲线上没有格点，定理仍有效. 但对于每个完全平方数 q，易证格点的存在性. 点 $(x,y,q)=(c,c^3,c^2)$ 就是一个格点，因为

$$\frac{x^2+y^2}{xy+1}=q\Rightarrow\frac{c^2+c^6}{c^4+1}=c^2$$

证法 6 如果 $ab=0$，结果是清楚的. 如 $ab>0$，由对称性可设 $a\leqslant b$. 设结果对于较小的乘积 ab 是成立的. 现我们要找整数 c 满足

$$q=\frac{a^2+c^2}{ac+1},0\leqslant c<b$$

因为 $ac<ab$，由归纳假设，$q=\gcd(a,c^2)$. 为找到 c，解

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{a^2+c^2}{ac+1}=q$$

把分子、分母都相减，我们得到

$$\frac{b^2-c^2}{a(b-c)}=q\Rightarrow\frac{b+c}{a}=q\Rightarrow c=aq-b$$

注意 c 是整数且 $\gcd(a,b)=\gcd(a,c)$. 如果能证明 $0\leqslant c<b$ 就完成了证明. 为证明这点，注意到

$$q=\frac{a^2+b^2}{ab+1}<\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

$$aq<\frac{a^2}{b}+b\leqslant\frac{b^2}{b}+b=2b\Rightarrow aq-b<b\Rightarrow c<b$$

为证明 $c\geqslant 0$，我们作估计

$$q=\frac{a^2+c^2}{ac+1}\Rightarrow ac+1>0\Rightarrow c>\frac{-1}{a}\Rightarrow c\geqslant 0$$

这就完成了证明.

第 30 届国际数学奥林匹克

联邦德国，1989

菲律宾命题

1 求证：集合$\{1,2,\cdots,1\ 989\}$可以分为117个互不相交的子集$A_i(i=1,2,\cdots,117)$，使得

(1) 每个A_i含有17个元素；

(2) 每个A_i中各元素之和相同.

此解法属于徐明曜、罗华章等

证法 1 我们把问题提得更一般些.设s,n是两个正整数.证明集合$A=\{1,2,\cdots,sn\}$可以分为n个互不相交的子集$A_1,\cdots,A_n$，使得每个集合含有s个元素，且每个集合中各元素之和相同.本题就是$s=17,n=117$.

以$S(A)$和$S(A_i)$分别表示集合A和A_i中各元素之和.我们有

$$S(A)=sn(sn+1)/2 \quad ①$$

由于这里要求$S(A_1)=\cdots=S(A_n)$，所以

$$S(A_i)=s(sn+1)/2,i=1,2,\cdots,n \quad ②$$

由式②看出，当s为奇数，n为偶数时，这种分法是不可能的.所以我们只要讨论以下两种情形.

i s为偶数；

ii s,n均为奇数.

我们的题目属于情形 ii. 情形 i 是很容易解决的，ii 要困难些.

i 我们把这sn个数用下面的方法自小至大依次排成一个s行且每行有n个数的表，即s行n列的表：第1行从1开始自左向右依次排到n，然后排第2行，要注意的是把$n+1$排在n的下面（即在同一列），且和第1行排列的方向相反，自右向左排到$2n$.一般排好第j行的最后一个数jn后，再排第$j+1$行，把$jn+1$排在jn的下面，且和第j行的排列方向相反，依次排到$(j+1)n$.下表就给出了当s是偶数时这样的排列.

由排列的方法立即看出：任意相邻两行在同一列上的两数之和都相同.由于现在s是偶数，所以，第1,2行，第3,4行，…，第$s-1,s$行都是相邻的两行，且恰好把这s行分完.因此推出：这表中

每一列中的元素之和都相同.这样,只要把第 i 列中的数组成的集合取作子集 A_i,就证明了所要的结论.

A_1	A_2	A_3	$\cdots$	A_{n-2}	A_{n-1}	A_n
1	2	3	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
$2n$	$2n-1$	$2n-2$	$\cdots$	$n+3$	$n+2$	$n+1$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\cdots$	$3n-2$	$3n-1$	$3n$
$4n$	$4n-1$	$4n-2$	$\cdots$	$3n+3$	$3n+2$	$3n+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(s-4)n+1$	$(s-4)n+2$	$(s-4)n+3$	$\cdots$	$(s-3)n-2$	$(s-3)n-1$	$(s-3)n$
$(s-2)n$	$(s-2)n-1$	$(s-2)n-2$	$\cdots$	$(s-3)n+3$	$(s-3)n+2$	$(s-3)n+1$
$(s-2)n+1$	$(s-2)n+2$	$(s-2)n+3$	$\cdots$	$(s-1)n-2$	$(s-1)n-1$	$(s-1)n$
sn	$sn-1$	$sn-2$	$\cdots$	$(s-1)n+3$	$(s-1)n+2$	$(s-1)n+1$

当 s 是奇数时,虽然也可以这样列表,但不能以相邻两行为一组把这 s 行分完,所以这样的方法不能解决 s 是奇数的情形.

应该指出,把集合 A 改为是由任意相邻的 sn 个整数组成的集合,即取 $A=\{a+1,a+2,\cdots,a+sn\}$ 时(这里 a 是任意给定的整数),当 s 为偶数时结论也成立.事实上只要在表中每个数加上 a 即可推出.这一点在证情形 ⅱ 时要用到.

ⅱ 我们只要讨论 $s=3$ 的情形.因为当奇数 $s>3$ 时,可把集合 $A=\{1,2,\cdots,sn\}$ 分为两个集合:$B=\{1,2,\cdots,3n\}$,$C=\{3n+1,3n+2,\cdots,3n+(s-3)n\}$.集合 C 有 $(s-3)n$ 个数,$s-3$ 是偶数,由情形 ⅰ 最后的说明知,它可以分为互不相交的 n 个子集 $C_1,\cdots,C_n$,每个子集有 $s-3$ 个数,且每个子集中的数之和都相同.如果我们把集合 B 也分成了互不相交的 n 个子集 $B_1,\cdots,B_n$,每个子集有 3 个数,且每个子集中的数之和都相同,那么,取 A_i 为 B_i 与 C_i 的和集($i=1,2,\cdots,n$),这样得到的 $A_1,\cdots,A_n$ 就满足要求.

现在来考虑如何分集合 B,这里 n 是奇数.通过对具体数值例子(如取 $n=3,5,7$ 等)试验,使我们会想到这样来分集合 B:先把集合 B 分为子集 $E_1=\{1,2,\cdots,2n\}$ 和 $E_2=\{2n+1,\cdots,3n\}$;然后把集合 E_1 分为 n 个互不相交的子集 $E_{11},\cdots,E_{1n}$,每个 E_{1i} 有两个数,且 $S(E_{11}),S(E_{12}),\cdots,S(E_{1n})$ 是 n 个相邻整数(这里 $S(E_{1i})$ 表示集合 E_{1i} 的数之和).如果这样的分法是可能的,不妨假定

$$S(E_{1i+1})=S(E_{1i})+1 \qquad ③$$

那么,取子集 B_i 为子集 E_{1i} 再添加 E_2 中的一个数 $3n-(i-1)$ 所组成,这样集合 B 就分成了互不相交的 n 个集合 $B_1,\cdots,B_n$,显见它们满足要求.

那么,如何来实现集合 E_1 的满足式③的这种分法呢?先来看一个具体例子. $n=5$ 时, $E_1=\{1,2,\cdots,10\}$ 可这样来分,即

E_{11}	E_{14}	E_{12}	E_{15}	E_{13}
1	2	3	4	5
8	10	7	9	6

也可以这样分,即

E_{13}	E_{11}	E_{14}	E_{12}	E_{15}
1	2	3	4	5
10	7	9	6	8

由此得到启发,对一般的集合 E_1,按第一种分法可这样来分:先自左至右依次写下 $1,2,\cdots,n$;然后这样写第 2 行:在 n 下面写 $n+1$,再自右向左一隔一地依次写下 $n+2,\cdots$,直到在 1 的下面写 $n+(n+1)/2$(注意 n 是奇数),再回过来从 $n-1$ 下面的第 2 行的空格开始,自右向左依次在这些空格中写完余下的数. 下表就给出了这样的分法.

G_1	G_2	G_3	G_4	$\cdots$	G_{n-3}	G_{n-2}	G_{n-1}	G_n
1	2	3	4	$\cdots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+\frac{n+1}{2}$	$2n$	$n+\frac{n-1}{2}$	$2n-1$	$\cdots$	$n+\frac{n+5}{2}$	$n+2$	$n+\frac{n+3}{2}$	$n+1$

若以 G_i 记上表中第 i 列数组成的集合,那么,依指标大小依次先写奇指标集合,写完后再写偶指标集合,得到 $G_1,G_3,\cdots,G_n,G_2,G_4,\cdots,G_{n-1}$.不改变这一列集合的次序,改写为 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1,n-1},E_{1,n}$,这就是我们所要的集合 E_1 的分法,且满足式③.因为 $S(G_1),S(G_3),\cdots,S(G_n)$ 是递增的相邻整数,$S(G_2),S(G_4),\cdots,S(G_{n-1})$ 也是递增的相邻整数,这两点由表的写法可直接看出,再由写法知,$S(G_n)=2n+1,S(G_2)=2n+2$,也是相邻的.

综上所述,由情形 ii 我们也可得到所要的结论. 证毕.

最后,我们要指出:由两种情形的讨论可看出,除了显然情形外,集合 A 分为两两不相交的这种子集 $A_1,\cdots,A_n$ 的分法不是惟一的,讨论分法的个数应该是一个有趣的问题,可能并不容易.

证法 2 由于 $352=3\cdot 117+1,1\ 989=17\cdot 117$,所以 $\{352,353,\cdots,1\ 989\}$ 中每个数均可惟一表示为如下形式,即

$$q\cdot 117+r,1\leqslant r\leqslant 117,3\leqslant q\leqslant 16$$

我们先把这些数按以下方式分在各个子集 A_i 中，即

$$q\cdot 117+t\in A_i,q\in 2k+1,k=0,1,2,\cdots$$

$$q\cdot 117+(118-t)\in A_i,q\in 2k,k=0,1,2,\cdots$$

这样，已对每个子集 A_i 选定了 14 个元素，在每个 A_i 中，这 14 个数之和是

$$\sum_{k=1}^{7}((2k+1)117+i)+\sum_{k=1}^{7}((2k+2)117+(118-i))=16\ 387$$

都是相等的. 下面再把剩下的数 $\{1,2,\cdots,351\}$ 来分到各个 A_i 中去. 我们用这样的办法来分：先把这些数中不被 3 整除的 $2\cdot 117$ 个数按从小到大的顺序排列为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{117},y_1,y_2,\cdots,y_{117}\}$；再把其中 3 的倍数按从大到小的顺序排列为 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{117}\}$；然后，把 x_i,y_i,z_i 这三个数分到子集 A_i. 我们来证明这样分成的 117 个互不相交的子集满足题目的要求. 从以上的讨论知，只要证明 $x_i+y_i+z_i$ 为定值.

当 $t=1$ 时，$x_1=1,y_1=176,z_1=351,x_1+y_1+z_1=528$. 假设当 $t=k$ 时，$x_k+y_k+z_k=528$，我们来证明当 $t=k+1$ 时，也一定有 $x_{k+1}+y_{k+1}+z_{k+1}=528$. 由于 z_k 是 3 的倍数，所以 x_k+y_k 也是 3 的倍数，因此，仅有以下两种情形.

ⅰ $x_k\equiv 1(\bmod 3),y_k\equiv 2(\bmod 3)$；

ⅱ $x_k\equiv 2(\bmod 3),y_k\equiv 1(\bmod 3)$.

在情形 ⅰ 将有

$$x_{k+1}=x_k+1,y_{k+1}=y_k+2,z_{k+1}=z_k-3$$

而在情形 ⅱ 将有

$$x_{k+1}=x_k+2,y_{k+1}=y_k+1,z_{k+1}=z_k-3$$

因此，总有

$$x_{k+1}+y_{k+1}+z_{k+1}=x_k+y_k+z_k=528$$

这就证明了对所有的 $1\leqslant i\leqslant 117$，总有

$$x_i+y_i+z_i=528$$

证毕.

2 锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的角平分线与三角形的外接圆交于点 A_1. 点 B_1,C_1 与此类似. 直线 AA_1 与 $\angle B,\angle C$ 的外角平分线相交于 A_0. 点 B_0,C_0 与此类似.

求证：(1) $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 面积的二倍；

(2) $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积至少是 $\triangle ABC$ 面积的四倍.

澳大利亚命题

证法 1 记 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外心为 O，外接圆半径为 R，三

内角依次为 α,β,γ. 记六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的面积为 S^*，如图30.1所示.

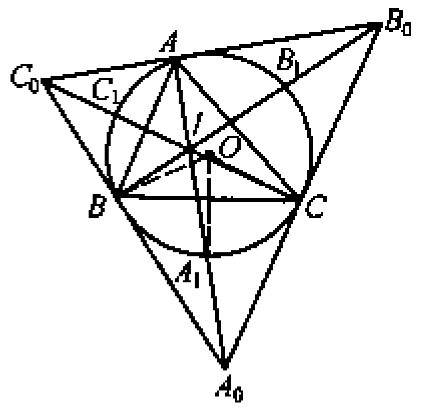


图30.1

注意到 $S_{\triangle A_1OB}=\frac{1}{2}R^2\cdot\sin\alpha$，以及有关 $\triangle BOC_1$，$\triangle C_1OA$，$\triangle AOB_1$，$\triangle B_1OC$ 和 $\triangle COA_1$ 的面积的类似等式，得出

$$S^*=\frac{1}{2}R^2(2\sin\alpha+2\sin\beta+2\sin\gamma)$$

注意到 $S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}R^2\cdot\sin 2\alpha$，以及有关 $\triangle BOA$ 和 $\triangle AOC$ 的面积的类似等式，得出

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$$

化简得 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=$

$$2\sin\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

于是
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R^2(\sin\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma)+\sin\beta\cdot\cos(\alpha-\gamma))$$

因此
$$S^*\geqslant 2S_{\triangle ABC}$$

我们看到 I 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心. 因此，A_0,C,I,B 四点共圆. 下面证明 A_1 是圆心.

$$\angle A_1CI=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_1B}+\overset{\frown}{BC_1})=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$\angle A_1IC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_1C}+\overset{\frown}{AC_1})=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

于是，$A_1C=A_1I$. 又有 $A_1C=A_1B$. 因此，A_1 是过 B,I,C 三点的圆的圆心，A_0 也在该圆上. 因为 A_1 是 IA_0 的中点，所以 $S_{A_0CIB}=2\times S_{A_1CIB}$，再对 S_{B_0AIC} 和 S_{C_0BIA} 作类似分析. 有

$$S_{\triangle A_0B_0C_0}=2S^*$$

及
$$S_{\triangle A_0B_0C_0}\geqslant 4S_{\triangle ABC}$$

证法2 (1) 记 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外心为 O，如图30.1所示. 易见 $IB\perp A_0B$，$IC\perp A_0C$，于是 I,B,A_0,C 四点共圆. 因此

此证法属于罗华章

$$\angle BIA_0=\angle BCA_0=\frac{1}{2}(\pi-\angle ACB)=$$

$$\frac{1}{2}(\pi-\angle AA_1B)=\frac{1}{2}(\angle BIA_0+\angle IBA_1)$$

由此推出
$$\angle BIA_0=\angle IBA_1$$

于是 $BA_1=IA_1$. 又因

$$\angle BA_0I=\frac{\pi}{2}-\angle BIA_0=\frac{\pi}{2}-\angle IBA_1=\angle A_0BA_1$$

于是 $BA_1=A_1A_0$. 结合前式得到 $A_1I=A_1A_0$，因此四边形 IBA_0C

的面积

$$S_{IBA_0C} = 2S_{IBA_1C}$$

同理可证 $S_{ICB_0A} = 2S_{ICB_1A}, S_{IAC_0B} = 2S_{IAC_1B}$

把上面三式相加，知(1)成立.

(2) 设 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 α,β,γ. 显然有 $\angle B_0OA_1 = \angle A_1OC = \alpha$. 从而

$$S_{OBA_1C} = R^2 \cdot \sin\alpha, S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin 2\alpha$$

其中，R 表示 $\triangle ABC$ 的外接圆半径. 同理可证

$$S_{OAB_1C} = R^2 \cdot \sin\beta, S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin 2\beta$$

以及 $S_{OAC_1B} = R^2 \cdot \sin\gamma, S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin 2\gamma$

由此推出 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$

及 $S_{AC_1BA_1CB_1} = R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$

据(1)由后式又得

$$S_{\triangle A_0B_0C_0} = 2R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

因为 $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) \leqslant$
$2\sin(\alpha + \beta) = 2\sin\gamma$

同理又有

$$\sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqslant 2\sin\alpha, \sin 2\gamma + \sin 2\alpha \leqslant 2\sin\beta$$

三式相加，得

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqslant \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$

由此得 $S_{\triangle ABC} \leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle A_0B_0C_0}$

(2)得证.

3 设 n 和 k 是正整数，S 是平面上 n 个点的集合，满足：

(1) S 中任何三点不共线；

(2) 对 S 中的每一个点 P，S 中至少存在 k 个点与 P 距离相等.

求证

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

荷兰命题

证法 1 由题意知对每点 $P_i \in S$，存在以 P_i 为圆心的一个圆 C_i，使得 C_i 上至少有 S 中的 k 个点. 我们对每个点 P_i 都取定这样的圆 C_i. 因 S 中一共有 n 个点，也一共取定了 n 个圆.

称 (P_i, C_j) 为一个"点圆对"，如果 $P_i \in C_j$. 称 (P_i, C_j, C_k)，

$j \neq k$,为一个"点双圆组",如果 $P_i \in C_j \cap C_k$.

设过点 P_i 共有 x_i 个圆,又设共有 M 个"点圆对"和 N 个"点双圆组".则显然有

$$M = \sum_{i=1}^{n} x_i, N = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(x_i - 1)}{2}$$

又显然有 $\qquad M \geqslant nk, N \leqslant n(n-1)$

于是

$$2n(n-1) \geqslant 2N = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_i) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i =$$
$$\frac{1}{n}M^2 - M = \frac{1}{n}\left(M - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n}{4} \geqslant$$
$$\frac{1}{n}\left(nk - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n}{4} = nk^2 - nk$$

由此得 $\qquad 2n - 2 \geqslant k^2 - k, 2n - \frac{7}{4} \geqslant \left(k - \frac{1}{2}\right)$

即 $\qquad k \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

注 此题不用条件(1).

证法 2 条件(1)是多余的.对集合 S 中一个点 P,由条件(2)知 S 中至少有 k 个点与 P 等距,我们取定这样的一组点,设为 $P_1, \cdots, P_t, t \geqslant k$.作向量 $\overrightarrow{PP_1}, \cdots, \overrightarrow{PP_t}$,得到了这样一个有向图 G,P 为向量的起点,$P_j(1 \leqslant j \leqslant t)$ 为终点.现在对 S 中的每个点 $V_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 作这样的有向图.在所有这些有向图中,以 V_i 为起点的向量个数设为 a_i,以 V_i 为终点的向量个数设为 b_i.显见,必有等式

此证法属于罗华章

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

且由条件(2)知,$a_i \geqslant k(1 \leqslant i \leqslant n)$.

对每一点 V_i,以它为圆心作圆,半径为它的有向图中向量的长度.这样得到的 n 个圆的交点按重数计(即一个点是两个圆的交点就算一次,当它是 k 个圆的共同交点时就算 $\binom{k}{2}$ 次)不会超过 $2\binom{n}{2}$.再注意到对每个点 V_i,它作为两圆的交点被计算了 $\binom{b_i}{2}$ 次.所以必有

$$2\binom{n}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\binom{b_i}{2}$$

由前面的讨论知

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{b_i}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}b_i\geqslant\frac{1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i\Big)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}b_i=$$

$$\frac{1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant\frac{1}{2n}(nk)^2-\frac{1}{2}(nk)$$

由以上两式得

$$2n-2\geqslant k^2-k$$

即

$$\Big(k-\frac{1}{2}\Big)^2\leqslant 2n-\frac{7}{8}$$

这就推出所要结论.

4 设 $ABCD$ 是一个凸四边形,它的三个边 AB,AD,BC 满足 $AB=AD+BC$. 四边形内,距离 CD 为 h 的地方有一点 P,使得 $AP=h+AD,BP=h+BC$. 求证

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}$$

冰岛命题

证法 1　以点 A(点 B)为圆心,以 $a=AD$(以 $b=BC$)为半径作圆,如图 30.2 所示. 按题意,$AB=AD+BC$,故两圆相切于点 E.

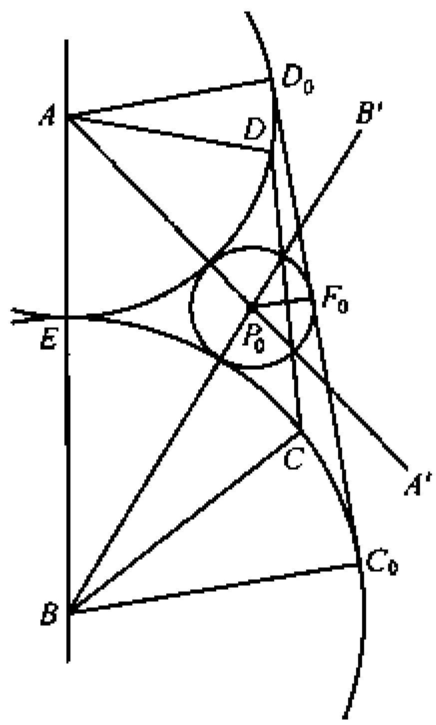


图 30.2

先考虑特殊情形. 凸四边形 ABC_0D_0,边 C_0D_0 恰是圆 A 和圆 B 的公切线. 设以 P_0 为圆心,以 h_0 为半径的圆与圆 A 及圆 B 都外切,并且与 C_0D_0 相切于点 F_0,由此可得

$$C_0D_0^2=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

$$D_0F_0^2=(a+h_0)^2-(a-h_0)^2=4ah_0$$

类似地有

$$C_0F_0^2=4bh_0$$

由于 $C_0F_0+F_0D_0=C_0D_0$,有

$$2\sqrt{ah_0}+2\sqrt{bh_0}=2\sqrt{ab}$$

即

$$\sqrt{\frac{1}{h_0}}=\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{b}}$$

再回到一般情形. 设边 CD 不是圆 A 和圆 B 的公切线,则 CD 一定在(或通过)四边形 ABC_0D_0 的内部.

设点 P 在四边形 ABC_0D_0 的内部,以 P 为圆心,以 h 为半径的圆与圆 A 及圆 B 都外切. 若 $h=h_0$,则点 P 就是 P_0;若 $h>h_0$,则点 P 在 $\angle B'P_0A'$ 的内部. 这表明,当 $h\geqslant h_0$ 时,圆 P 一定不完全在四边形 $ABCD$ 的内部. 因此,若要求圆 P 完全在 $ABCD$ 的内部,且与 CD 相切,必有 $h<h_0$,即

$$\sqrt{\frac{1}{h}}>\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{b}}$$

此证法属于罗华章

证法2　以A,B,P为圆心，分别以$R=AD,r=BC,h$为半径作圆，如图30.3所示，则三圆两两外切，且圆P与CD相切．作$AD_1\perp CD,BC_1\perp CD,PQ\perp CD$，其垂足分别为$D_1,C_1,Q$．并记$AD_1=R',BC_1=r'$．则有

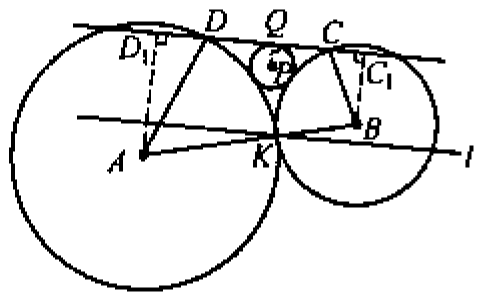


图30.3

$$C_1D_1=\sqrt{(R+r)^2-(R'-r')^2}$$

$$C_1Q=\sqrt{(r+h)^2-(r'-h)^2}$$

$$D_1Q=\sqrt{(R+h)^2-(R'-h)^2}$$

于是　$$\sqrt{(R+r)^2-(R'-r')^2}=\sqrt{(r+h)^2-(r'-h)^2}+\sqrt{(R+h)^2-(R'-h)^2}$$

两边平方后整理得

$$(R-h)(r-h)+(R'-h)(r'-h)-2h^2=\sqrt{(r+h)^2-(r'-h)^2}\sqrt{(R+h)^2-(R'-h)^2} \quad ①$$

过圆A，圆B切点K作直线$l\parallel CD$，易见圆P含于l与CD两直线之间，于是有$R+R'\geqslant 2h,r+r'\geqslant 2h$($2h$为圆$P$的直径)．再由$R'\leqslant R,r'\leqslant r$，得

$$(R'-h)(r'-h)\leqslant(R-h)(r-h)$$

$$(r+h)^2-(r'-h)^2\geqslant(r+h)^2-(r-h)^2=4rh$$

$$(R+h)^2-(R'-h)^2\geqslant(R+h)^2-(R-h)^2=4Rh$$

代入式①得

$$2(R-h)(r-h)-2h^2\geqslant 4\sqrt{Rr}\cdot h$$

配方后即为　$$Rr\geqslant(\sqrt{Rh}+\sqrt{rh})^2$$

故　$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}$$

瑞典命题

5 求证：对任何正整数n，存在n个相继的正整数，它们都不是素数的整数幂．

证法1　本题即是要找出这样的n个相邻正整数，每个都至少有两个不同的素因子，所以这是初等数论的一个整除问题．我们用归纳法来证．$n=1$时结论显然成立．假定结论对$n=k(k\geqslant 1)$成立，即存在正整数a使得k个相邻正整数

$$a,a+1,\cdots,a+(k-1) \quad ①$$

每个都有两个不同的素因子，不妨设$a+i$的两个不同的素因子是$p_i,q_i,i=0,1,\cdots,k-1$．记$P_k=p_0q_0p_1q_1\cdots p_{k-1}q_{k-1}$．显见，对任意非负整数$t$，$k$个相邻正整数

$$a+tP_k,a+tP_k+1,\cdots,a+tP_k+(k-1) \quad ②$$

也满足所说的要求,因为 $a+tP_k+i$ 和 $a+i$ 一样也有素因子 p_i,q_i. 我们来证明结论对 $n=k+1$ 也成立,即存在正整数 x 使得 $k+1$ 个相邻正整数

$$x,x+1,\cdots,x+(k-1),x+k \quad ③$$

每个都有两个不同的素因子. 很自然,希望从形如 $a+tP_k$ 的数中去找这样的 x,因为这时由归纳假定和前面的说明知,对任意非负正整数 t,当 $x=a+tP_k$ 时,式 ③ 的前 k 个正整数都有两个不同的素因子,这样,就只要去决定 t,使得

$$x+k=a+tP_k+k$$

也有两个不同的素因子. 下面来求满足这样要求的 t.

假定 $x+k$ 有两个不同的素因子 p_k,q_k(待定),就有

$$x+k=sp_kq_k$$

这样,s 和 t 满足关系式

$$sp_kq_k-tP_k=a+k \quad ④$$

这就是熟知的关于变数 s,t 的一次不定方程. 我们知道,只要 p_kq_k 和 P_k 互素,不定方程 ④ 一定有解. 由于素数有无穷多个,对已知的 P_k,一定可以找到不同的素数 p_k,q_k 使 p_kq_k 和 P_k 互素. 这样,对取定的这种 p_k,q_k 必有 t_0,s_0 是方程 ④ 的一组解,且对任意整数 u

$$t=t_0+up_kq_k,s=s_0+uP_k$$

也都是方程 ④ 的解. 所以,一定可以取到 u 使 t 为非负整数. 因此,结论对 $n=k+1$ 也成立. 证毕.

熟悉初等数论的读者,不难看出本题就是解一次同余方程组,利用孙子定理即可证明. 也就是对取定的 $2n$ 个不同的素数 p_0,$q_0,p_1,q_1,\cdots,p_{n-1},q_{n-1}$,求解一次同余方程组

$$x+i\equiv 0(\bmod p_{i-1}q_{i-1}),i=0,1,\cdots,n-1$$

的正整数解.

证法 2 取 $2n$ 个互不相同的素数 $p_1,q_1,p_2,q_2,\cdots,p_n,q_n$. 由孙子定理知同余方程组

此证法属于罗华章

$$x\equiv -j(\bmod p_jq_j),j=1,2,\cdots,n$$

有解,可取正整数 N 满足这同余方程组,这样,$N+1,N+2,\cdots,N+n$ 这 n 个相邻正整数就都不是素数的方幂,因为 $p_jq_j\mid N+j$.

6 设 n 是正整数. 我们说集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的一个排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 具有性质 P,如果在 $\{1,2,\cdots,2n-1\}$ 当中至少有一个 i 使 $|x_i-x_{i+1}|=n$ 成立. 求证:对于任何 n,具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列个数多.

波兰命题

证法 1 在集合$\{1,2,\cdots,2n\}$中，使差的绝对值等于 n 的数对是$\{1,n+1\},\{2,n+2\},\cdots,\{n,2n\}$。因此，具有性质 P 的排列就是这样的排列：它至少有两个相邻数是属于上述 n 个数对之一。我们说一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$具有性质 $a_j(1\leqslant j\leqslant n)$，如果数对$\{j,n+j\}$中的两个数是这个排列中的相邻数(不计次序)。这样就可用容斥原理来解本题。

以 S 记具有性质P 的排列个数，以 S_j 记所有具有性质a_j 的排列的集合及其个数，对取自集合$\{1,2,\cdots,n\}$中的一组数 $j_1<j_2<\cdots<j_l$，以 $S_{j_1j_2\cdots j_l}$ 记同时具有性质$a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_l}$ 的所有排列的集合及其个数。由容斥原理知

$$S=\sum_{1\leqslant j_1\leqslant n}S_{j_1}-\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}S_{j_1j_2}+\sum_{1\leqslant j_1<j_2<j_3\leqslant n}S_{j_1j_2j_3}-\cdots+ (-1)^{l-1}\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_l\leqslant n}S_{j_1j_2\cdots j_l}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{12\cdots n} \quad ①$$

由于总的排列数为$(2n)!$，所以本题就是要证明

$$S>(2n)!/2 \quad ②$$

下面来计算 $S_{j_1\cdots j_l}$。S_{j_1} 中的每个排列必定是数j_1和$n+j_1$是这排列中的相邻数(不计次序)，因此，个数 S_{j_1} 就相当于把 j_1 和 $n+j_1$ 看做一个数，再和另外 $2l-2$ 个数一起任意排列的个数，由于 j_1，$n+j_1$ 不计次序，因此

$$S_{j_1}=2\cdot(2n-1)!$$

进而有

$$\sum_{1\leqslant j_1\leqslant n}S_{j_1}=2C_n^1(2n-1)! \quad ③$$

同理，$S_{j_1\cdots j_l}$ 就相当于把j_1 和 $n+j_1$ 看做一个数，j_2 和 $n+j_2$ 看做一个数，……，j_l 和 $n+j_l$ 看做一个数，再和另外 $2n-2l$ 个数在一起任意排列的个数，由于 $j_t,n+j_t$ 不计次序$(t=1,\cdots,l)$，所以

$$S_{j_1\cdots j_2}=2^l\cdot(2n-l)!$$

进而有

$$\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant n}S_{j_1\cdots j_l}=2^lC_n^l(2n-l)! \quad ④$$

由式①,③及④推出

$$\begin{aligned}S={}&2C_n^1(2n-1)!-2^2C_n^2(2n-2)!+\cdots+\\&(-1)^{l-1}2^lC_n^l(2n-l)!+\cdots+(-1)^{n-1}2^nC_n^nn!=\\&2\cdot(2n-1)!\left(C_n^1-\frac{2}{2n-1}C_n^2\right)+\\&2^3\cdot(2n-3)!\left(C_n^3-\frac{2}{2n-3}C_n^4\right)+\cdots+\\&2^{2t-1}\cdot(2n-2t+1)!\cdot\end{aligned}$$

$$\left(C_n^{2t-1}-\frac{2}{2n-2t+1}C_n^{2t}\right)+\cdots \quad ⑤$$

当 $1\leqslant t<n/2$ 时

$$C_n^{2t-1}-\frac{2}{2n-2t+1}C_n^{2t}=C_n^{2t-1}\left(1-\frac{2}{2n-2t+1}\cdot\frac{n-2t+1}{2t}\right)>C_n^{2t-1}\left(1-\frac{1}{2t}\right)$$

由以上两式立即推出，式 ⑤ 中每项均是正的，且有

$$S>2\cdot(2n-1)!C_n^1(1/2)+2^3\cdot(2n-3)!C_n^3(3/4)+\cdots>(1/2)\cdot(2n)!$$

这就证明了式 ②. 事实上，为了证明本题只要计算式 ① 的前两项，是很简单的.

证法2 记具有性质 P 的排列个数为 H_n. 一般地，设 $1\leqslant k\leqslant n$，集合 $\{1,2,\cdots,k,n+1,n+2,\cdots,n+k\}$ 的具有性质 P 的排列——即 $(x_1,\cdots,x_{2k})$ 中至少有一个 $i(1\leqslant i\leqslant 2k-1)$ 使 $|x_i-x_{i+1}|=n$ 成立的排列的个数记为 H_k. 我们来证明

此证法属于罗华章

$$H_k>(2k)!/2$$

由此即得所要结论. 当 $k=1$ 时，$H_1=2$ 结论显然成立. 假设对 $k=j,1\leqslant j\leqslant n-1$，结论成立，我们来推出结论对 $k=j+1$ 也成立.

首先注意到这样一个事实：对任一 x 属于集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$，存在惟一的属于这集合的 y，使得 $|x-y|=n$.

(1) 在集合 $\{1,2,\cdots,j,n+1,\cdots,n+j\}$ 的每一个排列中，嵌入 $j+1,n+j+1$，且使这两数相邻，这样共可得到 $2(2j+1)\cdot(2j)!$ 个具有性质 P 的集合 $\{1,2,\cdots,j+1,n+1,\cdots,n+j+1\}$ 的排列.

(2) 对集合 $\{1,2,\cdots,j,n+1,\cdots,n+j\}$ 的每一个具有性质 P 的排列，嵌入 $j+1,n+j+1$，使得这两个数不相邻，但所得的集合 $\{1,2,\cdots,j+1,n+1,\cdots,n+j+1\}$ 的排列仍具有性质 P，这种嵌入至少有 $2j(2j-1)$ 种. 所以用这样的方法得到的集合 $\{1,2,\cdots,j+1,n+1,\cdots,n+j+1\}$ 的具有性质 P 的排列数大于等于 $2j(2j-1)H_j$. 综合(1)，(2) 得到

$$H_{j+1}\geqslant 2j(2j-1)H_j+2(2j+1)\cdot(2j)!$$

由此及假设知

$$H_{j+1}>j(2j-1)\cdot(2j)!+2(2j+1)\cdot(2j)!>(2j+2)!/2$$

这就证明了所要的结论.

第 31 届国际数学奥林匹克

中国，1990

印度命题

1 圆的两弦 AB 与 CD 交于圆内一点 E. 设 M 是弦 AB 上严格在 E 与 B 之间的一点. 过 D,E,M 作一圆，设在点 E 与该圆相切的直线分别与直线 BC 和 CA 相交于点 F 和 G. 设 $AM/AB=t$，试求 EG/EF(用 t 来表示).

解法 1 用线段将点 D 与点 A,B 和 M 连结起来，如图 31.1 所示. 因为

$$\angle ECF=\angle MAD, \angle CEF=\angle DEG=\angle EMD$$

所以

$$\triangle CEF \backsim \triangle AMD$$

由此得到

$$CE\cdot MD=EF\cdot AM \quad ①$$

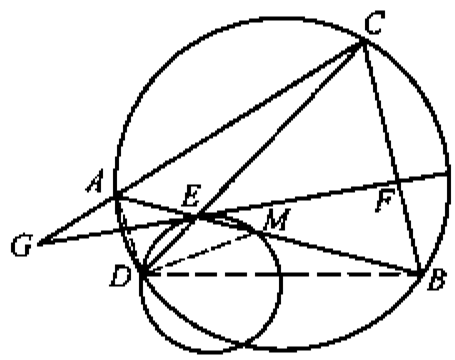


图 31.1

另一方面，因为

$$\angle ECG=\angle MBD$$

$$\angle CGE=\angle CEF-\angle GCE=\angle AMD-\angle MBD=\angle BDM$$

所以

$$\triangle CGE \backsim \triangle BDM$$

因而有

$$GE\cdot MB=CE\cdot MD \quad ②$$

由 ① 和 ② 立即得到

$$GE\cdot MB=EF\cdot AM$$

由此，进一步得到

$$\frac{CE}{EF}=\frac{AM}{MB}=\frac{tAB}{(1-t)AB}=\frac{t}{1-t}$$

注 在上面的讨论中，我们用到了这样的事实：点 G 在 CA 延长线上. 这一事实可证明如下. 因为 M 严格在 E 与 B 之间，所以

$$\angle BDE>\angle MDE$$

于是有

$$\angle BAC=\angle BDE>\angle MDE=\angle BEF$$

因而直线 CA 与 FE 的交点 G 应该在线段 CA 的延长线上.

解法 2 如图 31.1 所示，由点 M 严格在 EB 内知 $\angle MEF<\angle MAC$，所以点 G,A 在点 C 的同侧. 同理，点 F,B 在点 C 同侧.

此解法属于余嘉联、汪建华

由面积公式、正弦定理等推出

$$\frac{GE}{EF}=\frac{\sin\angle ECG}{\sin\angle ECF}\cdot\frac{\sin\angle EFC}{\sin\angle EGC}$$

同理推出

$$\frac{BM}{AM}=\frac{\sin\angle BDM}{\sin\angle ADM}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ABD}$$

由关于弦切角、圆周角的定理推出

$$\angle BDM=\angle CGE,\angle ADM=\angle CFE$$

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{BM}=\frac{t}{1-t}$$

解法3 作 AP 平行于 GF，AP 分别交 CD，CB 于点 H，P，如图31.2所示，得出

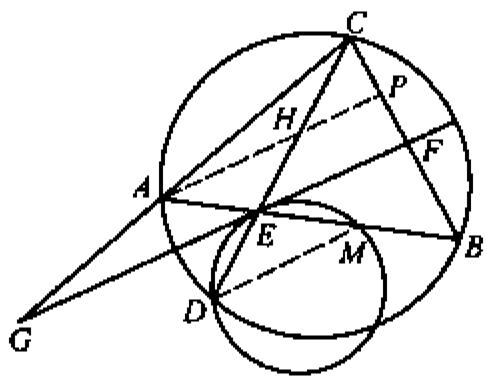


图31.2

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AH}{PH}$$

$$\angle BEF=\angle EDM,\angle HAE=\angle MDE \quad ③$$

由此推出 A,H,M,D 四点共圆.

由 ③ 及 A,C,B,D 四点共圆推出 $\angle EHM=\angle EAD=\angle ECB$，因而 HM 和 BC 平行，并有

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AH}{PH}$$

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{BM}=\frac{t}{1-t}$$

解法4 如图31.1所示，根据三角形面积公式，我们有

$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle FEC}}=1+\frac{S_{\triangle FEB}}{S_{\triangle FEC}}\cdot\frac{S_{\triangle DME}}{S_{\triangle DME}}=$$

$$1+\frac{FE\cdot BE\cdot\sin\angle FEB}{FE\cdot CE\cdot\sin\angle FEC}\cdot\frac{MD\cdot ME\cdot\sin\angle DME}{MD\cdot DE\cdot\sin\angle MDE}$$

注意到 $\angle AEG=\angle FEB=\angle MDE,\angle FEC=\angle GED=\angle DME$，就有

$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle FEC}}=1+\frac{BE\cdot ME}{DE\cdot CE}=1+\frac{BE\cdot ME}{BE\cdot AE}=\frac{AM}{AE}$$

同理

$$\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle GEC}}=1-\frac{S_{\triangle GEA}}{S_{\triangle GEC}}\cdot\frac{S_{\triangle DMC}}{S_{\triangle MDC}}=1-\frac{GE\cdot AE}{DE\cdot MD}\cdot\frac{MD\cdot ME}{CE\cdot CE}=$$

$$1-\frac{AE\cdot ME}{DE\cdot CE}=1-\frac{AE\cdot ME}{AE\cdot BE}=\frac{BM}{BE}$$

由此即得

$$\frac{GE}{EF}=\frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle FEC}}=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BEC}}\cdot\frac{BE}{BM}\cdot\frac{AM}{AE}=\frac{AM}{BM}=\frac{t}{1-t}$$

2 设 $n \geqslant 3$,考查在圆周上给定的由 $2n-1$ 个不相同的点组成的集合 E.同时,考查将 E 中 k 个点染黑的染色办法.如果某种染色办法使得某两个染黑的点之间所夹的弧之一的内部恰含有 E 中的 n 个点,那么我们就说这种染色办法是"好的".试求具有以下性质的最小的 k:将 E 中任意的 k 个点染黑的染色办法都是"好的".

捷克斯洛伐克命题

此解法属于 张筑生

解法 1 E 中的两个点称为是"相关的",如果这两点所夹的弧段之一的内部恰含有 E 的 n 个点.沿顺时针方向依次用 $1,2,\cdots,2n-1$ 给 E 的点标号(从任意指定一点开始).这样,与点 i 相关的点仅有两个:$i+n+1$(当 $i+n+1>2n-1$ 时是 $i+n+1-(2n-1)$),$i+n-2$(当 $i+n-2>2n-1$ 时是 $i+n-2-(2n-1)$).所以,E 中两点相关的充要条件是它们的标号相差 $n+1$ 或 $n-2$,本题就是要决定具有以下性质的自然数 k 的最小值:E 的任意 k 个点中至少有两点是相关的.

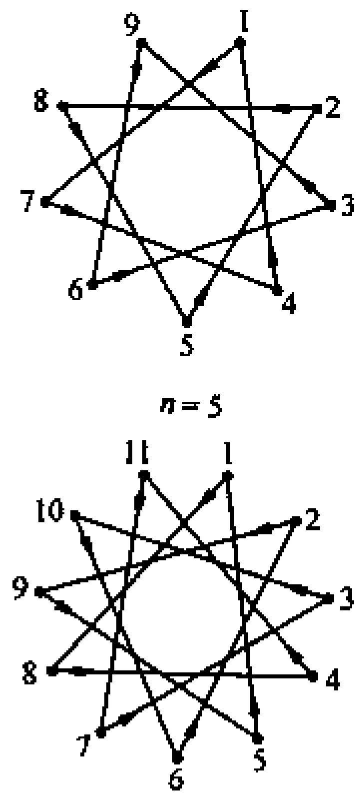


图 31.3

现将 E 中任意两个相关的点都用线段连结起来,我们就得到以 E 中的点为顶点,以这些线段为边的图 G.由于每一点有且仅有两个点和它相关,所以图 G 在其每一个顶点 p 处的度数 $d(p)$(即以 p 为一个端点的边的个数)都等于 2.从任一顶点 i 出发,沿图 G 的边连结与 i 相关的点 $i+n+1$(标号见前约定),依次这样连结,那么若干步后必回到原顶点 i,这是因为总共只有有限个点,且每点的度数均为 2.这样就得到了图 G 的一个子图,我们称它为圈.由于顶点的度数均为 2,所以任意两个不同的圈(如果有的话)一定没有公共顶点.因而,图 G 是由一些(可以是一个)没有公共顶点的圈组成,相关的点就是同一个圈上相邻的点(即一条边的两端点).图 31.3 画出了 $n=5$ 时,图 G 由三个圈:$\{1,7,4,1\}$,$\{2,8,5,2\}$,$\{3,9,6,3\}$ 组成;$n=6$ 时,图 G 只有一个圈:$\{1,8,4,11,7,3,10,6,2,9,5,1\}$.

下面来证明:对任意两个点 $1 \leqslant i,j \leqslant 2n-1$,它们在同一个圈上的充要条件是存在整数 x,y,使得

$$i-j=x(n+1)+y(2n-1)$$

条件的必要性由圈的构造法及标号的约定立即推出.下证充分性.不妨设 $x \leqslant 0$.若 $x=0$,则 $y=0$,即 $i=j$ 为同一点,结论当然成立.若 $x<0$,因为 i 和

$$i_1=i+(n+1)$$

或 $$i'_1=i_1-(2n-1)=i+(n+1)-(2n-1)$$

(当 $i+(n+1)>2n-1$ 时)在同一个圈上,所以有

$$i_1-j=(x+1)(n+1)+y(2n-1)$$

或 $$i'_1-j=(x+1)(n+1)+(y-1)(2n-1)$$

依此下去,总可得到一点 i',$1\leqslant i'\leqslant 2n-1$,它和 $i,i_1,i_2,\cdots$ 在同一个圈上,且满足

$$i'-j=(x+(-x))(n+1)+y'(2n-1)=y'(2n-1)$$

这表明 i' 和 j 为同一点.这就证明了充分性.

由于

$$\begin{aligned}(n+1,2n-1)&=(n+1,2n-1-2(n+1))=\\&(n+1,-3)=(n+1-3n,-3)=\\&(3,2n+1)\end{aligned}$$

以下分两种情形来讨论.

i $3\nmid 2n-1$,这时 $(n+1,2n-1)=1$,所以必有整数 s,t 使得

$$s(n+1)+t(2n-1)=1$$

因此,对任意两点 $1\leqslant i,j\leqslant 2n-1$,必有整数 x,y,使得

$$i-j=x(n+1)+y(2n-1)$$

所以,E 中所有点在同一个圈上,即 G 是由单独一个圈构成.沿这圈每隔一个顶点取一个顶点,可得 $\left[\frac{2n-1}{2}\right]=n-1$ 个两两不相邻,即不相关的点.但是,任取 n 个点,就必定会出现一对相邻,即相关的点.所以,这时 k 的最小值等于 n.

ii $3\mid 2n-1$.这时 $(n+1,2n-1)=3$.所以一定存在整数 s,t 使

$$s(n+1)+t(2n-1)=3$$

因此,对两个点 $1\leqslant i,j\leqslant 2n-1$ 存在 x,y,使得有

$$i-j=x(n+1)+y(2n-1)$$

成立的充要条件是 $3\mid i-j$.这样就推出:1,2,3这三个点属于不同的圈,以及任一点必属于其中的一个圈.因而,G 由三个两两没有公共顶点的圈组成,每个圈含有 $(2n-1)/3$ 个顶点.在每个圈上分别每隔一个顶点取一个顶点,可在每个圈上得到 $\left[\frac{(2n-1)/3}{2}\right]$ 个两两不相邻,即不相关的点,这样,总共得到

$$3\left[\frac{(2n-1)/3}{2}\right]=3\cdot\frac{(2n-1)/3-1}{2}=n-2$$

个两两不相关的点.但是,任取 $n-1$ 个点,就必定会有 $\left[\frac{(2n-1)/3}{2}\right]+1$ 个点属于同一个圈,因此,必有两个点相邻,即相关.所以,这时 k 的最小值等于 $n-1$.

注 本题若利用同余概念来做,可以表述得更简洁.

此解法属于江建华、王崧

解法2 (1)按顺时针方向,从某点开始依次将这 $2n-1$ 个点编号为 $1,2,\cdots,2n-1$. 并继续往下重复编号, $2n,2n+1,\cdots$. 这样,每个点有无穷多个编号,但只要

$$i \equiv j(\bmod 2n-1)$$

i 和 j 就代表同一个点,反过来也正确.

(2) 当 $3\nmid 2n-1$ 时, $(2n-1,n-2)=1$. 在这种情形下,我们从点1开始,依此将点

$$a_r = 1 + r(n-2)$$

与点
$$a_{r+1} = 1 + (r+1)(n-2)$$

连线,取 $r=0,1,\cdots,2n-2$. 由于 $(2n-1,n-2)=1$, 所以,当 r 遍历模 $2n-1$ 的一个完全剩余系 $0,1,\cdots,2n-2$ 时, $1+r(n-2)$ 也遍历模 $2n-1$ 的一个完全剩余系. 因此,从点1开始的这一条连线连结了所有这 $2n-1$ 个点,且每点恰出现一次. 注意到 a_{2n-1} 和 a_0 是同一点,所以,这一连线形成一个回路 T.

(3) 将点 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n-2}$ 中任意 n 个点染黑,则必有两个相邻点 a_{r_0},a_{r_0+1} 同时被染黑,因此,这种染色方式一定是好的.

(4) 将 $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-3}$ 这 $n-1$ 个点染黑,这种染色方式不是好的.

(5) 当 $3\nmid 2n-1$ 时, k 的最小值为 n.

(6) 当 $3\mid 2n-1$ 时, $(2n-1,n-2)=3$. 记点

$$a_{1,r} = 1 + r(n-2)$$
$$a_{2,r} = 2 + r(n-2)$$
$$a_{3,r} = 2 + r(n-2)$$

(7) 将点 $a_{1,r}$ 与点 $a_{1,r+1}$ 相连, 当依次取 $r=0,1,\cdots,\frac{(2n-1)}{3}-1$ 时得到一个回路 T_1, 所有模3余1的点在 T_1 中恰出现一次. 同样的,将点 $a_{2,r}$ 与 $a_{2,r+1}$ 相连,得到回路 T_2, 所有模3余2的点在 T_2 中恰出现一次;将点 $a_{3,r},a_{3,r+1}$ 相连,得到回路 T_3, 所有模3余0的点在 T_3 中恰出现一次. 此外,回路 T_1,T_2,T_3 两两没有公共点,每个回路中有 $\frac{(2n-1)}{3}$ 个点.

(8) 若将点 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n-2}$ 中的任意 $n-1$ 个点染黑,则必有一个回路 T_j 中有 $\left[\frac{n-1}{3}\right]+1=\frac{n-2}{3}+1$ 个点,进而推出在这回路 T_j 中必有相邻两点 a_{j,r_0},a_{j,r_0+1} 都被染黑. 因此,这种染色方式一定是好的.

(9) 若将 $a_{j,1},a_{j,3},\cdots,a_{j,(2n-7)/3}$, $j=1,2,3$, 这 $n-2$ 个点染黑,则这种染色方法不是好的.

(10) 当 $3\mid 2n-1$ 时, k 的最小值为 $n-1$.

解法 3 依逆时针方向，将给定的 $2n-1$ 个点顺次记为 A_1，$A_2,\cdots,A_{2n-1}$，为方便计，约定当 $i>2n-1$ 时

$$A_i=A_{i-(2n-1)}=A_{i-2n+1}$$

对于任意点 A_i，与它相隔 n 个点的点恰有两个，即 A_{i+n+1} 与 A_{i+n-2}. 我们把这两个点称为 A_i 的关联点，显然，如果在一个染色中，有一对黑色点互为关联点，则这个染色方式就是好的.

我们先证明，k 的最小值不大于 n. 事实上，假定 $2n-1$ 个点中有 n 个点染成了黑色，而且任何一对黑色的点都不是关联点，则从圆周上任一黑点出发，在圆周上沿任何方向的第 $n+1$ 个点都是无色的. 因此，对于每一个黑点，都对应两个无色点. 这样，n 个黑点可共得 $2n$ 个无色点，但其中某些无色点可能被重复计数了. 但任何一个无色点，至多只能是两个黑点的关联点，即最多可被计数两次. 这样，至少有 n 个不同的无色点，与共有 $2n-1$ 个点的题设矛盾. 因此，至少有一对黑色点是关联点，即染色方式是好的，即 k 的最小值不大于 n.

现分两种情况进行讨论.

i 当 $3\mid 2n-1$ 时，可设 $2n-1=3m$. 将所给的 $2n-1$ 个点分为三组，即

$$S_i=\{A_j\mid j=3t+i,t=0,1,\cdots,m-1\},i=1,2,3$$

注意到 m 为奇数，故

$$n-2=3\left(\frac{m-1}{2}\right)=3\left[\frac{m}{2}\right]$$

$$n+1=3\left[\frac{m}{2}\right]+3$$

都是 3 的倍数，于是 A_{i+n+1} 及 A_{i+n-2} 都与 A_i 同属一个组，即每一个点与它的两个关联点都在同一个组之中，若将 S_1,S_2,S_3 各组中前 $\left[\frac{m}{2}\right]$ 个点染成黑色，则任意两个黑点 A_r,A_s 的标号 r,s 都有

$$|r-s|\leqslant 3\left[\frac{m}{2}\right]-1$$

因而 $|r-s|$ 既不等于 $n-2$，也不等于 $n+1$，所以 A_r,A_s 不是关联点对，这就表明能够将 $3\left[\frac{m}{2}\right]=n-2$ 个点染成黑色，使得任何两个黑点都不满足命题条件. 由此可知 k 的最小值大于等于 $n-2$.

另一方面，若将 $n-1$ 个点染成黑色，则 S_1,S_2,S_3 中，必有一个组，至少含有 $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ 个黑点，与前面类似的证明，可知这一组中至少有一对黑色点互相关联，即染色方式是好的. 因此 k 的最小值为 $n-1$.

ⅱ 当 $3\nmid 2n-1$ 时，可设 $2n-1=3m\pm 1$，将 $2n-1$ 个点分成两组，即

$$S=\{A_j \mid j=3t+1, t=0,1,\cdots,n-2\}$$

$$T=\{A_j \mid j=n-1+3t, t=0,1,\cdots,n-1\}$$

显然 S 中有 $n-1$ 个点，T 中有 n 个点，$S\cap T=\varnothing$，不难看出，相互关联的点必不在同一组之中，如果把 S 中的点都染黑色，则任何两个黑点都不满足题设条件，由此可知，k 的最小值大于 $n-1$，因而这个最小值等于 n.

综上所述，当 $3\mid 2n-1$ 时，k 的最小值是 $n-1$，当 $3\nmid 2n-1$ 时，k 的最小值是 n.

解法 4 将圆上的点从某一点起按顺时针方向编号为 $A_1, A_2,\cdots,A_i,\cdots,A_{2n-1}$，并规定当 $j>2n-1$ 时，$A_j=A_i$，若 $j\equiv i(\mathrm{mod}\ 2n-1)$，$1\leqslant i\leqslant 2n-1$，因 A_i 与 A_{i+n+1} 之间恰好有 n 个点，所以，一种染色方式是好的的充分必要条件是至少有一对 A_i 和 A_{i+n+1} 同为黑色. 下面分两种情形讨论.

ⅰ 当 $(2n-1,n+1)=1$ 时，则

$$1,(n+1)+1,2(n+1)+1,\cdots,(2n-2)(n+1)+1$$

恰好是模 $2n-1$ 的一个完全剩余系，故点列

$$A_1, A_{(n+1)+1}, A_{2(n+1)+1},\cdots,A_{(2n-2)(n+1)+1} \quad ①$$

恰好就是圆上的 $2n-1$ 个点. 将 ① 中处于偶数位置的 $n-1$ 个点染成黑色，处于奇数位置的点都不染色，这时 ① 中将没有任何两个相邻的点同为黑色，染色方式是不好的，故 k 的值不能小于 n. 但如将 ① 中 n 个点染黑色，则必然至少有两个相邻的点同为黑色（把 $A_{(2n-2)(n+1)+1}$ 与 A_1 看做相邻的），这时染色方式就是好的. 所以 k 的最小值等于 n.

ⅱ 当 $(2n-1,n+1)=h>1$ 时，则因

$$(2n-1)+(n+1)=3n, h\mid n+1$$

故 $h\nmid n$，从而 $h\mid 3$，即 $h=3$，令 $2n-1=3m, n+1=3u$，将圆上的 $2n-1$ 个点分成三组，即

$$S_i=\{A_i \mid j=3t+i, t=0,1,\cdots,m-1\}, i=1,2,3$$

考虑集

$$S'_i=\{A_i, A_{(n+1)+i}, A_{2(n+1)+i},\cdots,A_{(m-1)(n+1)+i}\}=$$
$$\{A_i, A_{3u+i}, A_{3(2u)+i},\cdots,A_{3((m-1)u)+i}\}, i=1,2,3$$

注意到 $(u,m)=1$，故

$$0,u,2u,\cdots,(m-1)u$$

是模 m 的一个完全剩余系，从而

$$S_i=S'_i, i=1,2,3$$

显然在同一个 S'_i 中相邻的两点中恰有 n 个点，不在同一个 S'_i 中的任何两点之间都不可能恰有 n 个点，好的染色的充要条件是在某一 S'_i 中有两个相邻的点同为黑色.

注意到 m 是奇数，将 $S'_i(i=1,2,3)$ 中处于偶数位置的 $\frac{m-1}{2}$ 个点染成黑色，其余的点不染色，则任一 S'_i 中都没有两相邻的点同为黑色. 这时共染黑

$$3\cdot\frac{m-1}{2}=\frac{3m-3}{2}=\frac{2n-4}{2}=n-2$$

个点，故 k 不能小于 $n-1$. 若在 S'_1,S'_2,S'_3 中共染黑 $n-1$ 个点，则至少有某一 S'_i 中有 $\frac{m-1}{2}+1$ 个黑色的点，至少有两个相邻的点同为黑色（A_i 与 $A_{(m-1)(n+1)+i}$ 视为相邻的），故 k 的最小值为 $n-1$.

综上所述，我们有

$$k_{\min}=\begin{cases}n, & \text{当}(2n-1,n+1)=1\text{ 即 }3\nmid 2n-1\text{ 时}\\ n-1, & \text{当}(2n-1,n+1)>1\text{ 即 }3\mid 2n-1\text{ 时}\end{cases}$$

3 试决定能使 $\frac{2^n+1}{n^2}$ 是整数的一切整数，$n>1$.

罗马尼亚命题

解法 1 首先，因为 2^n+1 是奇数，所以满足要求的 n 必须是奇数. 其次，显然 $n=3$ 是本题的一个解. 下面将证明本题无其他解，因而 $n=3$ 是惟一解. 因为任何奇整数 n 都可表示成

$$n=3^lm,\ l\geqslant 0,2\nmid m,3\nmid m$$

所以只须证明：对于能使得 $n^2\mid 2^n+1$ 成立的 $n=3^lm$，必有

(1) $l\leqslant 1$；

(2) $m=1$.

为了证明(1)，将利用以下事实.

引理 1 对于奇整数 $s>0$，必有

$$2^{2s}-2^s+1\equiv 3\pmod 9$$

引理 1 的证明 该引理的结论可以通过观察下表而得到.

$2^{2t}-2^t+1$ 的 mod 9 剩余

t	2^{2t}	-2^t	1	$2^{2t}-2^t+1$
1	4	7	1	3
2	7	5	1	
3	1	1	1	3
4	4	2	1	
5	7	4	1	3
6	1	8	1	
7	4	7	1	3

上表是循环的，从 $t=7$ 起重复出现从 $t=1$ 开始的情形，这就证

明了引理 1.

(1) 的证明 设 $l \geqslant 1$,则有

$$2^n+1=2^{3^l\cdot m}+1=(2^{3^{l-1}m}+1)(2^{2\cdot 3^{l-1}m}-2^{3^{l-1}m}+1)=\cdots=$$
$$3\prod_{k=0}^{l-1}(2^{2\cdot 3^k m}-2^{3^k m}+1)$$

因为 $n=3^{lm}$,$3^{2l}\mid n^2$,所以

$$3^{2l}\mid 2^n+1=2^{3^l m}+1$$

由引理 1 可知

$$3^l\mid\prod_{k=0}^{l-1}(2^{2\cdot 3^k m}-2^{3^k m}+1)$$
$$3^{l+1}\nmid\prod_{k=0}^{l-1}(2^{2\cdot 3^k m}-2^{3^k m}+1)$$

因而有

$$3^l\mid 3$$

由此得知 $l\leqslant 1$.

为了证明(2),将利用以下简单事实.

引理 2 对于给定的自然数 a 和 h,设 j 是最小的自然数,使得

$$a^j\equiv -1 \pmod h$$

如果非负整数 $r<j$ 使得

$$a^r\equiv \pm 1 \pmod h$$

那么必有 $r=0$.

引理 2 的证明 对于

$$a^r\equiv -1 \pmod h$$

的情形,利用 j 的最小性就能得到结论 $r=0$,对于

$$a^r\equiv 1 \pmod h$$

的情形,我们仍利用 j 的最小性.注意到

$$a^{j-r}\equiv a^{j-r}\cdot a^r\equiv a^j\equiv -1 \pmod h$$

以及

$$0\leqslant r<j$$

即可断定 $r=0$.

(2) 的证明 用反证法.若 $m\neq 1$,设 $p\geqslant 5$ 是 m 的最小素因数,则

$$2^n\equiv -1 \pmod p$$

设 j 是最小的自然数,使得

$$2^j\equiv -1 \pmod p$$

如果

$$n=qj+r,0\leqslant r<j$$

那么

$$(-1)^q 2^r\equiv 2^{qj}\cdot 2^r\equiv -1 \pmod p$$

即

$$2^r\equiv(-1)^{q+1} \pmod p$$

根据引理 2,应有 $r=0$,由此得知

$$j \mid n$$

另一方面,由费马小定理可知

$$2^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$$

因为 $p-1 \neq 0$,根据引理2必有

$$p-1 \geqslant j$$

但 $p \geqslant 5$ 是 m 的最小素因数,而 $j \mid n$,所以只能有 $j=1$ 或 $j=3$,对这样的 j,由

$$2^{j} \equiv -1(\bmod p)$$

可得 $p \mid 3$ 或 $p \mid 9$,但这与 $p \geqslant 5$ 矛盾.这证明了 $m=1$.

最后的结论:惟一满足要求的解是

$$n=3$$

解法2 周彤在证明中用了欧拉定理:设 $m \geqslant 1,(a,m)=1$,则有 $a^{\phi(m)} \equiv 1(\bmod m)$,这里 $\phi(m)$ 是欧拉函数,表示 $1,2,\cdots,m$ 中和 m 互素的数的个数.下面介绍周彤解法的思想,但不用欧拉定理.

此解法属于周彤

(1) 对任意奇整数 m,必有 $1 \leqslant d \leqslant m$ 使得

$$2^{d} \equiv 1(\bmod m)$$

设 d_0 是使上式成立的最小正整数.那么,如果

$$2^{l} \equiv 1(\bmod m)$$

则必有 $d_0 \mid l$.

(2) 设 $m>1$,则 $2^{m} \not\equiv 1(\bmod m)$.用反证法.若不然,则有 m 是奇数及

$$2^{m} \equiv 1(\bmod m) \quad ①$$

设 p 是 m 的最小素因数.d_0 是使

$$2^{d_0} \equiv 1(\bmod p)$$

成立的最小正整数.由于 $p>1$ 及 $2^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$,所以

$$1<d_0 \leqslant p-1<p$$

因此,d_0 必有素因数 $p_1<p$.但另一方面,$2^{m} \equiv 1(\bmod p)$,由①知 $d_0 \mid m, p_1 \mid m$,这和 p 的最小性矛盾.

注 周彤是用欧拉定理证(2)的.证明如下:设 m_1 是式①成立的大于1的最小正整数.再设 d_1 是使

$$2^{d_1} \equiv 1(\bmod m_1)$$

成立的最小正整数.由①知 $d_1 \mid m_1$,因而有

$$2^{d_1} \equiv 1(\bmod d_1)$$

由 m_1 的最小性知 $d_1=1$ 或 m_1.由 $m_1>1$ 知 $d_1 \neq 1$.由 d_1 的最小性及欧拉定理知 $d_1 \leqslant \phi(m_1)$.当 $m_1>1$ 时有 $m_1>\phi(m_1)$,所以 $d_1 \neq m_1$.因此式①不能成立.

(3) 由(1),(2) 推出,当 m 是大于 1 的奇数时,(1) 中的 d_0 满足 $1 < d_0 < m$.

(4) 设正整数 n_0 满足

$$2^{2n_0} \equiv 1 \pmod{n_0} \quad ②$$

t_0 是使 $$2^{t_0} \equiv 1 \pmod{n_0}$$

成立的最小正整数.若 $n_0 > 1$,则 t_0 必为偶数.因为,由(1) 知 $t_0 \mid 2n_0$.若 t_0 为奇数,则 $t_0 \mid n_0$,因而有

$$2^{n_0} \equiv 1 \pmod{n_0}$$

但由(2) 知这是不可能的.设 $t_0 = 2n_1$,则有 $n_1 \mid n_0$.此外,由(3) 知 $t_0 < n_0$,所以 $n_1 < n_0$.显见,n_1 亦满足式 ②,即

$$2^{2n_1} \equiv 1 \pmod{n_1}$$

(5) 由(4) 的讨论知,只要 $n_1 > 1$,就可重复上面的步骤,得到 $n_2 \mid n_1$,$n_2 < n_1$,且满足

$$2^{2n_2} \equiv 1 \pmod{n_2}$$

这样,经有限步后就得到了一串正整数 $n_0 > n_1 > \cdots > n_k > n_{k+1} = 1$,满足

$$n_{j+1} \mid n_j$$

及 $$2^{2n_{j+1}} \equiv 1 \pmod{n_j}, j = 0,1,\cdots,k$$

由 $n_{k+1} = 1$ 推出 $n_k = 3$,进而有 $n_{k-1} \mid 2^6 - 1 = 63$.

(6) 设 $n > 1$ 是本题的解.显见有

$$2^n \equiv -1 \pmod{n}, 2^{2n} \equiv 1 \pmod{n}$$

取(5) 中的 $n_0 = n$.若 $n_0 > 3$,则由(5) 知 $n_{k-1} \mid n_0$.下面来讨论 n_{k-1} 的可能取值.

由 $n_k = 3 \mid n_{k-1}$ 及 $n_{k-1} \mid 63$ 知

i 若 $7 \mid n_{k-1}$,则 $21 \mid n_{k-1}$,$21 \mid n$.因而有

$$2^n \equiv (2^3)^{n/3} \equiv 1 \pmod 7$$

这和由 $2^n \equiv -1 \pmod{n}$ 推出的 $2^n \equiv -1 \pmod 7$ 矛盾.

ii 若 $7 \nmid n_{k-1}$,则必有 $n_{k-1} = 9$.因此 n_0 必可表示为

$$n = n_0 = 3^l m, l \geqslant 2, 2 \nmid m, 3 \nmid m$$

下面来证这是不可能的.

(7) 设 l 是正整数.那么使

$$2^h \equiv 1 \pmod{3^l}$$

成立的最小的 h 为 $2 \cdot 3^{l-1}$.而且有

$$2^{2 \cdot 3^{l-1}} \not\equiv 1 \pmod{3^{l+1}}$$

用归纳法证.

(8) 若 $n = n_0 > 3$ 是解,则有

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{n^2}$$

由(6)知必有 $9 \mid n$. 而由(1),(7)知上式对这样的 n 不可能成立. 所以,仅有解 $n = 3$.

解法 3 显然 n 为奇数,且 $n > 1$,故我们只要对 $n \geq 3$ 的奇数考虑即可. 设 p 为适合题设条件的 n 的最小素因数,则 $p \mid 2^n + 1$,故有

$$2^n \equiv -1 (\bmod p) \tag{③}$$

设 α 为使

$$2^\alpha \equiv -1 (\bmod p) \tag{④}$$

成立的最小正整数,并令

$$n = k\alpha + r, 0 \leq r < \alpha \tag{⑤}$$

则

$$2^n = 2^{k\alpha + r} \equiv (-1)^k 2^r (\bmod p) \tag{⑥}$$

若 k 为偶数,则由 ③ 与 ⑥ 得

$$2^r \equiv 2^n \equiv -1 (\bmod p)$$

由 α 的最小性,必有 $r = 0$.

若 k 为奇数,则由 ③ 与 ⑥ 可得

$$2^r \equiv 1 (\bmod p)$$

从而

$$2^{\alpha - r} \equiv -1 (\bmod p)$$

而 $0 < \alpha - r \leq \alpha$,由 α 的最小性,仍有 $r = 0$.

总之,$\alpha \mid n$,由费马定理

$$2^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$$

若 $\alpha > p - 1$,则

$$\alpha - (p - 1) < \alpha$$

并且

$$2^{\alpha - (p-1)} \equiv -1 (\bmod p)$$

与 α 的最小性矛盾,因此 $\alpha < p$.

由 $\alpha \mid n$ 及 p 是 n 的最小素因数,知 $\alpha = 1$,即

$$2^1 \equiv -1 (\bmod p)$$

从而 $p = 3$.

令 $n = 3^k d, (d, 3) = 1$,若 $k \geq 2$,则

$$2^n + 1 = (3 - 1)^n + 1 = 3n - \sum_{h=2}^{n} (-1)^h C_n^h 3^h \tag{⑦}$$

由于 $h!$ 中 3 的幂指数为

$$\left[\frac{h}{3}\right] + \left[\frac{h}{3^2}\right] + \cdots < \frac{h}{3} + \frac{h}{3^2} + \cdots = \frac{h}{2}$$

所以

$$C_n^h = \frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{h!}$$

中 3 的幂指数大于 $h - \frac{h}{2}$,式 ⑦ 右边求和符号中的各项都能被

$$3^{k-\frac{h}{2}+h+1} = 3^{k+1+\frac{h}{2}}, h \geqslant 2$$

整除,而 $3n$ 恰能被 3^{k+1} 整除,从而

$$2^n + 1 = 3^{k+1}C, (3, C) = 1$$

由于 $n^2 = 3^{2k}d^2$,将有 $n^2 \nmid 2^{n+1}$,矛盾,所以 $k = 1$,即 $n = 3d$,$(3, d) = 1$.

再证 $d = 1$,若 $d > 1$,令 q 为 d 的最小素因数,则

$$2^n \equiv -1 \pmod q$$

令 β 为使

$$2^\beta \equiv -1 \pmod q \qquad ⑧$$

的最小正整数,与前面的证法类似,可得 $\beta \mid n$,再由 q 是 d 的最小素因数及 $\beta \leqslant q-1$,知 βq,能为1或3,从而,由式⑧知:若 $\beta = 1$,$q \mid 3$;若 $\beta = 3$,$q \mid 9$,均与 $(3, d) = 1$ 矛盾.因而 $d = 1$,$n = 3$.

将 $n = 3$ 代入 $\frac{2^n+1}{n^2}$,确为整数,故适合本题条件的惟一 n 是3.

4 设 $\mathbf{Q}^+$ 是正有理数的集合.试构造一个函数 $f: \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$,满足这样的条件

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}, \forall x, y \in \mathbf{Q}^+ \qquad ①$$

土耳其命题

解法1 首先,我们指出,所求的 f 应该满足以下各条件.

(1) f 是单映射.事实上,设

$$f(y_1) = f(y_2)$$

这等式两边乘以正有理数 x 并以 f 作用之,就可得到

$$f(xf(y_1)) = f(xf(y_2))$$

利用①又可得到

$$\frac{f(x)}{y_1} = \frac{f(x)}{y_2}$$

由此可知

$$y_1 = y_2$$

这证明了 f 是单映射.

(2) $f(1) = 1$.事实上,我们有

$$f(f(1)) = f(1 \cdot f(1)) = \frac{f(1)}{1}$$

也就是

$$f(f(1)) = f(1)$$

因为 f 是单映射,所以

$$f(1) = 1$$

(3) $f(f(y)) = \frac{1}{y}$.这是因为

$$f(f(y)) = f(1 \cdot f(y)) = \frac{f(1)}{y} = \frac{1}{y}$$

(4) $f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}$.这是因为

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(f(f(y))) = \frac{1}{f(y)}$$

(5) $f(x \cdot t) = f(x) \cdot f(t)$.事实上,在 ① 中取

$$y = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

就得到 $f\left(x \cdot f(f(\frac{1}{t}))\right) = \dfrac{f(x)}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{f(t)}} = f(x) \cdot f(t)$

再利用(3) 就得到

$$f(x \cdot t) = f(x) \cdot f(t)$$

反过来,如果函数 $f: \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ 具有上面列举的性质(3) 和(5),那么显然有

$$f(xf(y)) = f(x) \cdot f(f(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

即函数 f 满足 ①.我们只须构造一个具有上面性质(1) ~ (5) 的函数 f.由性质(4),(5) 知只须对任意素数 p 规定 $f(p)$ 的值.

将全体素数按从小到大的顺序排列,即

$$p_1, p_2, \cdots, p_k, p_{k+1}, \cdots$$

首先,我们规定

$$f(p_j) = \begin{cases} p_{j+1}, j = 2k+1, k = 0,1,2,\cdots \\ \dfrac{1}{p_{j-1}}, j = 2k, k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

然后,按照关系

$$f(x \cdot t) = f(x) \cdot f(t)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}$$

将 f 的定义范围扩充到全体正有理数的集合 $\mathbf{Q}^+$.显然这样定义的函数

$$f: \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$$

满足条件(3) 和(5),因而满足式 ①.

解法 2 将素数依大小顺序排列,即

$$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n, \cdots$$

则对任一 $a \in \mathbf{Q}^+$,可把 a 表示成

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_{2k-1}^{a_{2k-1}} P_{2k}^{a_{2k}}, a_i \in \mathbf{Z}, i = 1,2,\cdots,2k$$

则令 $$f(a) = p_2^{-a_1} p_1^{a_2} p_4^{-a_3} p_3^{a_4} \cdots p_{2k}^{-a_{2k-1}} p_{2k-1}^{a_{2k}}$$

我们证明 $f(x)$ 即为合于题设条件的函数.事实上,对于任意

的 $a,b\in\mathbf{Q}^+$，令

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{2k-1}^{\alpha_{2k-1}}p_{2k}^{\alpha_{2k}}$$
$$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_{2k-1}^{\beta_{2k-1}}p_{2k}^{\beta_{2k}}$$

则我们有

$$\begin{aligned}f(ab)&=f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_{2k-1}^{\alpha_{2k-1}+\beta_{2k-1}}p_{2k}^{\alpha_{2k}+\beta_{2k}})=\\&\quad p_2^{-(\alpha_1+\beta_1)}p_1^{(\alpha_2+\beta_2)}\cdots p_{2k}^{-(\alpha_{2k-1}+\beta_{2k-1})}p_{2k-1}^{(\alpha_{2k}+\beta_{2k})}=\\&\quad(p_2^{-\alpha_1}p_1^{\alpha_2}\cdots p_{2k}^{-\alpha_{2k-1}}p_{2k-1}^{\alpha_{2k}})(p_2^{-\beta_1}p_1^{\beta_2}\cdots p_{2k}^{-\beta_{2k-1}}p_{2k-1}^{\beta_{2k}})=\\&\quad f(a)f(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(f(a))&=f(p_2^{-\alpha_1}p_1^{\alpha_2}\cdots p_{2k}^{-\alpha_{2k-1}}p_{2k-1}^{\alpha_{2k}})=\\&\quad f(p_1^{\alpha_2}p_2^{-\alpha_1}\cdots p_{2k-1}^{\alpha_{2k}}p_{2k}^{-\alpha_{2k-1}})=\\&\quad p_2^{-\alpha_2}p_1^{-\alpha_1}\cdots p_{2k}^{-\alpha_{2k}}p_{2k-1}^{-\alpha_{2k-1}}=\frac{1}{a}\end{aligned}$$

所以，对任意的 $x,y\in\mathbf{Q}^+$，都有

$$f(xf(y))=f(x)f(f(y))=\frac{f(x)}{y}$$

5 给定了一个初始整数 $n_0>1$，两人 A 与 B 开始做游戏，他们按照以下规则轮流取数 $n_1,n_2,n_3,\cdots$：

联邦德国命题

知道了 n_{2k}，游戏者 A 选取一个整数 n_{2k+1}，满足条件

$$n_{2k}\leqslant n_{2k+1}\leqslant n_{2k}^2$$

知道了 n_{2k+1}，游戏者 B 选取整数 n_{2k+2}，使得 $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ 是一个素数的正整数次方幂.

根据约定，游戏者 A 取到数 1 990 就获胜，游戏者 B 取到数 1 就获胜.

问对怎样的 n_0

(1)A 有必胜策略；

(2)B 有必胜策略；

(3) 两游戏者都无必胜策略？

解法 1 我们记

$$W=\{n_0\in\mathbf{N}\mid 从\ n_0\ 开始，A\ 有必胜策略\}$$

因为 $45^2=2\ 025>1\ 990$，所以显然有

$$\{45,46,\cdots,1\ 990\}\subseteq W$$

我们找一个自然数，要求抹去其任何一个素数方幂因子之后所得之数不小于 45. 易见

$$2^2\cdot3\cdot5\cdot7=420$$

就是一个合乎要求的数. 若 $n_0\leqslant420\leqslant n_0^2$，则 A 第一次只须取 $n_1=420$. 其后不论 B 怎样选取，总有 $n_2\geqslant45$. 于是 A 第二次选取就能获胜. 因为

$$21 < 420 < 21^2$$

所以 $$\{21,22,\cdots,44\} \subseteq W$$

接着,我们试找一个自然数,要求抹去其任何一个素数方幂因子之后所得的数不小于 21. 易见

$$2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$$

合乎要求. 因为

$$13 < 168 < 13^2$$

所以 $$\{13,14,\cdots,20\} \subseteq W$$

再找一个数,要求抹去其任何一个素数方幂因子之后所得的数不小于 13. 易见

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

合乎要求. 因为

$$11 < 105 < 11^2$$

所以 $$\{11,12\} \subseteq W$$

再找一个数,要求抹去其任何一个素数方幂因子之后所得的数不小于 11. 易见

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

合乎要求. 因为

$$8 < 60 < 8^2$$

所以 $$\{8,9,10\} \subseteq W$$

对于 $n_0 > 1\ 990$ 的情形,总可以选取不小于 3 的自然数 m,使得

$$2^m \cdot 3^2 < n_0 \leqslant 2^{m+1} \cdot 3^2 < n_0^2$$

于是,A 可取 $n_1 = 2^{m+1} \cdot 3^2$. 这时不论 B 怎样选择,总有

$$8 \leqslant n_2 \leqslant n_0$$

若 $n_2 > 1\ 990$,则可用 n_2 代替 n_0. 游戏者 A 重复上面所说的策略,又能使得

$$8 \leqslant n_4 \leqslant n_2$$

在有限步之后,A 总能使 n_{2k} 下降到这样一种情形,即

$$8 \leqslant n_{2k} \leqslant 1\ 990$$

由此得知:$n_0 > 1\ 990$ 时,A 总可获胜.

若 $n_0 \leqslant 5$,而 n_1 满足 $n_0 \leqslant n_1 \leqslant n_0^2$,则 n_1 至多只有两个不同的素数因子(因为最小三个相异素数之积 $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2$),并且只要 n_1 不是完全平方数就一定有 n_1 的一个素数方幂因子

$$p^r > \sqrt{n_1}$$

于是,B 可取 $$n_2 = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \leqslant n_0$$

继续这样的策略,B 能使 n_{2k} 逐步递降,直到取得 1. 因此,只要

$n_0 \leqslant 5$，游戏者 B 总可获胜. 注意这里所取 n_1 至多只有两个不同的素因子是关键.

对于 $n_0 = 6$ 或者 $n_0 = 7$ 的情形，$n_0^2 = 36$ 或者 $n_0^2 = 49$. A 应选取介于 n_0 与 n_0^2 之间的至少有三个相异的素数因子之数（根据刚才的分析，选取少于三个素数因子之数将导致 A 的失败）. 于是，n_1 的合理选择只能是

$$n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

或者

$$n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

B 取 n_2 的正确策略应是取 n_1 抹去最大素数因子后得到的数（否则将有 $n_2 \geqslant 8$，对 B 不利）. 于是，B 只能选取 $n_2 = 6$. 接下去双方不得不轮流选取

$$30, 6, 30, 6, 30, 6, \cdots$$

游戏将不分胜负.

综上所述，我们得出结论：

(1) $n_0 \geqslant 8$ 时，A 有必胜策略；

(2) $n_0 \leqslant 5$ 时，B 有必胜策略；

(3) $n_0 = 6, 7$ 时，双方均无必胜策略.

解法 2 当 $n_0 = 2$，因 $2^2 = 4$，A 只能取 2，3，4 之一，B 可取 1，B 必胜.

当 $n_0 = 3$，因 $3^2 = 9$，A 只能取 3 ~ 9 中的数，均可以表示为 p^k 或 $2p^k$ 的形式（p 为素数），B 可取 1 或 2，从而 B 必胜.

当 $n_0 = 4$，因 $4^2 = 16$，A 只能取 4 至 16 中的数，均可表示为 $2p^k$ 或 $3p^k$（p 为素数）的形式，从而 B 可取 1，2 或 3，B 必胜.

当 $n_0 = 5$，因 $5^2 = 25$，A 只能取 5 至 25 中的数，均可表示为 p^k，$2p^k$，$3p^k$ 或 $4p^k$ 的形式（p 为素数），B 可取 1，2，3，4 而获胜.

若 $45 \leqslant n_0 \leqslant 1\,990$，因 $45^2 = 2\,025 > 1\,990$，A 可直接取 1 990，A 必胜.

若 $21 \leqslant n_0 \leqslant 44$，A 可取

$$n_1 = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

则 B 只能取

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105, 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60, 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84, 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$$

均在 45 与 1 990 之间，故 A 必能胜.

若 $13 \leqslant n_0 \leqslant 20$，则 A 取

$$n_1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$$

B 只能取 $3 \cdot 7 = 21, 2^3 \cdot 3 = 24, 2^3 \cdot 7 = 56$

均在 21 与 1 990 之间，因而 A 胜.

若 $11 \leqslant n_0 \leqslant 12$，则A取

$$n_1 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

B只能取 $3 \cdot 5 = 15, 3 \cdot 7 = 21, 5 \cdot 7 = 35$

均在13与1 990之间，故A必胜.

若 $8 \leqslant n_0 \leqslant 10$，则A取

$$n_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

B只能取 $3 \cdot 5 = 15, 2^2 \cdot 3 = 12, 2^2 \cdot 5 = 20$

均在11与1 990之间，A必胜.

若 $n_0 > 1\ 990$，A可取

$$n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2$$

使得 $2^r \cdot 3^2 < n_0 \leqslant 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2$

则 B 只能取大于9的数，若仍大于1 990，则可继续采取上述方法，经有限多步后，必能做到 $9 \leqslant n_{2k} \leqslant 1\ 990$，于是A胜.

最后，在 $n_0 = 6$ 或 $n_0 = 7$，A取的数若只含有两个不同的素因数，$n_1 = p^\alpha q^\beta$，不妨假定 $p^\alpha > q^\beta$，则B可取 $n_2 = p^\alpha$，则 $q^\beta < 7$，只能为2,3,4,5四数，从而B胜. 故A取的数必须有三个不同的素因子，即A只能取 $n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$，或 $n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$，不管A取哪一个，B只能 $n_2 = 6$，才能不失利，下一步A与B都只能轮番取30和6，谁也无法取胜.

综上所述，可知

(1) 当 $n_0 \geqslant 8$，A有必胜策略；

(2) 当 $2 \leqslant n_0 \leqslant 5$，B有必胜策略；

(3) 当 $n_0 = 6, 7$，双方均无必胜策略.

6 证明：存在具有以下性质(1)和(2)的凸1 990边形.

(1) 这多边形的各内角相等；

(2) 这多边形各边的长度是 $1^2, 2^2, \cdots, 1\ 989^2, 1\ 990^2$ 的某一排列.

荷兰命题

证法1 我们首先通过分析将问题转化成更易于处理的形式. 假设满足上述条件的1 990边形存在. 沿逆时针方向给这多边形的各边定向，再将各边的起点移到原点，这样得到1 990个向量. 相邻的两边对应的两向量相邻，它们之间的夹角为 $\alpha = \frac{2\pi}{1\ 990}$（这是因为凸多边形的每个内角均为 $\pi - \alpha$）. 以复数表示平面向量，原问题转化为：求证存在具有以下性质 ⅰ，ⅱ 和 ⅲ 的1 990个复数.

ⅰ 相邻两复数之间的夹角为 α；

ⅱ 各复数的长度是 $1^2,2^2,\cdots,1\ 990^2$ 的某一排列；

ⅲ 这些复数之和等于 0.

这就是说，我们需要求得 $1^2,2^2,\cdots,1\ 990^2$ 的一个排列 $n_0,n_1,\cdots,n_{1\,989}$，使得

$$\sum_{s=0}^{1\,989} n_s e^{is\alpha} = 0$$

如果将这些复数的长度 n_s 看成“重量”，那么问题又可转述为：给定了一个水平放置的单位圆，设法将 $1^2,2^2,\cdots,1\ 990^2$ 这些“重量”按某种次序放到等分圆周的 1 990 个点上，要求这系统的重心落到圆心上. 下面，我们就来解决这一问题.

首先，依次将 $1^2,2^2,\cdots,1\ 990^2$ 这些“重量”每两个分成一组，这样得到 995 组，即

$$\{1^2,2^2\},\{3^2,4^2\},\cdots,\{1\ 989^2,1\ 990^2\}$$

将同一组中的两个“重量”放到单位圆周的某一对对径点上. 至于哪一组放到哪一条直径的两端，则由下面的讨论来确定. 这样，各组中两复数之和的长度分别为

3,7,11,…,3 979（首项为 3，公差为 4 的等差数列）

于是，问题进一步转化为：将 3,7,11,…,3 979 这些“重量”，放到等分圆周的 995 个点上，要求重心落到圆心上.

其次，我们注意到

$$995 = 5\cdot 199$$

由此得到启发，再将 3,7,11,…,3 979 这些“重量”每五个分成一组，共分成 199 组，即

$$\begin{gathered}\{3,7,11,15,19\},\{23,27,31,35,39\},\{43,47,51,55,59\},\cdots,\\ \{3\ 963,3\ 967,3\ 971,3\ 975,3\ 979\}\end{gathered} \qquad ①$$

记 $\beta = \frac{2\pi}{199},\gamma = \frac{2\pi}{5}$. 我们把顶点在

$$1,e^{i\gamma},e^{2i\gamma},e^{3i\gamma},e^{4i\gamma}$$

的正五边形记为 F_1，并把正五边形 $e^{ik\beta}F_1$ 记为 F_{k+1}. 依次将 ① 中所列的 199 组“重量”放到 $F_1,F_2,\cdots,F_{199}$ 这些正五边形的顶点上，我们得到分成 199 组的 995 个复数，其中第 $k+1$ 组为

$$\begin{gathered}(20k+3)e^{ik\beta},(20k+7)e^{i(k\beta+\gamma)},(20k+11)e^{i(k\beta+2\gamma)},\\ (20k+15)e^{i(k\beta+3\gamma)},(20k+19)e^{i(k\beta+4\gamma)}\end{gathered}$$

五次单位根 $e^{i\gamma}$ 有这样的性质，即

$$1+e^{i\gamma}+e^{2i\gamma}+e^{3i\gamma}+e^{4i\gamma}=0$$

因而第 $k+1$ 组中的五个复数之和可以化简为

$$\eta e^{ik\beta}$$

其中 $$\eta = 3+7e^{i\gamma}+11e^{2i\gamma}+15e^{3i\gamma}+19e^{4i\gamma}$$

于是，所有这 199 组共 995 个复数之总和为

$$\eta(1+e^{\beta i}+\cdots+e^{198\beta i})=0$$

我们证明了:存在满足条件 ⅰ,ⅱ 和 ⅲ 的 1 990 个复数.因而,确实存在满足题目条件(1) 和(2) 的凸 1990 边形.

最后,我们指出,可以将上面的解答简单地整理成以下几行式子再加上几句说明的话,即

$$0=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}(20k+4l+3)e^{i(k\beta+l\gamma)}=$$

$$\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}((10k+2l+2)^2-(10k+2l+1)^2)e^{i(k\beta+l\gamma)}=$$

$$\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}\sum_{m=1}^{2}(10k+2l+m)^2e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)}$$

当指标 k 遍历 $0,1,\cdots,198$,指标 l 遍历 $0,1,\cdots,4$,指标 m 遍历 1,2 的时候,表示式

$$10k+2l+m$$

遍历从 1 到 1 990 的所有自然数.与此同时,表示式

$$e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)}=e^{i\frac{10k+398l+995m}{1\,990}2\pi}$$

遍历 $1,e^{\alpha i},\cdots,e^{1\,989\alpha i}$这 1 990 个复数.

注　最后,我们来说明所作的 1 990 边形确实是凸的.

为此,只须指出这样的事实:无论将这封闭折线的哪一条边延长成直线,折线其余所有的顶点都位于该直线的同一侧.

设所作的封闭折线是 $A_0A_1\cdots A_{1\,989}A_0$.在上面的讨论中,我们已将向量 $\overrightarrow{A_sA_{s+1}}$ 表示为复数

$$\overrightarrow{A_sA_{s+1}}=n_se^{is\alpha}$$

其中

$$\alpha=\frac{2\pi}{1\,990},A_{1\,990}=A_0$$

必要时可以将这图形 $A_0A_1\cdots A_{1\,989}A_0$旋转 α 的适当倍数并相应地改变各顶点的编号,总可以将我们所关心的任何一边重新标号为 $A'_0A'_1$,并且仍可设

$$\overrightarrow{A'_sA'_{s+1}}=n'_se^{is\alpha}$$

以下为简便起见,我们省去新记号中的"′",直截了当地把这封闭折线的任意一边当做 A_0A_1.并且,还可以认为 $A_0=O$ 是坐标原点,$\overrightarrow{A_0A_1}=\overrightarrow{OA_1}$ 指向实轴的正方向.我们还约定,允许用同一记号来记平面上的点和该点所代表的复数.

于是,我们可以写

$$A_k=\overrightarrow{OA_k}=\sum_{r=0}^{k-1}\overrightarrow{A_rA_{r+1}}=\sum_{r=0}^{k-1}n_re^{ir\alpha}=-\sum_{s=k}^{1\,989}n_se^{is\alpha}$$

对于 $0<r<k\leqslant 995$,显然有

$$\sin r\alpha=\sin\frac{r}{1\,990}2\pi>0$$

因而 $\quad \mathrm{Im}(A_k)=\sum_{r=0}^{k-1}n_r\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\alpha})=\sum_{r=0}^{k-1}n_r\cdot\sin r\alpha>n_1\cdot\sin\alpha>0$

对于 $996\leqslant k\leqslant s\leqslant 1\,989$,显然有

$$-\sin s\alpha=-\sin\frac{s}{1\,990}2\pi>0$$

因而
$$\mathrm{Im}(A_k)=-\sum_{s=k}^{1\,989}n_s\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\alpha})=-\sum_{s=k}^{1\,989}n_s\cdot\sin s\alpha>$$
$$-n_{1\,989}\cdot\sin 1\,989\alpha=n_{1\,989}\cdot\sin\alpha>0$$

我们看到,折线其余所有的顶点都位于 A_0A_1 所在直线的同一侧,而 A_0A_1 可以是这封闭折线的任何一条边.因此,所作的 1 990 边封闭折线确实构成一个凸多边形.

本题的解法都是归结为求 $1,2,\cdots,1\,990$ 的一个排列:$r_1,r_2,\cdots,r_{1\,990}$,使得

$$\sum_{j=1}^{1\,990}r_j^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j}=0$$

其中,$\alpha=2\pi/1\,990$.注意到 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$,更一般地可归为求 $1,2,\cdots,1\,990$ 的一个排列 $r_1,r_2,\cdots,r_{1\,990}$,及模 1 990 的一个完全剩余系 $u_1,u_2,\cdots,u_{1\,990}$,使得

$$\sum_{j=1}^{1\,990}r_j^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha u_j}=0 \qquad ②$$

下面介绍汪建华、周彤和王崧的解法,王崧的解法与众不同.

证法 2 设

此解法属于汪建华

$$a_{k,j}=10k+j,1\leqslant j\leqslant 10,0\leqslant k\leqslant 198$$
$$b_{h,l}=10l+199l,0\leqslant l\leqslant 9,0\leqslant h\leqslant 198$$

显见,$a_{k,j}$ 恰好取 $1,2,\cdots,1\,990$ 这些值,且每个一次.由初等数论知,$b_{h,l}$ 恰好是模 1 990 的一个完全剩余系.

考虑

$$T_k=a_{k,1}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,0}}+a_{k,2}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,2}}+a_{k,3}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,4}}+a_{k,4}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,6}}+$$
$$a_{k,5}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,8}}+a_{k,6}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,5}}+a_{k,7}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,7}}+$$
$$a_{k,8}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,9}}+a_{k,9}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,1}}+a_{k,10}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha b_{k,3}}$$

显见
$$T=\sum_{k=0}^{198}T_k$$

就给出了式 ② 左边形式的和式.下面来证明 $T=0$.容易算出

$$T_k=-5\mathrm{e}^{\mathrm{i}10k\alpha}\sum_{j=1}^{5}(2j-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(j-1)/5}$$

右边的和式是与 k 无关的常数.由此即得 $T=0$.

证法 3 设

此解法属于周彤

$$a_{j,k}=199j+k,0\leqslant j\leqslant 9,1\leqslant k\leqslant 199$$

显见,$a_{j,k}$ 恰好每个一次地取 $1,2,\cdots,1\,990$ 这些值.再设

$$b_{0,k}=a_{0,k},b_{1,k}=a_{6,k},b_{2,k}=a_{2,k},b_{3,k}=a_{8,k}$$

$$b_{4,k}=a_{4,k},b_{5,k}=a_{5,k},b_{6,k}=a_{1,k},b_{7,k}=a_{7,k}$$

$$b_{8,k}=a_{3,k},b_{9,k}=a_{9,k}$$

并约定 $$b_{j,k}=b_{l,k},l\equiv j(\mathrm{mod}\ 10)$$

对每一个 k 取定一个整数 m_k,考虑和式

$$S_k=\sum_{j=0}^{9}b_{j+m_k,k}^{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha a_{j,k}}$$

显见 $$S=\sum_{k=1}^{199}S_k$$

就给出了形如式 ② 左边的和式.容易算出

$$S_k=(5\cdot 199^2\sum_{j=1}^{4}2_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha 199j})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(199m_k+k)}$$

(…) 内是和 k 无关的常数.下面来确定 m_k 的取值.由于当 $0\leqslant m\leqslant 9,1\leqslant k\leqslant 199$ 时,$199m+k$ 恰好每个一次地取 1,2,…,1 990 这些值.因此,一定可以取到 $0\leqslant m_k\leqslant 9$,使得 $c_k=199m_k+k$,当 $k=1,2,3,\cdots,199$ 时,恰好取 10,20,30,…,1 990 这 199 个数(次序可以不同),由此即得 $S=0$.

注　请读者比较汪建华、周彤的解法的异同.

证法 4　考虑多项式

此解法属于王崧

$$G(x)=x^{4\cdot 199}+x^{3\cdot 199}+x^{2\cdot 199}+x^{199}+1$$

$$H(x)=x^{5\cdot 198}+x^{5\cdot 197}+\cdots+x^{5\cdot 2}+x^{5}+1$$

以及 $$M_1(x)=G(x)(199x^{198}+198x^{197}+\cdots+2x+1)$$

$$M_2(x)=H(x)(4\cdot 199x^3+3\cdot 199x^2+2\cdot 199x+199)$$

$$M(x)=M_1(x)+M_2(x)$$

容易看出:$M(x)$ 是 994 次多项式,系数必在 1,2,…,995 这些值之中.我们来证明 $M(x)$ 的系数两两不同,因此恰好 1,2,…,995 各出现一次.

(1)$M_1(x)$ 中出现 x^j 项,$j=199l+k,0\leqslant l\leqslant 4,0\leqslant k\leqslant 198$,且它的系数 $a_j=k+1$.所以在 $M_1(x)$ 中 $x^j(0\leqslant j\leqslant 994)$ 都出现,且系数 a_j 满足 $1\leqslant a_j\leqslant 199$.

(2)$M_2(x)$ 中出现 x^j 项,$j=5k+l,0\leqslant l\leqslant 3,0\leqslant k\leqslant 198$,且它的系数 $b_j=199(l+1)$.

(3)$M(x)$ 中没有两项的系数相同.用反证法.假若 x^{j_1} 和 x^{j_2} 的系数 c_{j_1} 和 c_{j_2} 相等,$j_1\neq j_2$.我们有

$$c_{j_1}=a_{j_1}+b_{j_1},c_{j_2}=a_{j_2}+b_{j_2}$$

因此 $$a_{j_2}-a_{j_1}=b_{j_1}-b_{j_2}$$

由(1)知,必有

$$0 \leqslant | a_{j_2} - a_{j_1} | \leqslant 198$$

若 $a_{j_2} - a_{j_1} = 0$,则由(1)推出

$$199 \mid (j_2 - j_1)$$

另一方面,这时必有 $b_{j_2} = b_{j_1}$,由(2)知,$5 \mid (j_2 - j_1)$. 因此推出 $995 \mid (j_2 - j_1)$. 但已知 $0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant 994$,矛盾.

进而考虑多项式

$$N(x) = 4M(x) - (x^{994} + x^{993} + \cdots + x + 1)$$

$N(x)$ 是 994 次多项式,x^j 的系数是 $4c_j - 1, 0 \leqslant j \leqslant 994$, c_j 恰好每个一次地取值 $1, 2, \cdots, 995$. 因此

$$N(x) = \sum_{j=0}^{994} (4c_j - 1)x^j = \sum_{j=0}^{994} (2c_j)^2 x^j - \sum_{j=0}^{994} (2c_j - 1)^2 x^j$$

取 $x = e^{2i\alpha}$,得

$$N(e^{2i\alpha}) = \sum_{j=0}^{994} (2c_j)^2 e^{i\alpha(2j)} - \sum_{j=0}^{994} (2c_j - 1)^2 e^{i\alpha(2j+995)}$$

显见,右边就是形如 ② 的和式. 但另一方面,由 $N(x)$ 的定义容易推出 $N(e^{2i\alpha}) = 0$.



北京颐和园

第 32 届国际数学奥林匹克

瑞典,1991

苏联命题

1 设 O 是 $\triangle ABC$ 的内心,三内角 $\angle BAC,\angle CBA,\angle ACB$ 的角平分线分别与其对边交于 A',B',C'. 证明

$$\frac{1}{4}<\frac{AO\cdot BO\cdot CO}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}$$

证明 作 $AD,A'E$ 均垂直于 BB',垂足分别为 D,E,如图 32.1 所示.

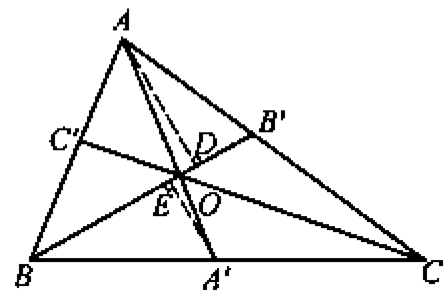


图 32.1

由 $\triangle ABD \backsim \triangle A'BE$ 推出

$$BA/BA' = AD/A'E$$

由 $\triangle A'OE \backsim \triangle AOD$ 推出

$$AD/A'E = AO/A'O$$

因而有 $$BA/BA' = AO/A'O$$

同理可得 $$CA/CA' = AO/A'O$$

由以上两式得到

$$(BA + CA)/BC = AO/A'O$$

进而有 $\alpha = (BA + CA)/(BA + CA + BC) = AO/AA'$

这就是平面几何中熟知的角平分线定理. 同理可得

$$\beta = (AB + CB)/(BA + CA + BC) = BO/BB'$$

$$\gamma = (AC + BC)/(BA + CA + BC) = CO/CC'$$

因而有 $1/2 < \alpha < 1,1/2 < \beta < 1,1/2 < \gamma < 1$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

利用三个非负数的几何平均值不超过它们的算术平均值,得到

$$(\alpha\beta\gamma)^{1/3} \leqslant (\alpha + \beta + \gamma)/3 = 2/3$$

由此就推出所要证的右半不等式.

为证左半不等式,不妨设 $BC \geqslant CA \geqslant AB$,即 $\gamma \geqslant \beta \geqslant \alpha$. 我们有

$$\alpha\beta\gamma = \alpha\beta(2-\alpha-\beta) = \beta\left(\left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{2-\beta}{2}-\alpha\right)^2\right)$$

由假设知 $$2-\beta = \alpha + \gamma \geqslant 2\alpha$$

由此及 $\alpha > 1/2$ 从上式推得

$$\alpha\beta\gamma > \beta\left(\left(\frac{2-\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\beta}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}-\left(\beta-\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

利用 $1/2 < \beta < 1$,从上式得

$$\alpha\beta\gamma > 1/4$$

这就证明了所要的左半不等式.

2 设整数 n 大于 6,$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是所有小于n 且与n 互素的正整数.如果

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_k-a_{k-1}>0$$

证明:n 一定是素数或 2 的方幂.

罗马尼亚命题

证明 记 $d=a_2-a_1$.由条件知

$$a_1=1,a_k=n-1,d\geqslant 1$$

及
$$a_{j+1}=1+jd,j=0,1,\cdots,k-1$$

a_2 是素数,且若素数 $p<a_2$,则 $p\mid n$.由条件知 a_2 是大于 1 且与 n 互素的最小正整数,所以 $a_2>1$ 不可能是合数,即一定是素数.此外,由最小性推出素数 $p<a_2$,p 与 n 一定不互素,即 $p\mid n$.

下面按 $a_2=2,a_2=3,a_2>3$ 三种情形来讨论.

(1) $a_2=2$.这时 $d=1,a_{j+1}=1+j,0\leqslant j\leqslant k-1$.由于 $n-1=a_k=k$,所以 n 与小于n 的所有正整数互素,因此,n 必为素数.

(2) $a_2=3$.这时 $d=2,a_{j+1}=1+2j,0\leqslant j\leqslant k-1$.由于 $n-1=a_k=1+2(k-1)$,所以 $k=n/2$.这时 n 是偶数,且与所有小于它的正奇数互素,因此,除 2 外 n 不能有别的素因数,即 $n=2^s$.

(3) $a_2>3$.这时由上可知 $3\mid n$,由此及 $n-1=a_k=1+(k-1)d$ 推出 $3\nmid d$.因此,$3\mid 1+d$ 或 $3\mid 1+2d$ 有且仅有一个成立.由于 $a_2=1+d>3$ 是素数,所以必有 $3\nmid 1+d,3\mid 1+2d$.因此得 $k=2$,即与 n 互素的且不超过n 的正整数仅有 1 和 a_2 两个.下面来证明:当 $n>6$时必有 $k>2$.所以这种情形是不可能出现的.为此设 $n=2^rm>6,2\nmid m$.

i $r=0$.这时 $m>6$,因此,1,2,4 均与奇数 $n=m$ 互素,因此有 $k>2$;

ii $m=1$.这时 $r\geqslant 3$,1,3,5,7,$\cdots$ 均与 $n=2^r$ 互素,故有 $k>2$;

iii $m=3$.这时 $r\geqslant 2$,1,5,7 必与 $n=2^r\cdot 3$互素,故有 $k>2$;

iv $r\geqslant 1,m\geqslant 5$.这时 $1,m-2,m+2<n$ 均与n 互素,故有 $k>2$.这就对所有可能的情形证明了所要的结论.应该指出:这里

的 k 就是初等数论中的欧拉函数 $\phi(n)$，但是，用 $\phi(n)$ 的表示式来证明这结论超出了中学数学范围.

读者不难看出，只要假定 $n \neq 1,6$，本题就成立，而且 n 等于素数或 2^t 时，所有不超过 n 且与 n 互素的正整数按大小顺序排列为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 时，必满足题中的条件.

中国命题

3 设集合 $S = \{1,2,3,\cdots,280\}$. 求最小正整数 n，使得 S 的每个有 n 个元素的子集都含有 5 个两两互素的数.

解 怎样的整数集合 M 会使它的任意 5 个数一定不是两两互素？一个容易想到的条件是：存在 4 个不同的素数 p_1, p_2, p_3, p_4，使 M 中的数至少被一个 p_i 整除. 如何从 S 中找出满足这样性质的子集 M，使得 M 有尽可能多的元素. 只有考查了这一点，才可能对题中要求的最小正整数 n 有所了解. 为使 $M \subseteq S$ 按上述条件来构造，且有尽可能多的元素，显然应取尽可能小的 p_1, p_2, p_3, p_4. 现取 $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$. 设 d 是给定的正整数，记

$$S_d = \{s \mid s \in S, d \mid s\}$$

取
$$M = S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7 \subset S$$

M 中任意 5 个数一定有 2 个同属于某一个 S_d，即一定不两两互素. 下面用容斥原理来求集合 M 的元素个数（以 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数），即

$$\begin{aligned}|M| = &(|S_2|+|S_3|+|S_5|+|S_7|) - \\ &(|S_6|+|S_{10}|+|S_{14}|+|S_{15}|+|S_{21}|+|S_{35}|) + \\ &(|S_{30}|+|S_{42}|+|S_{70}|+|S_{105}|) - |S_{210}| = \\ &(140+93+56+40) - (46+28+20+18+13+8) + \\ &(9+6+4+2) - 1 = 216\end{aligned}$$

由此知必有 $n \geqslant 217$.

另一方面，如果 r 个整数集合 $B_1, \cdots, B_r$，它们两两不相交，每个 B_i 的元素个数不少于 5 个，且每个 B_i 中的整数均两两互素. 设 $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$. 显见，在 B 中任取 $4r+1$ 个元素必有 5 个整数属于某一个 B_i，因而必两两互素. 如果这些 $B_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ 都是 S 的子集，那么，在 S 中任取 $|S|-|B|+4r+1$ 个正整数就必有 $4r+1$ 个属于 B，因而必有 5 个正整数两两互素. 下面我们来构造 B_i. 为使能从 S 中取尽可能少的数达到题中的要求，就需要 $|B|$ 尽可能大而 r 尽可能小. 为此取

$$B_1 = \{s \mid s \in S, s = 1 \text{ 或素数}\}$$
$$B_2 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$$

$$B_3 = \{2 \cdot 139, 3 \cdot 89, 5 \cdot 53, 7 \cdot 37, 11 \cdot 23, 13 \cdot 19\}$$

$$B_4 = \{2 \cdot 137, 3 \cdot 83, 5 \cdot 47, 7 \cdot 31, 11 \cdot 19, 13 \cdot 17\}$$

$$B_5 = \{2 \cdot 131, 3 \cdot 79, 5 \cdot 43, 7 \cdot 29, 11 \cdot 17\}$$

$$B_6 = \{2 \cdot 127, 3 \cdot 73, 5 \cdot 41, 7 \cdot 23, 11 \cdot 13\}$$

容易验证这些集合满足以上所说的要求.

$$r = 6$$

$$|B| = |B_1| + \cdots + |B_5| = 60 + 6 + 6 + 6 + 5 + 5 = 88$$

因此,在 S 中任取 $280 - 88 + 4 \cdot 6 + 1 = 217$ 个数,必有 5 个是两两互素的.所以 $n \leqslant 217$.

综合以上两部分即得 $n = 217$.

4 设 G 是一个有 K 条棱的连通图.证明:可以将 G 的棱标号 $1,2,\cdots,K$,使得对属于两条或更多条棱的顶点,过该顶点的所有棱的标号的最大公约数是 1.

美国命题

证明 用以下方法对棱标号就可满足题中的要求.任取一顶点记做 v_0,由于是连通图,v_0 必至少属于一条棱.从 v_0 出发沿 G 中的棱不重复地前进,即已通过的棱不允许再次通过,但顶点允许多次经过,直到不能再这样前进为止.依次记已通过的顶点为 $v_0, v_1, \cdots, v_{l_1}$(注意不同的标号可能对应同一个顶点,但相邻的 v_i, v_{i+1} 不会是同一个顶点),连结顶点 $v_{i-1}, v_i (1 \leqslant i \leqslant l_1)$,并给棱标号 i.这样就有 l_1 条棱(它们是两两不同的)标号为 $1,2,\cdots,l_1$.显见 $1 \leqslant l_1 \leqslant K$.在已通过的顶点中,可能除了 v_0 和 v_{l_1} 外,其余每个顶点至少属于两条已被标号的棱,其标号数中必有两个是相邻正整数.顶点 v_0 必属于标号为 1 的棱.顶点 v_{l_1} 要么也至少属于两条已被标号的棱,其标号数中必有两个是相邻正整数,要么它在连通图 G 中只属于一条棱.若 $l_1 = K$,则所有棱均已标号,由上述说明知标号满足要求.

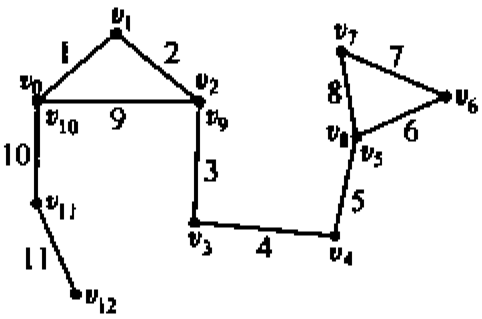


图 32.2

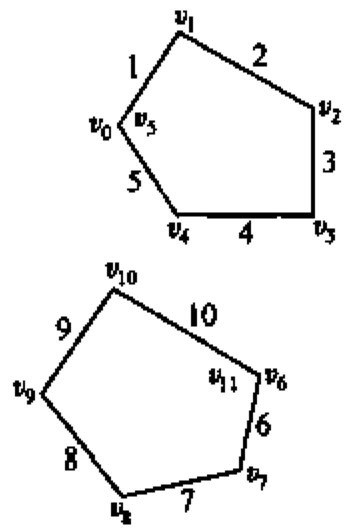


图 32.3

若 $1 \leqslant l_1 < K$.由图的连通性知,在顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_{l_1 - 1}$ 中必有顶点属于还未标号的棱.任取这样一个顶点,记为 v_{l_1+1}.从这一顶点出发,按上述规则,沿 G 中未被通过的棱(即未标号的棱)不重复地前进,直到不能继续前进为止.依次记通过的顶点为 v_{l_1+1}, $v_{l_1+2}, \cdots, v_{l_1+l_2+1}$,连结 $v_i, v_{i+1} (l_1 + 1 \leqslant i \leqslant l_1 + l_2)$ 的棱标号 i.这样,就又有不同的 l_2 条棱标号为 $l_1 + 1, \cdots, l_1 + l_2$, $1 \leqslant l_2 \leqslant K - l_1$.若 $l_1 + l_2 < K$,则继续用这样的方法标号.由于总共只有 K 条棱,所以,最后一定将所有的棱标号为 $1,2,\cdots,K$.

由我们的标号方法知，对 G 的任一顶点，如果它至少属于两条棱，那么，当它为 v_0 时，必有过该点的棱标号为 1；当它不是 v_0 时，必有过该点的两条棱标号为相邻正整数．因此，过这样的顶点的所有棱的标号数的最大公约数必为 1．图 32.2 给出了有 11 条棱的连通图，$l_1 = 8, l_2 = 3$．图 32.3 给出的不连通图，无论怎样标号都不会满足题目的要求．本题不是初等数论题．

5 设 P 是 $\triangle ABC$ 内的一点，证明：$\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$ 至少有一个不大于 $30°$．

法国命题

证明 记 $\alpha = \angle CAB, \alpha_1 = \angle PAB, \beta = \angle ABC, \beta_1 = \angle PBC, \gamma = \angle BCA, \gamma_1 = \angle PCA$，如图 32.4 所示．

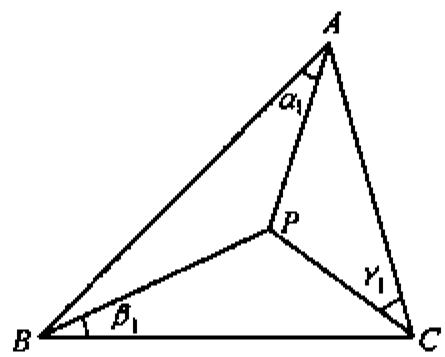


图 32.4

我们有

$$PA \cdot \sin \alpha_1 = PB \cdot \sin(\beta - \beta_1)$$
$$PB \cdot \sin \beta_1 = PC \cdot \sin(\gamma - \gamma_1)$$
$$PC \cdot \sin \gamma_1 = PA \cdot \sin(\alpha - \alpha_1)$$

由以上三式即得

$$\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1 = \sin(\alpha - \alpha_1) \cdot \sin(\beta - \beta_1) \cdot \sin(\gamma - \gamma_1)$$

进而有

$$\sin^2 \alpha_1 \cdot \sin^2 \beta_1 \cdot \sin^2 \gamma_1 = \sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha - \alpha_1) \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin(\beta - \beta_1) \cdot \sin \gamma_1 \cdot \sin(\gamma - \gamma_1)$$

由熟知的不等式得(注意 $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha < \pi, |\alpha - 2\alpha_1| < \pi$)

$$(\sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha - \alpha_1))^{1/2} \leqslant \frac{\sin \alpha_1 + \sin(\alpha - \alpha_1)}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - 2\alpha_1}{2} \leqslant \sin \frac{\alpha}{2}$$

等号当且仅当 $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$ 时成立．同理可得

$$(\sin \beta_1 \cdot \sin(\beta - \beta_1))^{1/2} \leqslant \sin \frac{\beta}{2}$$
$$(\sin \gamma_1 \cdot \sin(\gamma - \gamma_1))^{1/2} \leqslant \sin \frac{\gamma}{2}$$

等号分别当且仅当 $\beta_1 = \frac{\beta}{2}, \gamma_1 = \frac{\gamma}{2}$ 时成立．因而有

$$\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1 \leqslant \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \quad ①$$

再利用三个非负数的几何平均数不大于它们的算术平均数，得到

$$(\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2})^{1/3} \leqslant (\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2})/3 \quad ②$$

以下不妨设 $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$．我们有

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\beta+\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{4}+\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant$$

$$2\sin\frac{\beta+\alpha}{4}+\sin\frac{\gamma}{2} \quad ③$$

等号当且仅当 $\alpha=\beta$ 时成立.注意到 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,及假定 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$,可设

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{6}+2\theta,\frac{\beta+\alpha}{4}=\frac{\pi}{6}-\theta,0\leqslant\theta<\frac{\pi}{6}$$

得到

$$2\sin\frac{\beta+\alpha}{4}+\sin\frac{\gamma}{2}=2\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)+\sin(\frac{\pi}{6}+2\theta)=$$

$$(2\cos\theta+\cos 2\theta)\sin\frac{\pi}{6}+$$

$$(-2\sin\theta+\sin 2\theta)\cos\frac{\pi}{6}=$$

$$(2\cos\theta+\cos 2\theta)\sin\frac{\pi}{6}+$$

$$2(-1+\cos\theta)\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3}{2} \quad ④$$

等号仅当 $\theta=0$ 时成立.由式 ②,③,④ 推出

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{3}{2} \quad ⑤$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8} \quad ⑥$$

等号仅当 $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$ 时成立.由式 ⑥ 和 ① 即得

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1\leqslant 1/8$$

由此推出左边三项至少有一个小于等于 1/2,不妨设 $\sin\alpha_1\leqslant 1/2$.这样,必有 $\alpha_1\leqslant 30^\circ$,或 $\alpha_1\geqslant 150^\circ$,在后一情形,$\beta_1,\gamma_1$ 均小于 30°.证毕.

不等式 ⑤ 和 ⑥ 是两个很著名的有关三角形的内角的不等式.这里给出了与通常不同的证明.(参看 O. Bottema,《几何不等式》,§2,北京大学出版社,1991)

6 设 $a>1$ 是给定的实数.试构造一个有界无穷数列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$,使得对任意的 $i\neq j$ 有

$$|x_i-x_j|\geqslant|i-j|^{-a}$$

荷兰命题

解法 1 由题的要求知,所构造的数列 x_i 应和下标 i 有关,以保证两数之差的绝对值 $|x_i-x_j|$ $(i\neq j)$ 相对于下标之差 $|i-j|$ 不是太小.一个方法是通过下标的 k 进制表示来给出数列 x_i.下面利用二进制表示.设 i 是非负整数,它的二进制表示是

$$i=b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\cdots+b_r\cdot 2^r$$

其中，$b_0, b_1, \cdots, b_r$ 取值 0 或 1. 令

$$y_i = b_0 + b_1 \cdot 2^{-a} + b_2 \cdot 2^{-2a} + \cdots + b_r \cdot 1^{-ra}, i = 0,1,2,\cdots$$

显有 $|y_i| < (1 - 2^{-a})^{-1}$，所以是一有界数列，下面来估计 $|y_i - y_j|, j \neq i$. 设

$$j = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \cdots + c_s \cdot 2^s$$

由于 $j \neq i$，一定有非负整数 t_0 使得

$$b_{t_0} \neq c_{t_0}, b_t = c_t, 0 \leqslant t < t_0$$

因而有 $|i - j| \geqslant 2^{t_0}$，以及

$$|y_i - y_j| > 2^{-t_0a} - (2^{-(t_0+1)a} + 2^{-(t_0+2)a} + \cdots) = 2^{-t_0a} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1} \geqslant |i - j|^{-a} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1}$$

由上式知，取数列

$$x_i = \frac{2^a - 2}{2^a - 1} y_i, i \geqslant 0$$

即满足要求.

这里要指出两点：一是用这样的方法构造的数列一定要求题中的 $a > 1$；二是这是一个有理数列.

解法 2 这个解答本质上是由我国选手罗炜提出的，而且允许把问题改进为 $a = 1$. 他的方法是基于丢番图逼近理论中的这样一个结论：对任意给的实二次无理数 α（即实数 α 不是有理数，且是某个二次整系数多项式的根），一定存在一个正常数 c（可以和 α 有关），使得对任意整数 $p \neq 0$ 及 q，必有

$$|p\alpha - q| \geqslant c/|p| \quad ①$$

即

$$|\alpha - q/p| \geqslant c/p^2 \quad ②$$

这表明这样的无理数 α 用有理数 q/p 来逼近时，不可能逼近得太好（关于这方面的初步知识可参看 R.P. 布恩，《数论入门》，第十一章，高等教育出版社，1990. 这是一本很好的初等数论入门书）.

我们先来证明：若式 ① 对某个实二次无理数 α 成立，就可推出本题当 $a = 1$ 时成立. 取数列

$$x_i = c^{-1}(\alpha i - [\alpha i]), i = 0,1,2,\cdots$$

其中，$[t]$ 表示不超过实数 t 的最大整数. 显有 $0 \leqslant x_i < c^{-1}$，所以是有界数列. 若式 ① 成立，则有

$$|x_i - x_j| = c^{-1}|\alpha(i - j) - ([\alpha i] - [\alpha j])| \geqslant |i - j|^{-1}, i \neq j$$

这就推出有界无穷数列 x_i 满足本题当 $a = 1$ 时的要求.

下面来证明：当 $\alpha = \sqrt{2}, c = (2 + \sqrt{2})^{-1}$ 时，对任意整数 $p \neq 0$

及 q,式①(即②)成立.先假定

$$1 \leqslant q/p \leqslant 2 \qquad ③$$

由 $2p^2 - q^2 \neq 0$ 推出

$$\begin{aligned} 1 \leqslant |2p^2 - q^2| &= |p\sqrt{2} + q||p\sqrt{2} - q| = \\ &|p||\sqrt{2} + q/p||p\sqrt{2} - q| \leqslant \\ &(2+\sqrt{2})|p||p\sqrt{2} - q| \end{aligned}$$

最后一步用到了条件③.当 $q/p < 1$ 时,显有

$$|\sqrt{2} - q/p| > \sqrt{2} - 1 > (2+\sqrt{2})^{-1} \geqslant (2+\sqrt{2})^{-1}/p^2$$

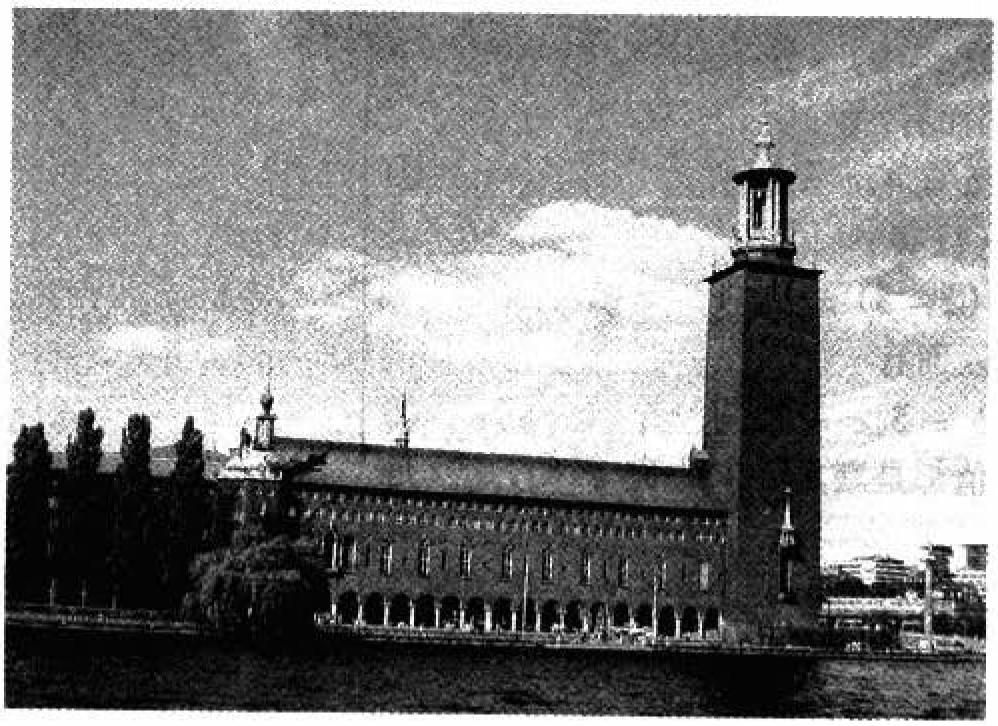
当 $q/p > 2$ 时

$$|\sqrt{2} - q/p| > 2 - \sqrt{2} > (2+\sqrt{2})^{-1} \geqslant (2+\sqrt{2})^{-1}/p^2$$

由以上三式就推出所要的结论.因此,我们可取

$$x_i = (2+\sqrt{2})(\sqrt{2}i - [\sqrt{2}i]), i = 0,1,2,\cdots$$

应该指出,这里构造的数列 $\{x_i\}$ 是无理数列,而在解法1中构造的是有理数列.对 $a = 1$ 是否也能构造出一个满足条件的有理数列呢?尚不知晓.可能回答是否定的.



斯德哥尔摩市政厅

第 33 届国际数学奥林匹克

俄罗斯，1992

新西兰命题

1 求出所有满足如下条件的整数 a,b,c：

(1) $1 < a < b < c$；

(2) $(a-1)(b-1)(c-1)$ 是 $abc-1$ 的约数.

解 为简化除数的形式，令

$$x = a-1, y = b-1, z = c-1$$

因此 $$abc - 1 = xyz + xy + yz + zx + x + y + z$$

这样，题中的两个条件就等价于：

(3) $1 \leqslant x < y < z$；

(4) $xy + yz + zx + x + y + z = rxyz$，$r$ 为一正整数.

由

$$xy + yz + zx + x + y + z = yz + z(x+1) + y(x+2) + x - y$$

及条件(3) 可得

$$yz < xy + yz + zx + x + y + z < 3yz$$

由上式及条件(4) 推出

$$1 < rx < 3$$

所以 $rx = 2$.

若 $x = 1$，则 $r = 2$，且由(4) 得

$$(y-2)(z-2) = 5$$

由此及(3) 知 $y = 3, z = 7$. 因而有

$$a = 2, b = 4, c = 8 \quad ①$$

若 $x = 2$，则 $r = 1$，且由(4) 得

$$(y-3)(z-3) = 11$$

由此及(3) 知 $y = 4, z = 14$. 因而有

$$a = 3, b = 5, c = 15 \quad ②$$

显见，求出的 ①，② 两组值都是满足要求的解. 因此，这就是满足本题要求的全部解.

思考：把条件 $1 < a < b < c$ 改为 $1 < a \leqslant b \leqslant c$，将得到怎样的结果？

2 求出所有满足如下条件的实函数 f:对一切实数 x,y,有

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2 \quad ①$$

印度命题

解法 1 (1) f 应满足更为显明的基本关系式. 令 $x=y=0$,由条件 ① 得

$$f(f(0))=f^2(0)\geqslant 0 \quad ②$$

令 $x=0$,由条件 ① 得

$$f(f(y))=y+f^2(0) \quad ③$$

由式 ① 及式 ③ 推得

$$f(y+f^2(x))=f(f(x^2+f(y)))=x^2+f(y)+f^2(0) \quad ④$$

在式 ① 中取 $x=u,y=f(0)$ 得到

$$f(u^2+f(f(0)))=f^2(u)+f(0)$$

在式 ④ 中取 $y=u^2,x=0$,利用上式及式 ② 就有

$$f^2(u)-f(u^2)=f^2(0)-f(0) \quad ⑤$$

(2) 讨论 $f(0)$ 可能取的值. 在式 ④ 中取 $x=0$,并利用式 ③,得到

$$f(f(y)+f^2(0))=f(f(y+f^2(0)))=y+2f^2(0)$$

在式 ① 中取 $x=f(0)$ 后,和上式比较即得

$$(f(f(0)))^2=2f^2(0)$$

由此及式 ② 就推得

$$f(f(0))=f^2(0)=0\text{或}2 \quad ⑥$$

下面分别来讨论这两种情形.

Ⅰ $f(f(0))=f(0)=0$. 这时式 ③ 变为

$$f(f(y))=y \quad ⑦$$

这表明对任何实数 y_0,必有 x_0 使得 $f(x_0)=y_0$,因为只要取 $x_0=f(y_0)$ 即可. 在式 ④ 中取 $x=f(u)$,利用上式可得

$$f(y+u^2)=f^2(u)+f(y)\geqslant f(y) \quad ⑧$$

现在可由式 ⑤ 推出 $f(u^2)=f^2(u)\geqslant 0$,即

$$f(u)\geqslant 0,u\geqslant 0$$

由此及式 ⑦ 就得到

$$f(u)>0,u>0 \quad ⑨$$

由此及式 ⑧ 就证明了:$f(y)$ 是严格递增函数,即

$$f(y_1)>f(y_2),y_1>y_2 \quad ⑩$$

我们用反证法来证明:必有

$$f(y)=y \quad ⑪$$

若式 ⑪ 不成立,则必有 $y_0\neq 0$ 使

$$y_0\neq f(y_0)$$

若 $y_0 > f(y_0)$,则由式⑩和⑦将推出

$$f(y_0) > f(f(y_0)) = y_0$$

和假设矛盾;若 $y_0 < f(y_0)$,则类似地将推出

$$f(y_0) < f(f(y_0)) = y_0$$

也和假设矛盾.因此必有式⑪成立.

ii $f(f(0)) = f^2(0) = 2$.在式⑤中取 $u = 2$ 得

$$f^2(2) - f(4) = 2 - f(0) \quad ⑫$$

另一方面,在式③中取 $y = x = 0$ 得

$$f(2) = f(0) + 2 \quad ⑬$$

取 $y = 2, x = 0$ 得

$$f(4) = f(2) + 2 \quad ⑭$$

由式⑫,⑬推出

$$f(4) = 5f(0) + 4$$

而由式⑬,⑭推出

$$f(4) = f(0) + 4$$

进而由以上两式得 $f(0) = 0$,这和 $f^2(0) = 2$ 矛盾.

综上所述,满足本题的函数必为 $f(y) = y$.

解法2 (1)设 $f(0) = c$.在式①中,令 $x = 0, y = 0$ 得

$$f(c) = c^2 \quad ⑮$$

令 $x = 0, y = c$ 得(利用式⑮)

$$f(c^2) = c + c^2 \quad ⑯$$

令 $x = c, y = 0$ 得

$$f(c^2 + c) = c^4 \quad ⑰$$

令 $x = 0, y = c^2$ 得

$$f(f(c^2)) = c^2 + c^2 = 2c^2 \quad ⑱$$

由⑯和⑰得 $\quad f(f(c^2)) = c^4$

与式⑱比较得

$$2c^2 = c^4, c = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

在式①中令 $x = \sqrt{2}, y = 0$ 得

$$f(\sqrt{2} + f(0)) = (f(\sqrt{2}))^2 \geqslant 0$$

因此显然 $f(0) \neq -\sqrt{2}$.

若 $f(0) = \sqrt{2}$,则由②得 $f(\sqrt{2}) = 2$.在式①中令 $x = 2, y = \sqrt{2}$ 得(利用式③)

$$f(6) = \sqrt{2} + (\sqrt{2} + 2)^2 = 6 + 5\sqrt{2}$$

令 $x = \sqrt{2}, y = 2 + \sqrt{2}$ 得(利用式④)

$$f(6) = 2 + \sqrt{2} + 2^2 = 6 + \sqrt{2}$$

矛盾.因此有 $f(0) = 0$.

(2) 在 ① 中令 $x = 0$ 得

$$f(f(y)) = y \qquad ⑲$$

对任意实数 y 成立;令 $y = 0$ 得

$$f(x^2) = (f(x))^2 \geqslant 0 \qquad ⑳$$

对任意实数 x 成立.由上式得

$$f(x^2) = f((-x)^2) = (f(-x))^2$$

因此 $f(x)$ 是偶函数或奇函数.且由式 ⑲ 知,$f(x)$ 是奇函数.由式 ⑲ 知,当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x) \geqslant 0$.

设存在 x_1(不妨设 $x_1 > 0$) 使 $x_2 = f(x_1) \neq x_1$.显然 $x_2 > 0$,不妨设 $x_1 > x_2$.在式 ① 中令 $x = \sqrt{x_1}, y = -x_1$ 得(利用式 ⑳ 及 $f(x)$ 是奇函数)

$$f(x_1 - x_2) = -x_1 + x_2 < 0$$

矛盾.因此 $f(x) = x$.

推广 吴伟朝推广了这个函数方程问题,为此他提出了如下的更一般的函数方程,即

此推广属于吴伟朝

$$f(x^l f^{(m)}(y) + x^n) = x^l y + f^n(x)(\forall x, y \in \mathbf{R}) \cdots \qquad *$$

其中,$l \in \mathbf{N} = \{0,1,2,3,\cdots\}, m, n \in \mathbf{N}^+ = \{1,2,3,4,\cdots\}$.

当取 $l = 0, m = 1, n = 2$ 时,* 就变为原问题了.

需要明确指出的是

$$f^{(m)}(y) = f(f(f(\cdots f(y))\cdots))(m \text{ 个 } f)$$

它是函数的 m 次叠代,而 $f^n(x) = (f(x))^n$.

方程 * 远比原方程复杂,需要分很多情况进行讨论,不同的情形其解法也不同,因而它的解法呈现出非常有趣的结构.下面我们将给出 * 的完整的解答.为此我们先对下面的这个特殊的方程

$$f(\lambda f(y) + x^2) = xy + (f(x))^2, \forall x, y \in \mathbf{R} \qquad ①$$

给出两种不同的解法.

解法 1 由 ① 容易推知,f 既是单射,也是满射,即 f 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一一对应.

此解法属于刘炀

在 ① 中取 $x = 0$ 得 $f(0) = f^2(0)$,所以 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$.

若 $f(0) = 1$,因为 f 是满射,故有 $a \in \mathbf{R}$ 使 $f(a) = 0$,则在 ① 中取 $y = 0, x = a$ 得

$$f(a + a^2) = f^2(a) = 0$$

再由 f 是单射知 $a + a^2 = a$,即 $a^2 = 0, a = 0, f(0) = 0$,与 $f(0) = 1$ 矛盾.所以只能有 $f(0) = 0$.

由 $f(0) = 0$ 可得 $f(x^2) = f^2(x)$,所以 $f^2(-x) = f^2(x)$,再由

f 是单射得 $f(-x)=-f(x)$.

取 $y=0, x=1$ 得 $f(1)=f^2(1)$,得 $f(1)=1$.

取 $x=1$ 得

$$f(f(y)+1)=y+1 \quad ②$$

对每一个 $x\in\mathbf{R}$,都存在相应的 $y\in\mathbf{R}$,使 $f(y)=x-1$,代入②得 $f(x)=y+1, f(x)-1=y$,所以有

$$f(f(x)-1)=x-1 \quad ③$$

综合②和③得

$$f(f(x-1)+1)=f(f(x+1)-1)=x \quad ④$$

在①中取 $y=-\frac{f(x^2)}{x}(x\neq 0)$ 得

$$f\left(xf\left(-\frac{f(x^2)}{x}+x^2\right)\right)=0$$

所以 $\quad xf\left(-\frac{f(x^2)}{x}\right)+x^2=0, f\left(-\frac{f(x^2)}{x}\right)=-x$

即

$$f\left(\frac{f(x^2)}{x}\right)=x, x\neq 0 \quad ⑤$$

由④得

$$f(x+1)=f(x-1)+2 \quad ⑥$$

由④和⑤得

$$f(x-1)+1=\frac{f(x^2)}{x}=f(x+1)-1=\frac{f^2(x)}{x}, x\neq 0$$

所以 $\quad f(x)=\frac{f^2(x+1)}{x+1}-1=\frac{f^2(x-1)}{x-1}+1, x\neq\pm 1$

即

$$\frac{f^2(x+1)}{x+1}-\frac{f^2(x-1)}{x-1}=2, x\neq\pm 1 \quad ⑦$$

由⑥和⑦可解得

$$f(x+1)=x+1$$

及 $\quad f(x-1)=x-1, x\neq\pm 1$

综合上述,即知①的解为 $f(x)=x(x\in\mathbf{R})$(容易验证此解满足①).

解法2 容易证明 f 是满射,也是单射,且 $f^2(x)=f(x^2)$,也可证明 $f(0)=0, f(-x)=-f(x)$(方法与解法1相同).

此解法属于冯炯

由 $f(x^2)=f^2(x)$ 可知,当 $x>0$ 时必有 $f(x)>0$,从而当 $x<0$ 时必有 $f(x)<0$.

在①中取 $x=-y(y>0)$ 得

$$f(y^2-yf(y))=f^2(-y)-y^2=f^2(y)-y^2 \quad ⑧$$

对某一个 $y>0$,若 $f(y)>y$,则由⑧及 $y-f(y)<0$ 知

$$f^2(y)-y^2=f(y(y-f(y)))<0$$

矛盾.若 $f(y) < y$,也由 ⑧ 知

$$f^2(y) - y^2 = f(y(y - f(y))) > 0$$

也矛盾.所以对每一个 $y > 0$,都有 $f(y) = y$.再由 $f(-x) = -f(x)$ 知:对 $y < 0$ 有 $-f(y) = f(-y) = -y$,即 $f(y) = y$.

由上述即知 ② 的解为 $f(x) = x(x \in \mathbf{R})$(检验是容易的).

除了上面的两种解法外,还有别的解法,如证明 f 既是单射也是满射,$f(0) = 0$(这是一个关键),$f^2(x) = f(x^2)$,$f(-x) = -f(x)$,f 在 $\mathbf{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > 0\}$ 上是严格递增的,再由 ⑤ 得

$$f\left(\frac{f^2(x)}{x}\right) = x, x > 0 \qquad ⑨$$

对某一个 $x > 0$,若 $f(x) \geqslant x$,则由 ⑨ 得

$$x = f\left(\frac{f^2(x)}{x}\right) \geqslant f\left(\frac{x^2}{x}\right) = f(x)$$

只有 $f(x) = x$;若 $f(x) \leqslant x$,也由 ⑨ 及 $f(x) > 0$ 得

$$x = f\left(\frac{f^2(x)}{x}\right) \leqslant f\left(\frac{x^2}{x}\right) = f(x)$$

也只有 $f(x) = x$,再由 $f(-x) = -f(x)$ 即可推知 ① 只有一解 $f(x) = x$.

为了解答方程 *,我们考虑原题及 ① 的尽可能多的不同的解答,希望从中发现能攻克 * 的方法和途径.

1. $l = 0$ 的情形

当 $l = 0$ 时,方程 * 变为

$$f(f^{(m)}(y) + x^n) = y + f^n(x), \forall x, y \in \mathbf{R} \qquad **$$

在 ** 中取 $x = 0$ 得

$$f^{(m+1)}(y) = y + t, t = f^n(0) \qquad ⑩$$

由 ** 和 ⑩ 得

$$\begin{aligned} x^n + f^{(m+m^2)}(y) + t = & f^{(m+1)}(x^n + f^{(m+m^2)}(y)) = \\ & f^{(m)}(f^{m^2}(y) + f^n(x)) = \\ & f^{(m-1)}(f^{(m^2-m)}(y) + f^{(2)}(x)^n) = \cdots = \\ & f(f^{(m)}(y) + (f^{(m)}(x))^n) = \\ & y + (f^{(m+1)}(x))^n = y + (x + t)^n \end{aligned} \qquad ⑪$$

另一方面

$$\begin{aligned} x^n + f^{(m+m^2)}(y) + t = & x^n + f^{((m+1)m)}(y) + t = \\ & x^n + f^{((m+1)(m-1))}(y) + 2t = \\ & x^n + f^{((m+1)(m-2))}(y) + 3t = \cdots = \\ & x^n + f^{(m+1)}(y) + mt = \\ & x^n + y + (m+1)t \end{aligned} \qquad ⑫$$

这样,由 ⑪ 和 ⑫ 得

$$y+(x+t)^n=x^n+y+(m+1)t$$

再由二项式定理得

$$(m+1)t=(x+t)^n x^n=C_n^1 t x^{n-1}+ C_n^2 t^2 x^{n-2}+\cdots+t^n,\forall x\in\mathbf{R} \quad ⑬$$

式⑬对任何的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,而 t 为常数,这只有在 $t=0$ 时才可能(当 $n>1$ 时,⑬是关于 x 的 $n-1$ 次方程,如果 $t\neq 0$;当 $n=1$ 时,由⑬得 $mt=0$,即 $t=0$),故只有 $t=0$,$f^n(0)=0$,即 $f(0)=0$(这是第 1 个关键之处),从而有

$$f^{(m+1)}(y)=y,\forall y\in\mathbf{R} \quad ⑭$$

下面分 n 为偶数和奇数两种情形分别讨论.

(1)当 n 为偶数时,由式 * * 和⑭得

$$f(y+x^n)=f(y)+f^n(x)\geqslant f(y) \quad ⑮$$

在⑮中固定 y,让 x 取遍整个 $\mathbf{R}$,则 x^n 取遍所有的非负实数,由此可知:f 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增的.

若对某个 y,有 $f(y)\geqslant y$,则得

$$y=f^{(m+1)}(y)\geqslant f^{(m)}(y)\geqslant\cdots\geqslant f^{(2)}(y)\geqslant f(y)$$

从而 $f(y)=y$;若对某个 y,有 $f(y)\leqslant y$,则得

$$y=f^{(m+1)}(y)\leqslant f^{(m)}(y)\leqslant\cdots\leqslant f^{(2)}(y)\leqslant f(y)$$

也有 $f(y)=y$.

故当 n 为偶数时,$f(y)=y(y\in\mathbf{R})$ 是 * * 的惟一的解.

(2)当 n 为奇数时,显然 f 既是单射,也是满射,由 $f(0)=0$ 得

$$f(x^n)=f^n(x) \quad ⑯$$

由⑮和⑯得

$$f(y+x^n)=f(y)+f(x^n)$$

由此及 n 为奇数推得 f 满足如下著名的柯西方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbf{R} \quad ⑰$$

由⑰及 $f(0)=0$ 得

$$f(-x)=-f(x) \quad ⑱$$

记 $\mathbf{Q}$ 为全体有理数组成的集合,$\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$($\overline{\mathbf{Q}}$ 为全体无理数组成的集合).由柯西方程(即式⑰)我们知道:当 $x\in\mathbf{Q}$ 时,有 $f(x)=f(1)x$(这是函数方程中著名的经典的结果,可以用数学归纳法证明).下面令 $n\geqslant 3$.

在⑯中取 $x=1$ 得 $f(1)=\pm 1$,所以有

$$f(x)=\begin{cases}x,当 f(1)=1 时\\ -x,当 f(1)=-1 时\end{cases},\forall x\in\mathbf{Q} \quad ⑲$$

另外,对于任何的 $k\in\mathbf{Z}$,都有

$$f(kx)=kf(x),\forall x\in\mathbf{R}$$

由⑯和⑰及上述性质得

$$f^n(x+y)=(f(x)+f(y))^n$$

即
$$f((x+y)^n)=(f(x)+f(y))^n$$

$$f(\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^ix^iy^{n-i})=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^if^i(x)f^{n-i}(y)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^if(x^iy^{n-i})=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^if^i(x)f^{n-i}(y)$$

再令 y 取整数，则上式就变为

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^iy^{n-i}f(x^i)=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^if^{n-i}(y)f^i(x) \quad ⑳$$

ⅰ 当 $f(x)=x(\forall x\in\mathbf{Q})$，则由⑳得

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^iy^{n-i}f(x^i)=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^iy^{n-i}f^i(x),y\in\mathbf{Z}$$

即

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^iy^{n-i}(f(x^i)-f^i(x))=0 \quad ㉑$$

在㉑中，固定 $x\in\mathbf{R}$，让 y 取遍整个 $\mathbf{Z}$，㉑恒成立，又㉑的左边可看成是关于 y 的多项式，故这是一个零多项式，其所有各项的系数必都是零，即

$$f(x^i)=f^i(x),x\in\mathbf{R},i=1,2,3,\cdots,n \quad ㉒$$

令 $n\geqslant 3$，则由㉒得 $f(x^2)=f^2(x)\geqslant 0(\forall x\in\mathbf{R})$，从而由⑰知：$f$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格递增的，再由式⑭，用情形 ⅰ 的方法即可推出

$$f(y)=y,\forall y\in\mathbf{R}$$

ⅱ 当 $f(x)=-x(\forall x\in\mathbf{Q})$，则由⑳得

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^iy^{n-i}f(x^i)=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i(-1)^{n-i}y^{n-i}f^i(x)$$

即

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^iy^{n-i}(f(x^i)-(-1)^{n-i}f^i(x))=0,y\in\mathbf{Z} \quad ㉓$$

因为㉓对任何整数 y 都成立，所以必有

$$f(x^i)=(-1)^{n-i}f^i(x),\forall x\in\mathbf{R},i=1,2,3,\cdots,n \quad ㉔$$

令 $n\geqslant 3$，则由㉔得 $f(x^2)=-f^2(x)\leqslant 0$，故当 $x>0$ 时有 $f(x)<0$，从而当 $x<0$ 时 $f(x)=-f(-x)>0$，从而由⑰得：f 在 $\mathbf{R}$ 上是严格递减的.

若对某个 $y\neq 0$，有 $f(y)\geqslant -y$，则有 $f(-y)\geqslant f^{(2)}(y)$，再由⑱得 $f(y)\leqslant -f^{(2)}(y)$，从而 $f^{(2)}(y)\geqslant -f^{(3)}(y),\cdots$，一般地有

$$(-1)^if^{(i)}(y)\geqslant(-1)^{i+1}f^{(i+1)}(y),i=0,1,2,3,\cdots,m$$

其中规定 $f^{(0)}(y)=y$. 所以有

$$f(y)\leqslant -f^{(2)}(y)\leqslant f^{(3)}(y)\leqslant\cdots\leqslant(-1)^{i-1}f^{(i)}(y)\leqslant\cdots\leqslant(-1)^mf^{(m+1)}(y)=(-1)^my$$

如果 m 为奇数，那么由上面可得 $f(y)\leqslant -y$，从而有

$$f(y)=-y$$

若对某个 $y\neq 0$,有 $f(y)\leqslant -y$,则有 $f(-y)\leqslant f^{(2)}(y)$,即 $f(y)\geqslant -f^{(2)}(y),\cdots$,一般地有

$$(-1)^{i-1}f^{(i)}(y)\geqslant(-1)^{i}f^{(i+1)}(y),i=0,1,2,3,\cdots,m$$

所以

$$f(y)\geqslant -f^{(2)}(y)\geqslant f^{(3)}(y)\geqslant\cdots\geqslant(-1)^{i-1}f^{(i)}(y)\geqslant\cdots\geqslant (-1)^{m}f^{(m+1)}(y)=(-1)^{m}y$$

如果 m 为奇数,那么由上面可得 $f(y)\geqslant -y$,从而有

$$f(y)=-y$$

若对某个 $y\neq 0$,有 $f(y)\leqslant -y$,则有 $f(-y)\leqslant f^{(2)}(y)$,即 $f(y)\geqslant -f^{(2)}(y),\cdots$,一般地有

$$(-1)^{i-1}f^{(i)}(y)\geqslant(-1)^{i}f^{(i+1)}(y),i=0,1,2,3,\cdots,m$$

所以

$$f(y)\geqslant -f^{(2)}(y)\geqslant f^{(3)}(y)\geqslant\cdots\geqslant(-1)^{i-1}\cdot f^{(i)}(y)\geqslant\cdots\geqslant (-1)^{m}\cdot f^{(m+1)}(y)=(-1)^{m}\cdot y$$

如果 m 为奇数,那么由上面可得 $f(y)\geqslant -y$,从而有 $f(y)=-y$.

总之,当 m 为奇数时,* * 还有解 $f(x)=-x(\forall x\in\mathbf{R})$,当然 n 是不小于 3 的奇数.

当 m 为偶数时,有 $f(x)=-x(\forall x\in\mathbf{Q})$,代入 * * 得

$$-(y+x^{n})=y+(-x)^{n},\forall x,y\in\mathbf{Q}$$

即 $y=0$,矛盾.

综合 i 和 ii 即得:当且仅当 $n(n\neq 1)$ 和 m 都为奇数时:* * 共有两个解 $f(x)\equiv x$ 和 $f(x)\equiv -x$;否则 $(n\neq 1)$,式 * * 只有一个解 $f(x)\equiv x$.(这里的解是对 $l=0,n\neq 1$ 而言的)

当 $n=1$ 时,则 * * 等价于⑭和⑰的联立方程(其实这也是式 * 的必要条件)

$$\begin{cases}f^{(m+1)}(y)=y\\ f(x+y)=f(x)+f(y)\end{cases},\forall x,y\in\mathbf{R}$$

笔者认为上面的联立方程也许是很难解决的,可能有无穷多个解,因此当 $l=0,n=1$ 时 * 的解还没有解决,请有心的读者.留意这一点.

2. $l>0$ 且 n 为偶数的情形

容易知道方程 * 的函数解 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 必是单射和满射,因而是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一一对应(这与 l,m,n 的具体取值无关),关于这一点在以后各节不再一一指出.当 $l>0$ 且 n 为偶数时,我们首先来证明必有 $f(0)=0$,为此把 l 分为偶数、奇数这两种情况分别讨论.

(1) 当 n 为偶数,$l(l>0)$ 为偶数时,在 * 中取 x 为 $-x$ 可得

$f^n(-x)=f^n(x)$，再由 f 为单射得

$$f(-x)=-f(x),\forall x\neq 0 \quad ㉕$$

（否则由 $f(-x)=f(x)$ 得 $-x=x$，$x=0$，与 $x\neq 0$ 矛盾）由 $*$ 可得

$$f(x^lf^{(m)}(y)+x^n)+f(x^lf^{(m)}(-y)+x^n)=2f^n(x) \quad ㉖$$

（请注意下面的进一步讨论与 n,l 的奇偶性无关）

如果有 $x_0\neq 0$ 使 $f(x_0)=0$，那么由 ㉖ 得（用反证法）

$$f(x_0^lf^{(m)}(-y)+x_0^n)=-f(x_0^lf^{(m)}(y)+x_0^n) \quad ㉗$$

取 y 使 $x_0^lf^{(m)}(-y)+x_0^n$ 与 $x_0^lf^{(m)}(y)+x_0^n$ 都不为零（因为 $f^{(m)}(y)$ 也是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一一对应.）则由 ㉕ 和 ㉗ 得

$$x_0^lf^{(m)}(-y)+x_0^n=-(x_0^lf^{(m)}(y)+x_0^n)$$

即

$$f^{(m)}(-y)+f^{(m)}(y)=-2x_0^{n-l},x_0\neq 0 \quad ㉘$$

在上面的基础上，再取 y 使 $y,f(y),f(-y),f^{(2)}(y)$，$f^{(2)}(-y),\cdots,f^{(m-1)}(y),f^{(m-1)}(-y)$ 都不为 0，则由 ㉕ 和 ㉘ 得

$$0=f^{(m)}(-y)+f^{(m)}(y)=-2x_0^{n-l}$$

即 $x_0=0$，这与 $x_0\neq 0$ 的假定矛盾.所以只能有 $x_0=0$，即 $f(0)=0$.

(2) 当 n 为偶数，l 为奇数时，由 $*$ 得

$$f(-x^lf^{(m)}(y)+x^n)=-x^ly+f^n(-x) \quad ㉙$$

在 $*$ 和 ㉙ 中取 y 使 $f^{(m)}(y)=0$ 并且两式相加得

$$2f(x^n)=f^n(x)+f^n(-x)\geqslant 0 \quad ㉚$$

所以当 $x>0$ 时有

$$f(x)>0$$

（因为 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 不都为 0）.由 $*$ 和 ㉙ 两式相加得 ㉛

$$f(x^lf^{(m)}(y)+x^n)+f(-x^lf^{(m)}(y)+x^n)=f^n(x)+f^n(-x)$$

所以

$$f(t+x^n)+f(-t+x^n)=f^n(x)+f^n(-x),x\neq 0,t\in\mathbf{R} \quad ㉜$$

其中，t 与 x 无关，在 ㉜ 中取 $t=x^n$ 得

$$f(2x^n)+f(0)=f^n(x)+f^n(-x),x\neq 0 \quad ㉝$$

由 ㉚ 和 ㉝ 得

$$2f(x^n)=f(2x^n)+f(0),x\neq 0 \quad ㉞$$

又因为 n 为偶数，所以有

$$f(2x)=2f(x)-f(0),x>0 \quad ㉟$$

设当 $x>0$ 时，$f(x)$ 的下确界为 a（由 ㉛ 知这样的 a 存在.当然 $a\geqslant 0$），则由 ㉟ 可得 $2a=a+f(0)$，即

$$a=f(0)\geqslant 0 \quad ㊱$$

由 ㊱ 和 ㉛ 可知

$$f^{(m)}(0) \geqslant 0 \quad ㊲$$

由㊱及 f 为单射知：当 $x > 0$ 时有

$$f(x) > f(0) = a \geqslant 0 \quad ㊳$$

若 $l > n$，则必有 $f^{(m)}(0) = 0$，否则 $f^{(m)}(0) > 0$，这时在 * 中取 $y = 0$ 得

$$f(x^l f^{(m)}(0) + x^n) = f^n(x) \geqslant 0$$

（因为 n 为偶数）由 l 为奇数及 $l > n$ 知：$x^l f^{(m)}(0) + x^n$ 可以取遍整个 $\mathbf{R}$，这与 f 为满射矛盾. 所以 $f^{(m)}(0) = 0$，再由㊱和㉛知有 $f(0) = 0$.

上面对 $l > n$ 的解法，对 $l < n$ 就失效了，下面给出更深刻的解法，它与 l 和 n 之间的大小关系无关.

由 * 和㉞得

$$f(2x^l f^{(m)}(y) + 2x^n) = 2f(x^l f^{(m)}(y) + x^n) - f(0) = 2(x^l y + f^n(x)) - f(0)$$

令 $x \neq 0$ 且 $x^l f^{(m)}(y) + x^n > 0$，即

$$f(x^l(2f^{(m)}(y) + x^{n-l}) + x^n) = 2x^l y + 2f^n(x) - f(0)$$

令
$$f^{(m)}(y_1) = 2f^{(m)}(y) + x^{n-l}$$

则由上式及 * 得

$$x^l y_1 + f^n(x) = 2x^l y + 2f^n(x) - f(0)$$

即
$$y_1 = 2y + \frac{f^n(x) - f(0)}{x^l}, x \neq 0, x^l f^{(m)}(y) + x^n > 0$$

所以
$$f^{(m)}\left(2y + \frac{f^n(x) - f(0)}{x^l}\right) = 2f^{(m)}(y) + x^{n-l}, x \neq 0$$

且

$$x^l f^{(m)}(y) + x^n > 0 \quad ㊴$$

在 * 中取 $x = 1$ 得

$$f(f^{(m)}(y) + 1) = y + f^n(1) \quad ㊵$$

由㊴和㊵得

$$f(2f^{(m)}(y) + x^{n-l} + 1) = 2y + \frac{f^n(x) - f(0)}{x^l} + f^n(1), x \neq 0$$

且

$$x^l f^{(m)}(y) + x^n > 0 \quad ㊶$$

由㊶和㉞得

$$f\left(f^{(m)}(y) + \frac{x^{n-l} + 1}{2}\right) = y + \frac{f^n(x) - f(0)}{2x^l} + \frac{f^n(1) + f(0)}{2}$$

其中

$$x^l f^{(m)}(y) + x^n > 0, f^{(m)}(y) + \frac{x^{n-l} + 1}{2} > 0 \quad ㊷$$

在㊷中取 $x^{n-l} = 3, x = 3^{\frac{1}{n-l}} > 0$ 得

$$f(f^{(m)}(y)+2)=y+\frac{f^{n}(3^{\frac{1}{n-l}})-f(0)}{2\cdot 3^{\frac{1}{n-l}}}+\frac{f^{n}(1)+f(0)}{2}$$

其中

$$f^{(m)}(y)>-2 \qquad ㊸$$

由㊵和㊸得

$$f(f^{(m)}(y)+2)-f(f^{(m)}(y)+1)=\frac{f^{n}(3^{\frac{1}{n-l}})-f(0)}{2\cdot 3^{\frac{1}{n-l}}}+\frac{f(0)-f^{n}(1)}{2},f^{(m)}(y)>-2 \qquad ㊹$$

由㊹及 $f^{(m)}(y)$ 是满射得

$$f(x+1)-f(x)=a_1,a_1\text{为常数},x>-1 \qquad ㊺$$

由 * 和㊺得

$$f(x^lf^{(m)}(y)+x^n+1)=x^ly+f^n(x)+a_1,a_1\text{为常数}$$

且 $$x^lf^{(m)}(y)+x^n>-1$$

即 $$f(x^l(f^{(m)}(y)+\frac{1}{x^l})+x^n)=x^ly+f^n(x)+a_1$$

其中 $$x^lf^{(m)}(y)+x^n>-1,x\neq 0$$

令 $$f^{(m)}(y)+\frac{1}{x^l}=f^{(m)}(y_1)$$

则由上式及 * 得

$$x^ly_1+f^n(x)=x^ly+f^n(x)+a_1$$

所以 $$y_1=y+\frac{a_1}{x^l}$$

其中 $$x^lf^{(m)}(y)+x^n>-1,x\neq 0$$

从而有 $$f^{(m)}(y+\frac{a_1}{x^l})=f^{(m)}(y)+\frac{1}{x^l} \qquad ㊻$$

其中，a_1 为常数，$x\neq 0,x^lf^{(m)}(y)+x^n>-1$.

由㊻知 $a_1\neq 0$. 若 $a_1<0$，则在㊻中令 $y>0$，固定 y，$x<0$，且 $x\to 0$，可知式㊻左边大于0(这是因为 l 为奇数，及㊲)，而右边可小于 0，矛盾. 所以必有 $a_1>0$.

在㊻中令 $y=0,x>0$ 得(注意 $f^{(m)}(0)\geqslant 0$)

$$f^{(m)}(\frac{a_1}{x^l})=\frac{1}{x^l}+f^{(m)}(0),x>0$$

所以

$$f^{(m)}(x)=\frac{x}{a_1}+f^{(m)}(0),x>0,\text{常数 }a_1>0 \qquad ㊼$$

由㊵和㊺得

$$y+f^n(1)=f(f^{(m)}(y))+a_1,f^{(m)}(y)>-1$$

即

$$f(f^{(m)}(y)) = y + f^n(1) - a_1, f^{(m)}(y) > -1 \quad ㊽$$

由㊼和㊽得

$$f\left(\frac{x}{a_1} + f^{(m)}(0)\right) = x + f^n(1) - a_1, x > 0$$

即 $$f(x + f^{(m)}(0)) = a_1 x + f^n(1) - a_1, x > 0$$

所以

$$f(x) = a_1 x + b_1, x > f^{(m)}(0), b_1 = f^n(1) - a_1 - a_1 f^{(m)}(0) \quad ㊾$$

由㉟和㊾得(令 x 充分大)

$$2a_1 x + b_1 = 2(a_1 x + b_1) - f(0)$$

即得

$$b_1 = f(0) \quad ㊿$$

由 * 和㊾得

$$a_1(x^l(a_1^m y + b_1(1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + \cdots + a_1^{m-1})) + x^n) + b_1 = x^l y + (a_1 x + b_1)^n, x, y \text{ 充分大} \quad 51$$

由 51 容易推出 $b_1 = 0$,即 $f(0) = 0$(这是一个关键).

这样当 n 为偶数时,必有 $f(0) = 0$. 下面我们继续前进.

上面已证 $f(0) = 0$,所以在 * 中取 $y = 0$ 得

$$f(x^n) = f^n(x) \quad 52$$

在 52 中取 $x = 1$ 得 $f(1) = f^n(1)$,但是 $f(1) \neq 0$,所以 $f^{n-1}(1) = 1$,由于 $n - 1$ 为奇数,因此 $f(1) = 1$. 在 * 中取 $x = 1$ 得

$$f(f^{(m)}(y) + 1) = y + 1 \quad 53$$

在 52 中取 $x = -1$ 得

$$1 = f(1) = f^n(-1), f(-1) = \pm 1$$

再由 f 为单射知:$f(-1) = -1$.

在 52 中取 x 为 $-x$ 得

$$f^n(-x) = f(x^n) = f^n(x)$$

所以 $f(-x) = \pm f(x)$,再由 f 为单射知,必有

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbf{R} \quad 54$$

在 53 中取 y 为 $-y$,再由 54 得

$$f(-f^{(m)}(y) + 1) = -y + 1$$

从而

$$f(f^{(m)}(y) - 1) = y - 1 \quad 55$$

由 53 和 55 得

$$f(f^{(m)}(y) + 1) = f(f^{(m)}(y) - 1) + 2$$

再由 $f^{(m)}(y)$ 为满射即得

$$f(x + 2) = f(x) + 2, \forall x \in \mathbf{R} \quad 56$$

由 * 和 56 得

$$f(x^l f^{(m)}(y)+x^n+2)=x^l y+f^n(x)+2$$

即 $$f\left(x^l\left(f^{(m)}(y)+\frac{2}{x^l}+x^n\right)\right)=x^l y+f^n(x)+2, x\neq 0$$

令 $$f^{(m)}(y_2)=f^{(m)}(y)+\frac{2}{x^l}$$

(因此 $f^{(m)}(y)$ 是满射),则由上式及 * 得

$$x^l y_2+f^n(x)=x^l y+f^n(x)+2, x\neq 0$$

即得 $y_2=y+\frac{2}{x^l}$,所以有

$$f^{(m)}(y+\frac{2}{x^l})=f^{(m)}(y)+\frac{2}{x^l}, x\neq 0 \tag{57}$$

在 ⑰ 中取 $y=0$ 得

$$f^{(m)}(\frac{2}{x^l})=\frac{2}{x^l}, x\neq 0, l>0$$

由此可得

$$f^{(m)}(x)=x, x>0 \tag{58}$$

由 * 和 ㊾ 得

$$f(x^l f^{(m)}(y)+x^n)-f(x^n)=x^l y \tag{59}$$

且由 ㊾ 知:当 $x>0$ 时,有 $f(x)>0$;再由此及 ㊿ 知:当 $x<0$ 时,$f(x)<0$. 所以有:当 $x>0$ 时 $f^{(m)}(x)>0$;当 $x<0$ 时有 $f^{(m)}(x)>0$. 因此当 y 取遍 $\mathbf{R}^+=\{x\mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$ 时,$f^{(m)}(y)$ 取遍整个 $\mathbf{R}^+$,从而由 ⑲ 可知:f 在 $\mathbf{R}^+$ 上是严格递增的(任取 $x\in\mathbf{R}^+$,再让 y 取遍整个 $\mathbf{R}^+$).

对任意 $y\in\mathbf{R}^+=\{x\mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$,若有 $f(y)\geqslant y$,则由 f 在 $\mathbf{R}^+$ 上严格递增可得

$$y\leqslant f(y)\leqslant f^{(2)}(y)\leqslant\cdots\leqslant f^{(m-1)}(y)\leqslant f^{(m)}(y)=y$$

(由式 ⑯). 只有 $f(y)=y$;对任意 $y\in\mathbf{R}^+$,若有 $0<f(y)\leqslant y$,则也有

$$y\geqslant f(y)\geqslant f^{(2)}(y)\geqslant\cdots\geqslant f^{(m-1)}(y)\geqslant f^{(m)}(y)=y$$

也有 $f(y)=y$. 因此对 $y\in\mathbf{R}^+$,有 $f(y)=y$. 再由 $f(0)=0$ 及 ㊿ 得,对每个 $x\in\mathbf{R}^+$,都有 $f(x)=x$.

总之,对 n 为偶数($l>0$),* 的解只能是惟一的,即

$$f(x)=x, \forall x\in\mathbf{R}$$

(检验是显然满足 * 的).

3. $l>0$,且 n 为奇数的情形

本节来研究 $l>0$,且 n 为奇数的情形,为此对 l 分偶数和奇数这两种情况分别讨论.

(1) 若 l 为偶数,n 为奇数,在 * 中 x 分别取 1 和 -1 得

$$f(f^{(m)}(y)+1)=y+f^n(1), f(f^{(m)}(y)-1)=y+f^n(-1)$$

所以

$$f(f^{(m)}(y)+1)=f(f^{(m)}(y)-1)+f^{n}(1)-f^{n}(-1)$$

由此可知

$$f(x+2)=f(x)+f^{n}(1)-f^{n}(-1) \quad ⑥⓪$$

由 * 和⑥⓪得

$$f(x^{l}f^{(m)}(y)+x^{n}+2)=x^{l}y+f^{n}(x)+f^{n}(1)-f^{n}(-1)$$

即

$$f\left(x^{l}\left(f^{(m)}(y)+\frac{2}{x^{l}}\right)+x^{n}\right)=x^{l}y+f^{n}(x)+f^{n}(1)-f^{n}(-1),x\neq 0 \quad ⑥①$$

令
$$f^{(m)}(y_3)=f^{(m)}(y)+\frac{2}{x^{l}},x\neq 0$$

则由⑥①和 * 得

$$x^{l}y_3+f^{n}(x)=x^{l}y+f^{n}(x)+f^{n}(1)-f^{n}(-1)$$

所以
$$y_3=y+\frac{f^{n}(1)-f^{n}(-1)}{x^{l}},x\neq 0$$

从而有

$$f^{(m)}\left(y+\frac{f^{n}(1)-f^{n}(-1)}{x^{l}}\right)=f^{(m)}(y)+\frac{2}{x^{l}},x\neq 0 \quad ⑥②$$

在⑥②中令 $y=0$ 得

$$f^{(m)}\left(\frac{f^{n}(1)-f^{n}(-1)}{x^{l}}\right)=\frac{2}{x^{l}}+f^{(m)}(0),x\neq 0$$

因为 $f^{n}(1)-f^{n}(-1)\neq 0$，所以由上式可得

$$f^{(m)}(x)=\frac{2x}{f^{(n)}(1)-f^{(n)}(-1)}+f^{(m)}(0),\forall x\in\mathbf{R} \quad ⑥③$$

由 * 和⑥③得

$$f\left(\frac{2x^{l}y}{f^{(n)}(1)-f^{(n)}(-1)}+x^{l}f^{(m)}(0)+x^{n}\right)=x^{l}y+f^{n}(x) \quad ⑥④$$

在⑥④中令 $x=1$ 得

$$f\left(\frac{2y}{f^{(n)}(1)-f^{(n)}(-1)}+f^{(m)}(0)+1\right)=y+f^{n}(1)$$

所以

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(1)-f^{(n)}(-1)}{2}x-\frac{f^{(n)}(1)-f^{(n)}(-1)}{2}\cdot(1+f^{(m)}(0))+f^{n}(1) \quad ⑥⑤$$

由⑥⑤可知

$$f(x)=ax+b,a,b\text{ 是常数，且 }a\neq 0 \quad ⑥⑥$$

从而
$$f^{(m)}(y)=a^{m}y+b(1+a+a^{2}+\cdots+a^{m-1})$$

代入 * 得

$$a(x^{l}(a^{m}y+b(1+a+a^{2}+a^{3}+\cdots+a^{m-1}))+x^{n})+b=x^{l}y+(ax+b)^{n},\forall x,y\in\mathbf{R} \quad ⑥⑦$$

由⑥⑦可知：$b=0$，且当 m 和 n 均为奇数时 $a=-1$ 或 1，否则

只有 $a=1$，因此当 m 为奇数时 $f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$，当 m 为偶数时 $f(x)=x$，容易检验这些解满足 *.

(2)若 l 为奇数，n 为奇数时，则在 * 中用 $-x$ 代替 x，再与 * 相加得

$$f(-x^lf^{(m)}(y)-x^n)+f(x^lf^{(m)}(y)+x^n)=f^n(-x)+f^n(x)$$

再由 $f^n(y)$ 是满射可知

$$f(t)+f(-t)=f^n(x)+f^n(-x),x\neq 0,t\text{ 与 }x\text{ 无关} \quad ⑱$$

由 ⑱ 可知

$$f^n(x)+f^n(-x)(x\neq 0)=m_1(\text{对同一个 }f\text{ 而言}) \quad ⑲$$

下面对 n 分大于 1 和等于 1 两种情形分别讨论.

i 当 $n>1$ 时，记 $a=f(x),b=f(-x)(x\neq 0)$，由 ⑱ 和 ⑲ 得：

$$\begin{cases}a+b=m_1\\a^n+b^n=m_1\end{cases}$$

从这两式中消去 b 得

$$a^n+(m_1-a)^n-m_1=0 \quad ⑳$$

如果 $m_1\neq 0$，显然式 ⑳ 是一个关于 a 的 $n-1$(大于 1) 次方程，它至多有 $n-1$(有限) 个实数根，但由 * 可知：$a=f(x)$ 可取无穷多个不同的值(因为 $f(x^lf^{(m)}(y)+x^n)-f^n(x)=x^ly$ 可取遍整个 $\mathbf{R}$)，矛盾. 因此只能有 $m_1=0$，从而由 $a+b=m_1$ 得

$$f(-x)=-f(x),x\neq 0 \quad ㉑$$

由 ㉑ 及 f 是满射和单射知

$$f(0)=0 \quad ㉒$$

在 * 中令 $y=0$ 得

$$f^n(x)=f(x^n) \quad ㉓$$

在 ㉓ 中 x 分别取 1 和 -1 可得

$$\begin{cases}f(1)=1\\f(-1)=-1\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f(1)=-1\\f(-1)=1\end{cases}$$

下面再细分为两种情况分别讨论.

a. 当 $f(1)=1,f(-1)=-1$ 时，在 * 中 x 分别取 $1,-1$ 得

$$f(f^{(m)}(y)+1)=y+1 \quad ㉔$$

$$f(-f^{(m)}(y)-1)=-y-1 \quad ㉕$$

在 ㉕ 中把 y 用 $-y$ 来代替，并由 ㉑ 和 ㉒ 得

$$f(f^{(m)}(y)-1)=y-1 \quad ㉖$$

由 ㉔，㉖ 及 $f^{(m)}(y)$ 是满射得

$$f(x+2)=f(x)+2,\forall x\in\mathbf{R} \quad ㉗$$

由 * 和 ㉗ 可得(用前面已多次用过的方法)

$$f^{(m)}(y+\frac{2}{x^l})=f^{(m)}(y)+\frac{2}{x^l},x\neq 0 \tag{78}$$

在 ⑱ 中令 $y=0$ 得

$$f^{(m)}(\frac{2}{x^l})=\frac{2}{x^l},x\neq 0$$

由此即得

$$f^{(m)}(x)=x,\forall x\in \mathbf{R} \tag{79}$$

由 *,⑲ 和 ⑬ 得

$$f(x^ly+x^n)=x^ly+f(x^n) \tag{80}$$

在 ⑳ 中令 $x=1$ 得

$$f(y+1)=y+1,\forall y\in \mathbf{R}$$

所以有 $f(x)=x(\forall x\in \mathbf{R})$,显然满足 *.

b. 当 $f(1)=-1,f(-1)=1$ 时,在 * 中 x 分别取 1 和 −1 得

$$f(f^{(m)}(y)+1)=y-1 \tag{81}$$

$$f(-f^{(m)}(y)-1)=-y+1 \tag{82}$$

在 ⑫ 中用 $-y$ 代替 y,并由 ⑦ 和 ⑫ 得

$$f(f^{(m)}(y)-1)=y+1 \tag{83}$$

由 ⑧ 和 ⑧ 得

$$f(f^{(m)}(y)+1)=f(f^{(m)}(y)-1)-2$$

从而有

$$f(x+2)=f(x)-2,\forall x\in \mathbf{R} \tag{84}$$

由 * 和 ⑭ 可得(用前面已用过多次的方法)

$$f^{(m)}(y-\frac{2}{x^l})=f^{(m)}(y)+\frac{2}{x^l},x\neq 0 \tag{85}$$

在 ⑮ 中令 $y=0$,再由 ⑫ 得

$$f^{(m)}(-\frac{2}{x^l})=\frac{2}{x^l},x\neq 0$$

由上式及 l 为奇数可知

$$f^{(m)}(x)=-x,\forall x\in \mathbf{R} \tag{86}$$

由 * 和 ⑯ 得

$$f(-x^ly+x^n)=x^ly+f^n(x)$$

在上式中取 $x=-1$ 得

$$f(y-1)=-y+1$$

即 $f(x)=-x$. 把 $f(x)=-x$ 代入 * 检验知:当 m 为奇数时,$f(x)=-x$ 适合 *;当 m 不为奇数时,$f(x)=-x$ 不适合 *,应舍去.

ⅱ 当 $n=1$ 时,则 * 变为

$$f(x^lf^{(m)}(y)+x)=x^ly+f(x) \qquad ***$$

在 *** 中取 $y=0$ 得

$$f(x^l f^{(m)}(0)+x)=f(x)$$

再由 f 为单射得 $\quad x^l f^{(m)}(0)+x=x$

所以

$$f^{(m)}(0)=0 \quad ⑧⑦$$

下面对 l 再细分为等于 1 和大于 1 这两种情形分别讨论.

a. 当 $l=1$ 时,在 * * * 中取 $f^{(m)}(y)=-1$ 得

$$xy+f(x)=f(0)$$

即 $\quad y=\dfrac{f(0)-f(x)}{x}, x\neq 0$

所以有 $\quad f^{(m)}\left(\dfrac{f(0)-f(x)}{x}\right)=-1$

从而有 $\quad \dfrac{f(0)-f(x)}{x}=c$,$c$ 为常数

由此即得

$$f(x)=-cx+f(0), \forall x\in\mathbf{R} \quad ⑧⑧$$

把 ⑧⑧ 代入 * * * 可得:$f(0)=0$,且当 m 为奇数时,$c=1$ 或 -1;当 m 为偶数时,$c=-1$.因此当 m 为奇数时,$f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$;当 m 为偶数时,$f(x)=x$.

b. 当 $l>1$ 时,在 * * * 中取 $x=1$ 得

$$f(f^{(m)}(y)+1)=y+f(1) \quad ⑧⑨$$

在 * * * 和 ⑧⑨ 得

$$f^{(m)}(x^l f^{(m)}(y)+x)+1=f^{(m-1)}(x^l y+f(x))+1$$

对上式两边取 f 得

$$x^l f^{(m)}(y)+x+f(1)=f(f^{(m-1)}(x^l y+f(x))+1) \quad ⑨⓪$$

在 ⑨⓪ 中令 $x^l y+f(x)=f(t)$,再由 ⑧⑨ 得

$$x^l f^{(m)}(y)+x+f(1)=f(f^{(m)}(t)+1)=t+f(1)$$

即得

$$f^{(m)}\left(\frac{f(t)-f(x)}{x^l}\right)=\frac{t-x}{x^l}, x\neq 0 \quad ⑨①$$

在 ⑨① 中取 $x=1$ 得

$$f^{(m)}(f(t)-f(1))=t-1 \quad ⑨②$$

由 * * * 和 ⑨② 得(令 $y=f(t)-f(1)$)

$$f(x^l(t-1)+x)=x^l(f(t)-f(1))+f(x) \quad ⑨③$$

在 ⑨③ 中取 $t=2$ 得

$$f(x+x^l)=f(x)+x^l(f(2)-f(1)) \quad ⑨④$$

在 ⑨③ 中取 $t=0$ 得

$$f(x-x^l)=f(x)+x^l(f(0)-f(1)) \quad ⑨⑤$$

由 * * * 和 ⑨② 得(令 $t=x^l f^{(m)}(y)+x$)

$$f^{(m)}(x^l y+f(x)-f(1))=f^{(m)}(f(x^l f^{(m)}(y)+x)-f(1))=x^l f^{(m)}(y)+x-1 \quad ⑨⑥$$

在 ⑯ 中取 $x=-1$ 得

$$f^{(m)}(-y+f(-1)-f(1))=-f^{(m)}(y)-2$$

即得

$$f^{(m)}(y)+f^{(m)}(-y+f(-1)-f(1))=-2 \quad ⑰$$

由 * * * 和 ⑰ 得

$x^l y+f(x)=f(x^l f^{(m)}(y)+x)=$

$f(x^l(-2-f^{(m)}(-y+f(-1)-f(1))+x))=$

$f((-x)^l(f^{(m)}(-y+f(-1)-f(1))+x-2x^l))=$

$f\left((-x)^l\left(f^{(m)}(-y+f(-1)-f(1))+\frac{2x-2x^l}{-x^l}\right)+(-x)\right)$

令

$$f^{(m)}(y_4)=f^{(m)}(-y+f(-1)-f(1))+\frac{2x-2x^l}{-x^l}$$

则由上式及 * * * 得

$$x^l y+f(x)=(-x)^l y_4+f(-x)$$

即
$$y_4=\frac{f(x)-f(-x)+x^l y}{-x^l}, x\neq 0$$

从而有

$$f^{(m)}(-y+f(-1)-f(1))+\frac{2x^l-2x}{x^l}=$$

$$f^{(m)}\left(-y+\frac{f(-x)-f(x)}{x^l}\right), x\neq 0 \quad ⑱$$

在 ⑱ 中令 $\frac{2x^l-2x}{x^l}=1$ 得 $x=2^{\frac{1}{l-1}}$，所以有

$$f^{(m)}\left(-y+\frac{f(-2^{\frac{1}{l-1}})-f(2^{\frac{1}{l-1}})}{2^{\frac{1}{l-1}}}\right)=$$

$$f^{(m)}(-y+f(-1)-f(1))+1 \quad ⑲$$

由 ⑲ 和 ⑱ 得(记常数 $a=f(-2^{\frac{1}{l-1}})-f(2^{\frac{1}{l-1}})/2^{\frac{1}{l-1}}$)

$$f^{(m)}(f(-y+a))=-y+f(-1)-f(1)+f(1)=$$
$$-y+f(-1) \quad ⑳$$

在 ⑳ 中令 $y=-t+1+f(-1)$ 得

$$f^{(m)}(f(t-1-f(-1)+a))=t-1 \quad ㉑$$

比较 ⑳ 与 ⑫ 得

$$f(t-1-f(-1)+a)=f(t)-f(1)$$

由上式即得(令常数 $b=-1-f(-1)+a$)

$$f(x+b)=f(x)-f(1) \quad ㉒$$

下面来证明 $f(1)\neq 0$(从而 $b\neq 0$). 用反证法, 假设 $f(1)=0$, 则由 ⑫ 得

$$f^{(m)}(f(t))=t-1=f(f^{(m)}(t)) \quad ㉓$$

在 ㉓ 中令 $t=y+1$ 得

$$f(f^{(m)}(y+1))=y$$

由 ⑧⑨ 及反证假设 $f(1)=0$ 得

$$f(f^{(m)}(y)+1)=y$$

所以由此两式即得

$$f(f^{(m)}(y+1))=f(f^{(m)}(y)+1)$$

再由 f 为单射即可得

$$f^{(m)}(y+1)=f^{(m)}(y)+1 \quad ⑩④$$

由 ⑩④ 及 ⑧⑦ 得

$$f^{(m)}(x)=x,\forall x\in \mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\cdots\} \quad ⑩⑤$$

由 ⑩⑤ 及 ⑧⑨ 得

$$f(y+1)=y,\forall y\in \mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\cdots\}$$

即

$$f(x)=x-1,\forall x\in \mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\} \quad ⑩⑥$$

由 ⑩⑥ 即得

$$f^{(m)}(x)=x-m,\forall x\in \mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\} \quad ⑩⑦$$

但是这样 ⑩⑦ 与 ⑩⑤ 产生矛盾.因此

$$f(1)\neq 0$$

$$f(x^lf^{(m)}(y)+x+b)=f(x^lf^{(m)}(y)+x)-f(1)$$

$$f\left(x^l\left(f^{(m)}(y)+\frac{b}{x^l}\right)+x\right)=x^ly+f(x)-f(1),x\neq 0$$

令
$$f^{(m)}(y_5)=f^{(m)}(y)+\frac{b}{x^l},x\neq 0$$

由上式及 * * * 得

$$x^ly_5+f(x)=x^ly+f(x)-f(1)$$

即
$$y_5=y-\frac{f(1)}{x^l},x\neq 0$$

所以

$$f^{(m)}\left(y-\frac{f(1)}{x^l}\right)=f^{(m)}(y)+\frac{b}{x^l},x\neq 0 \quad ⑩⑧$$

在 ⑩⑧ 中令 $y=0$,再由 ⑧⑦ 得

$$f^{(m)}\left(-\frac{f(1)}{x^l}\right)=\frac{b}{x^l},x\neq 0 \quad ⑩⑨$$

由 ⑩⑨,⑧⑦ 及 l 为奇数得

$$f^{(m)}(x)=c_1x,\forall x\in \mathbf{R},c_1\text{ 为非零常数} \quad ⑪⑩$$

由 ⑧⑨ 及 ⑪⑩ 得

$$f(c_1x+1)=x+f(1),\forall x\in \mathbf{R}$$

即得

$$f(x)=a_1x+b_1,\forall x\in \mathbf{R},a_1\text{ 和 }b_1\text{ 为常数},a_1\neq 0 \quad ⑪⑪$$

把 ⑪⑪ 代入 * * * 即可得 $b_1=0$,且当 m 为奇数时,$a_1=1$ 或 $a_1=-1$;当 m 不为奇数时,$a_1=1$.因此,当 m 为奇数时,* * * 有两个解 $f(x)=x$ 和 $f(x)=-x$;当 m 为偶数时,* * * 只有一个解 $f(x)=x$.

4. 总结

综合 1,2 和 3 可知:除了“$n = 1, l = 0$”以外,当且仅当 n 和 m 都为奇数时,* 共有两个解 $f(x) = x$ 和 $f(x) = -x$,而当 n 和 m 不全为奇数时,* 只有一个解 $f(x) = x$.其中“$n = 1, l = 0$”这种情形,* 的解还没有全部求出,请读者自行研究探讨.

3 给定空间中的 9 个点,其中任意 4 点都不共面,并在每一对点之间都连一线段.试求出最小值 n,使得在全部所连线段中任意取出 n 条,并将这 n 条中的每一条任意地染为红色或蓝色,则在这 n 条染色线段中必定有同色的三条线段构成一个三角形.

中国命题

解 首先,把问题提得更为一般些,这可以使我们对问题的理解更深入,且易于找到解答.设给定空间中 s 个点,$s \geqslant 4$,其中任意 4 点都不共面.我们在每一对点之间都连一条线段,把这样构成的图形称为 s 个点的完全图.容易算出,这样的完全图有 $s(s-1)/2$ 条线段.要求最小的值 $n = n(s)$,使得在这完全图中任意取出 $n(s)$ 条线段,并对其每一条线段任意地染上红色或蓝色后,必然会有同色的三条线段构成一个三角形(简称为同色三角形).

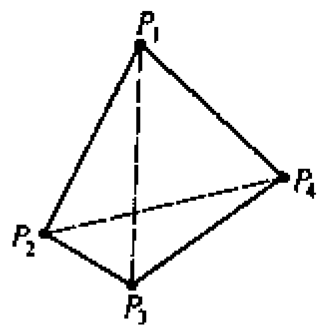


图 33.1

当 $s = 4, 5$ 时,值 $n(4), n(5)$ 不存在.因为图 33.1,图 33.2 表明可以对 4 个点的完全图及 5 个点的完全图的全部线段适当地染色*,而不出现同色三角形.

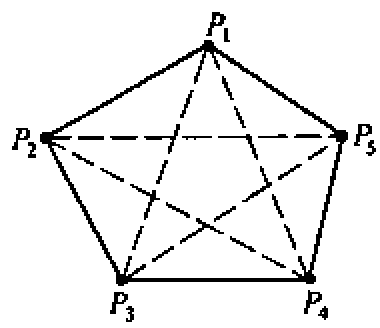


图 33.2

当 $s = 6$ 时,这时的完全图有 15 条线段.图 33.3 表明可对其中 14 条线段适当地染色,而不出现同色三角形.下面来证明:当对全部 15 条线段任意地染色时必会出现一个同色三角形,即 $n(6) = 15$.设这六个点为 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$,并已对它们构成的完全图的全部线段染了色.先来考虑由 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 这 5 个点构成的完全图.如果在给出的染色下,已有同色三角形出现在这 5 个点的完全图中,则结论已经证明.所以,可假定在给出的染色下,这 5 个点的完全图中没有同色三角形.我们来考虑 $P_6P_1, P_6P_2, P_6P_3, P_6P_4, P_6P_5$ 这 5 条线段被染色的情况.由于只染红或蓝两色,所以在这 5 条线段中必有 3 条线段被染上了相同颜色.不妨设 P_6P_1, P_6P_2, P_6P_3 都被染了红色.由于 $\triangle P_1P_2P_3$ 不是同色三角形,所以 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 这 3 条线段中必有被染为红色的,不妨设 P_1P_2 被染为红色.因此 $\triangle P_6P_1P_2$ 的三线段均被染了红色,为

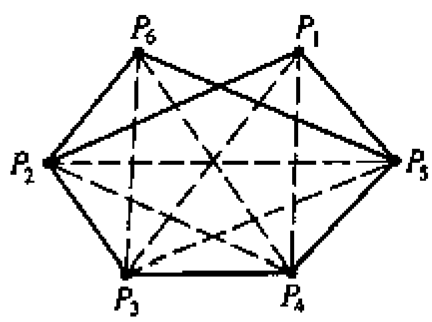


图 33.3

* 我们所说的“染色”均指对所考虑的线段,每一条染以红色或蓝色.图 33.1 ~ 33.6 中实线表示染红色,虚线表示染蓝色.

一同色三角形.这就证明了我们的结论*.

当 $s=7$ 时,完全图共有21条线段.图33.4给出了可选出其中19条线段适当地染色而不出现同色三角形的例子.我们来证明:如果任取20条线段来任意地染色,则一定出现同色三角形.设这7个点为 $P_1,\cdots,P_7$.不妨设未染色的一条线段为 P_1P_7.显见,由 $P_1,\cdots,P_6$ 这6个点构成的完全图中的全部线段均被染色,上面已经证明其中必有同色三角形.因此,$n(7)=20$.

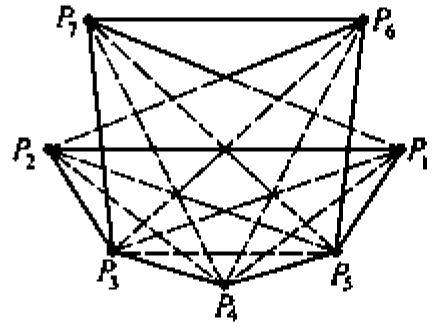
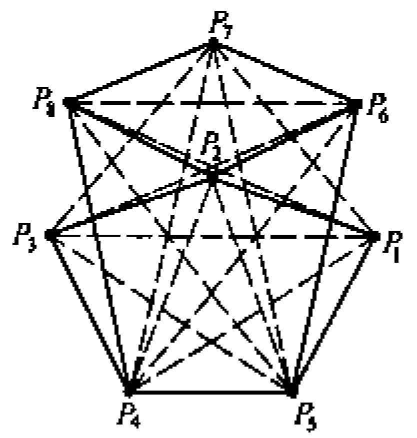
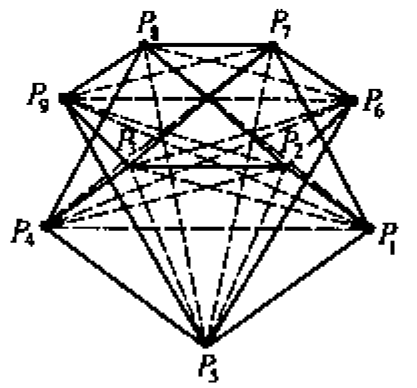


图 33.4

当 $s=8$ 时,完全图共有28条线段.图33.5给出了可选出其中25条线段适当地染色而无同色三角形的例子.我们来证明:如果任取26条线段来任意地染色,则一定出现同色三角形.设这8个点为 $P_1,\cdots,P_8$.不妨设未染色的线段中有 P_1P_8.容易看出:由 $P_1,P_2,\cdots,P_7$ 这7个点构成的完全图中至少有20条线段被染色,上面已经证明了其中必有同色三角形.这就证明了要证的结论,即 $n(8)=26$.


图 33.5

当 $s=9$ 时,完全图共有36条线段.图33.6给出了可选出其中32条线段适当地染色而无同色三角形的例子.我们来证明:如果任取33条线段来任意地染色,则一定出现同色三角形.设这9个点为 $P_1,\cdots,P_9$.不妨设未染色的线段中有 P_1P_9.容易看出:由 $P_1,P_2,\cdots,P_8$ 这8个点构成的完全图中至少有26条线段被染色,由前证可知其中必有同色三角形,即 $n(9)=33$.


图 33.6

在图33.1~33.6中,实线表示染红色,虚线表示染蓝色,不连线表示不染色.由于任意4个点不共面,所以除了给定的点外,这些线段无其他交点.请读者自己思考画这些图的规律,画出满足条件的不同图形,并作进一步的探讨.

4 设在一平面上给定一个圆周 Γ,及 Γ 的一条切线 l 和 l 上的一点 M.试求出该平面上具有如下性质的点 P 的集合:在直线 l 上存在两个点 Q 和 R,使得 M 是线段 QR 的中点,且 Γ 是 $\triangle PQR$ 的内切圆.

法国命题

解法1 建立如下的直角坐标系:取直线 l 为 x 轴,点 M 为坐标原点 O,以及圆周 Γ 在 x 轴的上方,切点为 $T(t,0)$.切点 T 和 M 的相对位置可能有三种情形:$t>0,t=0,t<0$,参见图33.7~33.9.设圆周 Γ 的圆心为 $A(t,1)$(取圆周 Γ 的半径为坐标系的长度单位).这样,所讨论的问题就变为:在 x 轴上取所有可能的这样的一对点 $R(s,0),Q(-s,0),s>0$,使得过它们所作的 Γ 的不同于 x 轴的切线必相交,设交点为 P,且使 Γ 为 $\triangle PQR$ 的内切圆.

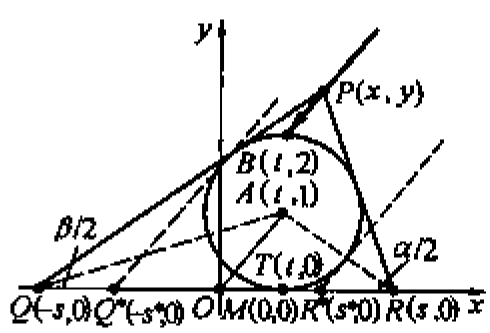


图 33.7

* 事实上可以证明:6个点的完全图被染色后,必有两个同色三角形.请读者试证.

求点 P 的轨迹.

设 Q^*,R^* 是圆周 Γ 的平行于 MA(即 OA)的两条切线与 x 轴的两交点.显见 Q^*,R^* 分别位于 M 的两侧,且线段 Q^*M,MR^* 的长度相等.设 Q^*,R^* 的坐标分别为 $(-s^*,0),(s^*,0),s^*>0$,容易看出,为使 $\triangle PQR$ 是 Γ 的外切三角形,必须有 $s>s^*$,且当 $s\to+\infty$ 时点 P 趋向于点 $B(t,2)$.我们来证明:点 P 的轨迹是从点 B 出发(不含点 B)平行于 MA 且和 Γ 不相交的射线(在图 33.7 ~ 33.9 中均用粗线画出).记点 P 的坐标为 (x,y),由于点 P 的纵坐标必大于点 B 的纵坐标,所以 $y>2$.

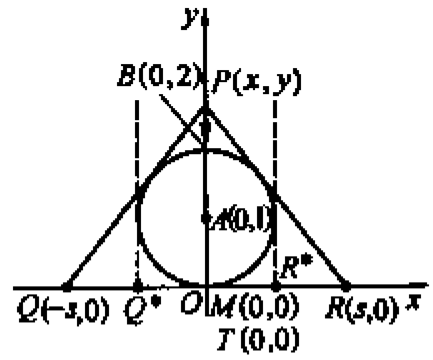


图 33.8

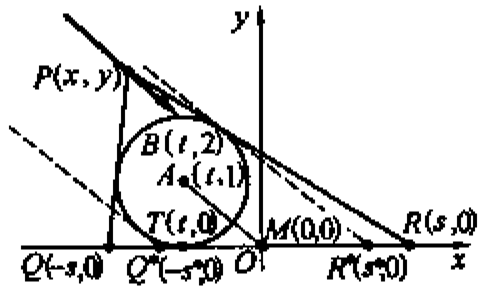


图 33.9

如图 33.7 所示,设 $\angle PRQ=\alpha,\angle PQR=\beta$.显见

$$\cot\frac{\alpha}{2}=s-t,\cot\frac{\beta}{2}=s+t$$

$$\cot\alpha=(s-x)/y,\cot\beta=(s+x)/y$$

利用关系式 $\cot\theta=\frac{1}{2}(\cot\frac{\theta}{2}-1/(\cot\frac{\theta}{2}))$

就可推出

$$\frac{s-x}{y}=\frac{1}{2}(s-t-\frac{1}{s-t})$$

$$\frac{s+x}{y}=\frac{1}{2}(s+t-\frac{1}{s+t})$$

由此可得(注意 $s>0$)

$$\frac{2x}{y}=t\left(1+\frac{1}{s^2-t^2}\right),y>2$$

$$\frac{2}{y}=1-\frac{1}{s^2-t^2},y>2$$

进而有 $x=t(y-1),y>2$

即 $\frac{x-t}{t}=\frac{y-2}{1},y>2$

这就证明了所要的结论.

此解法属于余茂迪、宫宋家

解法 2 设圆 C 与直线 l 相切于点 O,以点 O 为原点,l 为 x 轴建立坐标系,如图 33.10 所示.圆心为 $C(0,b)$,半径 $b>0$,且 b 为定值,设点 $P(x,y)$ 是满足条件的任一点,过点 P 作圆 C 两条切线分别和 x 轴交于点 $Q(m,0),R(n,0)$(其中 m,n 为非零参变量),线段 QR 的中点为 $M(\frac{m+n}{2},0)$,因为 M 是 l 上一定点,所以 $m+n$ 为定值.

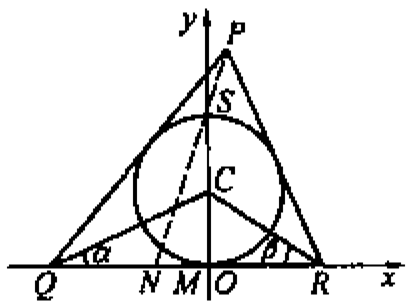


图 33.10

令 $\angle CQR=\alpha,\angle CRQ=\beta$,则

$k_{CQ}=\tan\alpha=-\frac{b}{m},k_{CR}=\tan(\pi-\beta)=-\tan\beta=-\frac{b}{n},\tan\beta=\frac{b}{n}$

当 $\angle PQR$ 和 $\angle PRQ$ 无一直角时

$$|m|\neq b,|n|\neq b$$

$$k_{PQ}=\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(-\frac{b}{m})}{1-(-\frac{b}{m})^2}=\frac{2bm}{b^2-m^2}$$

$$k_{PR}=\tan(\pi-2\beta)=-\tan 2\beta=\frac{-2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=$$

$$-\frac{-2(b/n)}{1-(b/n)^2}=\frac{2bn}{b^2-n^2}$$

于是，切线 PQ 和 PR 的方程分别为

$$y=\frac{2bm}{b^2-m^2}(x-m)$$

$$y=\frac{2bn}{b^2-n^2}(x-n)$$

即

$$(b^2-m^2)y=2bm(x-m) \quad ①$$

$$(b^2-n^2)y=2bn(x-n) \quad ②$$

① - ② 得

$$(n^2-m^2)y=2b(m-n)x+2b(n^2-m^2)$$

因为 $m\neq n$，故得

$$2bx+(m+n)y=2b(m+n) \quad ③$$

它就是点 $P(x,y)$ 的轨迹方程.

方程 ③ 的曲线是过两定点 $N(m+n,0)$，$S(0,2b)$ 的一条直线，显然，满足题意的点 P 的集合是落在该直线上位于点 S（点 S 除外）上方的射线.

特别地，当 $\angle PQR$ 和 $\angle PRQ$ 之一为直角时，不妨设 $\angle PQR=90°$，此时 $|m|=b$，切线 PQ 的方程为

$$x=m \quad ④$$

④ 代入 ② 求得

$$y=\frac{2bn}{m+n} \quad ⑤$$

同时将 ④ 和 ⑤ 代入 ③ 是满足的，所以此时点 P 仍落在所求的射线上.

5 设 O-xyz 是空间直角坐标系，S 是空间中的一个由有限个点构成的集合. 再设 S_x, S_y, S_z 分别是 S 中的所有点在坐标平面 O-yz，O-zx，O-xy 上的正交投影构成的集合（所谓一个点在一个平面上的正交投影是指由这点向该平面所作垂线的垂足）. 证明

$$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$$

其中，$|A|$ 表示有限集合 A 中的元素个数.

意大利命题

证明　因为 S 是有限集，所以可作 K 个平行于 $O\text{-}yz$ 的平面，使得 S 的所有点都在这 K 个平面上，且每个平面上均有 S 中的点．这样，在第 i 个平面上可作 a_i 条直线垂直于 $O\text{-}xy$ 平面，使在这第 i 个平面上的 S 中的点都在这些直线上，且每条直线上均有 S 中的点，在这 a_i 条直线的每一条上所有的 S 中的点的个数分别记为 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{ia_i}$．显见，$a_i>0$，且有

$$|S|=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}=\sum_{i=1}^{K}\sqrt{a_i}\frac{1}{\sqrt{a_i}}\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}$$

利用熟知的不等式，即得

$$|S|^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{K}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}\right)^2\right)$$

容易看出
$$S_z=\sum_{i=1}^{K}a_i$$

$$S_y\geqslant\sum_{i=1}^{K}\max_{1\leqslant j\leqslant a_i}(c_{ij})\geqslant\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{a_i}\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}$$

以及
$$S_x\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant K}\left(\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}\right)\geqslant\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij},1\leqslant i\leqslant K$$

由以上四式立即推出所需要的结论．

6 对每个正整数 n，以 $S(n)$ 表示满足如下条件的最大整数：对每个正整数 $k\leqslant S(n)$，n^2 均可表示为 k 个正整数的平方之和．

英国命题

(1) 证明：对每个 $n\geqslant4$，都有 $S(n)\leqslant n^2-14$；

(2) 试找出一个正整数 n，使得 $S(n)=n^2-14$；

(3) 证明：存在无穷多个正整数 n，使得 $S(n)=n^2-14$．

解　对每个正整数 a，它当然能表示为 a 个正整数的平方和，即

$$a=\underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{a\text{个}}$$

对 $1\leqslant h<a$，a 若可表示为 $a-h$ 个正整数的平方和，则一定是如下的形式，即

$$a=\underbrace{1+\cdots+1}_{a-h-r\text{个}}+b_1^2+\cdots+b_r^2$$

其中，$b_j\geqslant2(1\leqslant j\leqslant r)$，$1\leqslant r\leqslant a-h$．因此，$a$ 可表示为 $a-h$ 个正整数的平方和的充要条件是 h 可表示为

$$h=(b_1^2-1)+\cdots+(b_r^2-1),b_j\geqslant2,1\leqslant j\leqslant r\leqslant a-h \quad ①$$

注意到 $2^2-1=3$，$3^2-1=8$，利用上式可直接验证：a 一定不可表示为 $a-1$ 个，$a-2$ 个，$a-4$ 个，$a-5$ 个，$a-7$ 个，$a-10$ 个，及

$a-13$ 个正整数的平方和(请读者自己验证).

由以上讨论知,当 $a=n^2(n\geqslant 4)$ 时,n^2 一定不能表示为 n^2-13 个正整数的平方和,这就证明了 $S(n)\leqslant n^2-14$,即结论(1)成立.

下面来证明(2).注意到 $2^2-1=3$,以及

$$14=(2^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1) \quad ②$$

$$15=4^2-1 \quad ③$$

$$16=(3^2-1)+(3^2-1) \quad ④$$

容易看出,当 $h\geqslant 14$ 时必可表示为

$$h=(b_1^2-1)+\cdots+(b_r^2-1),b_j\geqslant 2,1\leqslant j\leqslant r \quad ⑤$$

但我们并不能立即断言必有 $r\leqslant a-h$,特别当 $a-h$ 较小时.因此,关键在于取一个特殊的 $a=n^2$,使得 n^2 必可表示为不多几个的正整数的平方和.下面来证明当 $n=13$ 时结论(2)成立*.容易直接验证

* 注意:题中的 k 是这里的 $a-h$,当 $a=n^2$ 时,即 n^2-h.

$$\begin{aligned}13^2 &= 12^2+5^2=12^2+4^2+3^2=11^2+4^2+4^2+4^2=\\&10^2+6^2+5^2+2^2+2^2=\\&10^2+6^2+4^2+3^2+2^2+2^2=\\&11^2+4^2+4^2+2^2+2^2+2^2+2^2=\\&10^2+6^2+5^2+2^2+1+1+1+1=\\&10^2+6^2+4^2+3^2+2^2+1+1+1+1=\\&11^2+4^2+4^2+2^2+2^2+2^2+1+1+1+1=\\&10^2+6^2+5^2+1+1+1+1+1+1+1+1=\\&10^2+6^2+4^2+3^2+1+1+1+1+1+1+1+1=\\&11^2+4^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+\\&1+1+1+1=10^2+6^2+4^2+2^2+2^2+1+1+\\&1+1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

因此,还要证明,当 $14\leqslant h\leqslant 154$ 时,13^2 可表示为 13^2-h 个正整数的平方和.由式①($a=13^2$)知,这只要证明:当 $14\leqslant h\leqslant 154$ 时,必有

$$h=(b_1^2-1)+\cdots+(b_r^2-1),b_j\geqslant 2,1\leqslant j\leqslant r\leqslant 13^2-h \quad ⑥$$

这可以直接对 h 分段验证.我们有

$$14\leqslant h-(11^2-1)\leqslant 34,134\leqslant h\leqslant 154$$

$$14\leqslant h-(10^2-1)\leqslant 34,113\leqslant h\leqslant 133$$

$$14\leqslant h-(9^2-1)\leqslant 32,94\leqslant h\leqslant 112$$

$$14\leqslant h-(8^2-1)\leqslant 30,77\leqslant h\leqslant 93$$

利用式②,③,④,$2^2-1=3,3^2-1=8$ 及 $4^2-1=15$,从以上各式就可推出当 $77\leqslant h\leqslant 154$ 时,必有式⑥成立,且 $r\leqslant 8$.而当 $14\leqslant h\leqslant 76$ 时,必有式⑤成立,且显然有 $r<h\leqslant 13^2-h$,即式

⑥ 亦成立.这就证明了当 $n = 13$ 时结论(2) 成立.

最后,用归纳法来证明:当 $n = 13^l(l = 1,2,\cdots)$ 时,结论(3)成立.当 $l = 1$ 时,由(3)知结论成立.假设当 $l = m(m \geqslant 1)$ 时结论成立.当 $l = m + 1$ 时,由

$$n^2 = (13^{m+1})^2 = 13^2 \cdot 13^{2m}$$

及归纳假设知,n^2 可表示为 k 个正整数平方和,只要

$$1 \leqslant k \leqslant 13^{2m} - 14$$

这样,为了证明结论对 $l = m + 1$ 成立,只要证明:当

$$13^{2m} - 14 < k \leqslant 13^{2m+2} - 14 \quad ⑦$$

时,13^{2m+2} 一定能表示为 k 个正整数平方之和.为此,我们利用等式

$$13^{2m+2} = \underbrace{13^2 + \cdots + 13^2}_{13^{2m}-14-3\text{个}} + 13^2 \cdot 2^2 + 13^2 \cdot 2^2 + 13^2 \cdot 3^2$$

由 $l = 1$ 时结论成立,即每个 13^2 可表示为 $1 \sim 13^2 - 14$ 个正整数平方和,从上式即可推出:当

$$13^{2m} - 14 < k \leqslant (13^{2m} - 14)(13^2 - 14) = 13^{2m+2} - 14(13^{2m} + 13^2) + 14^2$$

时,13^{2m+2} 一定可表示为 k 个正整数平方和.由此及式 ⑦ 知,我们只要证明:当

$$13^{2m+2} - 14(13^{2m} + 13^2) + 14^2 < k \leqslant 13^{2m+2} - 14 \quad ⑧$$

时,13^{2m+2} 必可表示为 k 个正整数平方和.显见,这里的 k 就是式 ① 中的 $13^{2m+2} - h$(取 $a = 13^{2m+2}$).因此,上式即

$$14 \leqslant h < 14(13^{2m} + 13^2) - 14^2 \quad ⑨$$

当 h 满足上式时,由式 ⑤ 及

$$r < h < 28 \cdot 13^{2m} < 13^{2m+2} - h$$

知,必有式 ① 成立(取 $a = 13^{2m+2}$),即 13^{2m+2} 可表示为 $13^{2m+2} - h$(h 满足式 ⑨) 个正整数平方和,亦即 13^{2m+2} 可表示为 k(k 满足式 ⑧) 个正整数平方和.这就证明了当 $l = m + 1$ 时结论也成立.所以(3) 成立.证毕.

本题看来证明繁琐,但思路并不复杂,这就是弄清楚从式 ① 到式 ⑤ 的内容.请读者仔细考虑.

第 34 届国际数学奥林匹克

土耳其,1993

1 设整数 $n > 1$, $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$. 证明: $f(x)$ 不能表示为两个次数都不低于一次的整数系数的多项式的乘积.

爱尔兰命题

证明 用反证法. 设 $f(x)$ 可表示为两个次数都不低于一次的整数系数多项式的乘积,即

$$f(x) = g(x)h(x)$$
$$g(x) = x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \cdots + a_1x + a_0$$
$$h(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0 \qquad ①$$

其中, $l \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, a_i, b_i 均为整数.

由 $a_0b_0 = 3$ 知,不妨设 $a_0 = \pm 1$, $b_0 = \pm 3$. 显见 $f(\pm 1) \neq 0$, $f(\pm 3) \neq 0$,所以必有 $l \geqslant 2$, $m \geqslant 2$. 因此, $n \geqslant 4$.

下面来证明:若 $0 \leqslant k < n - 2$, $b_0, \cdots, b_k$ 都是 3 的倍数,则 b_{k+1} 也是 3 的倍数. 由于 $f(x)$ 的 x^{k+1} 的系数为 0,所以比较式①两边 x^{k+1} 的系数即得(当 $j > l$ 时, $a_j = 0$)

$$b_0a_{k+1} + b_1a_k + \cdots + b_ka_1 + b_{k+1}a_0 = 0$$

由此及 $a_0 = \pm 1$,由条件知 b_{k+1} 也是 3 的倍数.

由于 $b_0 = \pm 3$,从以上所证结论立即推出必有 $m - 1 \geqslant n - 2$,即 $m \geqslant n - 1$,但这和 $l + m = n$, $l \geqslant 2$ 矛盾. 所以假设错误. 证毕.

注 有的解法要用代数基本定理: n 次复系数多项式有 n 个根. 虽很巧妙,但这里的解法较初等. 下面介绍该解法的步骤. $g(x)$, $h(x)$ 同上.

i $l \geqslant 2$.

ii 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 是 $g(x)$ 的 l 个根, $|\alpha_1 \cdots \alpha_l| = 1$.

iii $g(-5)$ 必是 3 的因数.

iv $|g(-5)| = |(5 + \alpha_1)\cdots(5 + \alpha_l)| =$

$$|(\alpha_1 \cdots \alpha_l)^{n-1}(5 + \alpha_1)\cdots(5 + \alpha_l)| = 3^l$$

和 iii, i 矛盾.

英国命题

2 设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 内的一点,满足条件:

Ⅰ $\angle ADB = \angle ACB + 90°$;

Ⅱ $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

(1) 计算比值 $(AB \cdot CD)/(AC \cdot BD)$;

(2) 证明:$\triangle ACD$ 的外接圆和 $\triangle BCD$ 的外接圆在点 C 的切线互相垂直.

解法1 (1) 如图 34.1 所示,作 $\angle ADE = \angle ACB$ 及 $\angle BAE = \angle CAD$. 由此得 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$ 及

$$BC : ED = AC : AD = AB : AE$$

由第一等式及条件 Ⅱ, Ⅰ 就推出, $DB = DE$, $\triangle BED$ 为等腰直角三角形, 及 $BE = \sqrt{2}BD$.

由第二等式及所作的 $\angle BAE = \angle CAD$ 得 $\triangle ACD \backsim \triangle ABE$. 因而有

$$AB : AC = BE : CD = (\sqrt{2}BD) : CD$$

因此所求的比值为 $\sqrt{2}$.

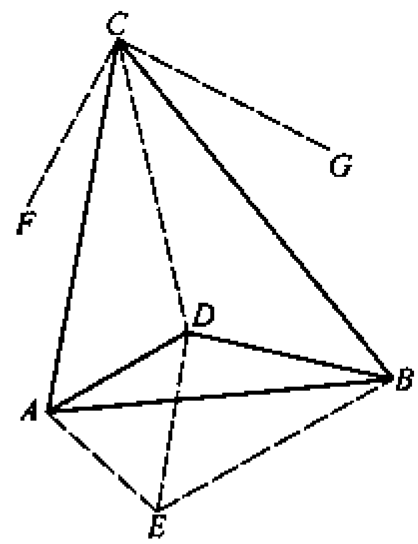


图 34.1

为证 (2), 我们如图 34.1 作直线 CF, CG 使得 $\angle FCD = \angle CBD$, $\angle GCD = \angle CAD$. 由弦切角定理知 CF, CG 分别是 $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ 的外接圆在点 C 的切线. 因此, 结论 (2) 就是要证明 $\angle FCD + \angle GCD = 90°$. 由所作的图及条件 Ⅰ, 我们有

$$\begin{aligned}\angle FCD + \angle GCD &= \angle CBD + \angle CAD = \\ &180° - (\angle ACB + \angle DAB + \angle DBA) = \\ &(180° - \angle DAB - \angle DBA) - \angle ACB = \\ &\angle ADB - \angle ACB = 90°\end{aligned}$$

证毕.

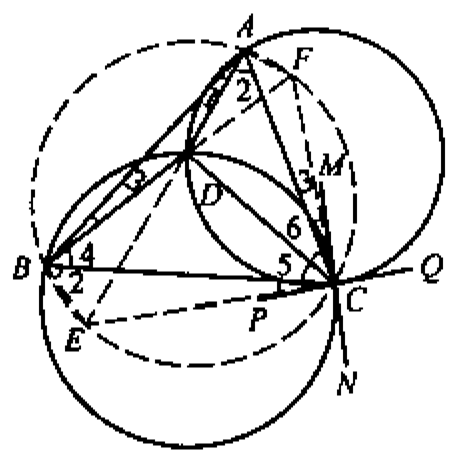


图 34.2

解法2 如图 34.2 所示, 作 $\triangle ABC$ 的外接圆, 分别交 AD, BD 的延长线于 E, F, 连结 BE, CE, AF, CF. 因为

$$\angle ADB = \angle ACB + 90°$$

而
$$\angle ADB = \angle ACB + \angle 2 + \angle 4$$

所以
$$\angle 2 + \angle 4 = 90°$$

在 $\triangle DCE$, $\triangle DCF$ 中有

$$\angle DEC = \angle ABC, \angle DFC = \angle BAC$$

所以
$$\frac{DC}{\sin B} = \frac{DE}{\sin(\angle 1 + \angle 5)}$$

$$\frac{DC}{\sin A} = \frac{DF}{\sin(\angle 3 + \angle 6)}$$

故
$$\frac{DE}{DF} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\sin(\angle 1 + \angle 5)}{\sin(\angle 3 + \angle 6)}$$

而 $$AD \cdot DE = BD \cdot DF$$

且 $$AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

所以 $$\frac{DE}{DF} = \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

有 $$\sin(\angle 1 + \angle 5) = \sin(\angle 3 + \angle 6)$$

又 $$\angle 1 + \angle 5 + \angle 3 + \angle 6 = \angle 1 + \angle 3 + \angle ACB = 180^\circ - \angle ADB + \angle ACB = 90^\circ$$

所以 $$\angle 1 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 6 = 45^\circ$$

因为 $$\angle DBE = \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$$

$$\angle BED = \angle ACB$$

所以 $$DE = \frac{BD}{\sin C}$$

故 $$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{1}{BD} \cdot \frac{DE \cdot \sin B}{\sin(\angle 1 + \angle 5)} = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot \frac{\sin B}{\sin C \cdot \sin(\angle 1 + \angle 5)} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

(2) 设 MN, PQ 分别为 $\triangle BDC$, $\triangle ADC$ 的外接圆在点 C 的切线,则

$$\angle MCD = \angle 4, \angle PCD = \angle 2$$

因为 $$\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$$

所以 $$\angle MCP = \angle MCD + \angle PCD = 90^\circ$$

即 $$MN \perp PQ$$

推广 由 $$\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$$

及 $$AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

求得 $$\angle 1 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 6 = 45^\circ$$

于是 $$\angle BDC = \angle BAC + 45^\circ, \angle ADC = \angle ABC + 45^\circ$$

相反,由 $$\angle BDC = \angle BAC + 45^\circ, \angle ADC = \angle ABC + 45^\circ$$

也可求得 $$\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$$

及 $$AB \cdot CD = \sqrt{2}AC \cdot BC = \sqrt{2}BC \cdot AD$$

因此,原题第(1)问可变换如下(第(2)问仍成立).

命题 1 设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 内一点,使得 $\angle BDC = \angle BAC + 45^\circ$, $\angle ADC = \angle ABC + 45^\circ$.则 $AB \cdot CD = \sqrt{2}AC \cdot BD = \sqrt{2}\,BC \cdot AD$.

如果将命题 1 中的 45° 改为任意锐角 α,我们可得到

命题 2 设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 内一点,α 为锐角,若 $\angle BDC = \angle BAC + \alpha$, $\angle ADC = \angle ABC + \alpha$,则 $BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

特别地,若 $\alpha = 60^\circ$,则 $\angle ADB = \angle ACB + 60^\circ$.于是可得

命题 3 设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 内一点,且 $\angle BDC = \angle BAC + 60^\circ$, $\angle ADC = \angle ABC + 60^\circ$.则 $BC \cdot AD = AC \cdot BD = AB \cdot CD$.

更一般地,我们可得下面的普遍情形.

命题 4 设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 内一点,若 $\angle BDC=\angle BAC+\alpha$,$\angle CDA=\angle CBA+\beta$,$\angle ADB=\angle ACB+\gamma$.则

(1) $BC\cdot AD:CA\cdot BD:AB\cdot CD=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=\sin\alpha:\sin\beta:\sin(\alpha+\beta)$;

(2) $\triangle BDC$ 与 $\triangle CDA$ 的外接圆在点 C 的切线的夹角为 γ,$\triangle CDA$ 与 $\triangle ADB$ 的外接圆在点 A 的切线的夹角为 α,$\triangle ADB$ 与 $\triangle BDC$ 的外接圆在点 B 的切线的夹角为 β.

命题 4 的证明 (1) 如图 34.2 所示,易知

$$\angle 3+\angle 6=\alpha,\angle 1+\angle 5=\beta$$

$$AD\cdot DE=BD\cdot DF$$

$$\frac{DE}{\sin\beta}=\frac{DC}{\sin B},\frac{DF}{\sin\alpha}=\frac{DC}{\sin A}$$

于是
$$\frac{AD}{BD}=\frac{DF}{DE}=\frac{\sin B\cdot\sin\alpha}{\sin A\cdot\sin\beta}$$

所以
$$\frac{BC\cdot AD}{CA\cdot BD}=\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AD}{BD}=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin B\cdot\sin\alpha}{\sin A\cdot\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

同理可得
$$\frac{CA\cdot BD}{AB\cdot CD}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

从而
$$BC\cdot AD:CA\cdot BD:AB\cdot CD=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

易知
$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

有
$$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$$

故
$$BC\cdot AD:CA\cdot BD:AB\cdot CD=\sin\alpha:\sin\beta:\sin(\alpha+\beta)$$

(2) 因为 $\angle MCD=\angle 4$,$\angle PCD=\angle 2$,所以

$$\angle MCP=\angle MCD+\angle PCD=\angle 2+\angle 4$$

而
$$\angle 2+\angle 4+\alpha+\beta=180^\circ$$

所以
$$\angle 2+\angle 4=\gamma$$

故
$$\angle MCP=\gamma$$

即 $\triangle BDC$ 与 $\triangle CDA$ 的外接圆在点 C 的切线的夹角为 γ.

同理可证另外两个夹角.

3 在一个无限的方格棋盘上,有 n^2 个棋子放在一个由 $n\times n$ 个小方格组成的正方块中,每个小方格放一个棋子.按规则进行如下的游戏:每次必须这样移动一个棋子,先沿水平或垂直方向跳过相邻的一个必须放有棋子的小方格,然后,把这个棋子放在紧接着的下一个必须是空着的小方格中,并把被跳过的那个棋子拿走.试求所有的 n,使得这种游戏一定存在一种玩法,导致棋盘上最后只剩下一个棋子.

芬兰命题

解 先把这无限方格棋盘上的方格自左至右,自下而上标号:$s(i,j)$ 表示第 i 行第 j 列处的小方格.假定所给的 $n\times n$ 的方

块由所有小方格 $s(i,j)$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ 组成. 如图 34.3 所示, 画有"•"的小方格表示其中一定有一个棋子, 画有"∘"的小方格表示它一定是空的, 不画的要么表示在移动过程中可确定其是否放有棋子, 要么表示有无均可.

先来试验几个简单情形. $n = 1$ 时显然成立. $n = 2$ 时图 34.3 中(a) ~ (d) 所示的玩法即满足要求.

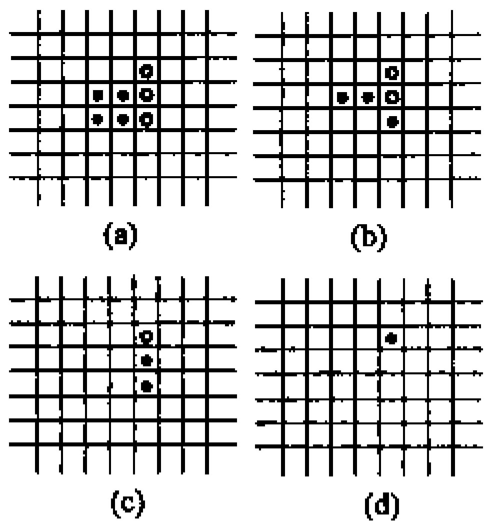


图 34.3

若有四个棋子, 如图 34.4 中(a) 所示. 那么 34.4 给出的走法 (a) ~ (d), 可使我们取走同一列中的三个棋子, 而剩下的一个仍回到原来的位置. 显见, 在成 T 型的五个小方格(可依任意位置放在这棋盘上) 中, 放有保持这样相对位置的四个棋子时, 均可有这样的走法. 利用这样的方法, 当 $n > 3$ 时, 我们很容易把这放有 n^2 个棋子的 $n \times n$ 正方块, 在移动若干步后, 变为放有$(n-3)^2$ 个棋子的$(n-3) \times (n-3)$ 的正方块. 因为利用所说的走法, 首先可依次把三个一组的小方格 $\{s(n,j), s(n-1,j), s(n-2,j)\}$ 取走, $j = 1,2,\cdots,n-3$. 其次依次把三个一组的小方格 $\{s(j,n-2), s(j,n-1), s(j,n)\}$ 取走, $j = n, n-1,\cdots,4$. 最后依次把三个一组的小方格 $\{s(1,j), s(2,j), s(3,j)\}$ 取走, $j = n, n-1, n-2$. 这样, 剩下的就是$(n-3) \times (n-3)$ 的方块, 由 $s(i,j)$, $1 \leqslant i,j \leqslant n-3$, 组成. 图 34.5 及图 34.6 就给出了 $n = 4,5$ 时的走法. 这就表明: 当 $n = 3k+1, 3k+2$ 时, 一定可通过这样的走法, 分别归结为 $n = 1,2$ 的情形. 所以题目要求的玩法是存在的.

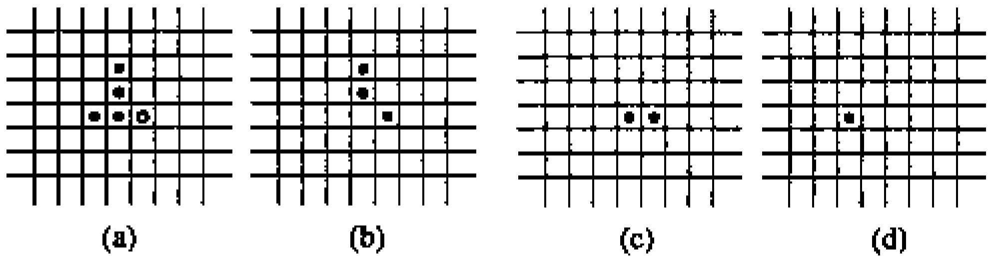


图 34.4

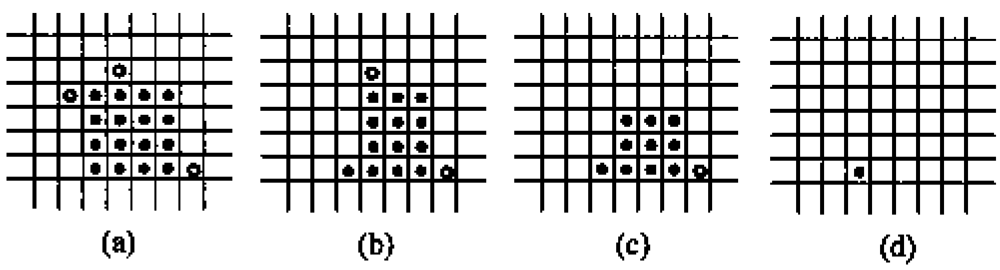


图 34.5

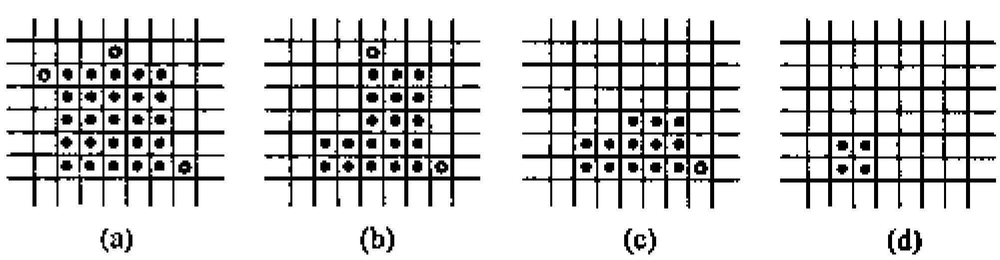


图 34.6

下面来证 $n=3k$ 时,这样的玩法一定不存在.证明的方法是对某种变化过程中存在的某种不变量的运用.首先要指出的是:每移动一次棋子和且仅和水平或垂直的相连的三个小方格有关.如果把每个小方格 $s(i,j)$ 和数 $T(i,j)=i+j$ 相联系,那么对应于上述三个相连小方格的这样三个数被3除后的余数恰好分别为0,1,2.现把所有小方格 $s(i,j)$ 以其相对应的数 $T(i,j)$ 被3除后的余数(仅取0,1,2)来分类,余数相同的属于一类.这样,全部小方格就被分为两两不相交的三类.当在棋盘上放有若干个棋子时,这些棋子也就相应地分为这样三类.如果我们按规定走一步棋子,那么前面的讨论表明:有两类中的棋子各减少1个,而另一类中的棋子增加1个.也就是说,这三类棋子的数目同时改变奇偶性.

当 $n=3k$,n^2 个棋子放在 $n\times n$ 的方块 $s(i,j)$,$1\leqslant i,j\leqslant n$ 中时,我们来计算每一类棋子的个数.容易算出使

$$T(i,j)=t,2\leqslant t\leqslant n+1$$

的棋子有 $t-1$ 个;使

$$T(i,j)=t,n+2\leqslant t\leqslant 2n$$

的棋子有 $2n-(t-1)$ 个.因此当 $n=3k$ 时,相应余数为0的棋子个数有

$$((3-1)+(6-1)+\cdots+(3k-1))+((6k-(3k+3-1))+(6k-(3k+6-1))+\cdots+(6k-(6k-1)))=$$
$$(2+5+\cdots+(3k-1))+((3k-2)+(3k-5)+\cdots+1)=3k^2$$

相应余数为1的棋子个数有

$$(3+6+\cdots+3k)+((6k-(3k+4-1))+(6k-(3k+7-1))+\cdots+(6k-(6k-2-1)))=$$
$$(3+6+\cdots+3k)+((3k-3)+(3k-6)+\cdots+3)=3k^2$$

余下的就是相应余数为2的棋子,个数为

$$(3k)^2-3k^2-3k^2=3k^2$$

因此,三类棋子个数相同,奇偶性也相同.因此,在 $n=3k$ 的情形,每移动一次棋子后,在三类中,余下的棋子的数目的奇偶性仍都相同.因此,决不会出现只剩一个棋子 —— 两类为0,一类为1的情形.所以 $n=3k$ 时,所要的玩法不存在.证毕.

4 对于平面上的三个点 P,Q,R,以 $m(PQR)$ 表示 $\triangle PQR$ 的三条高长的最小值,当 P,Q,R 共线时,令 $m(PQR)=0$.设 A,B,C 是平面上给定的三点.证明:对平面上任意一点 X,必有

$$m(ABC)\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$$

马其顿命题

证明 以下 $S_{\triangle PQR}$ 表示 $\triangle PQR$ 的面积,并记 $\triangle PQR$ 由顶点 P 所引的高为 $h_P(PQR)$(P,Q,R 共线时它等于零). $m(ABC)=0$ 时结论显然成立.

如图 34.7 所示,把 $\triangle ABC$ 的三边双向延长后,全平面被分为 $T_0,T_1,\cdots,T_6$ 七个区域(边界可重复计).我们来证明点 X 位于任一区域时结论都成立.

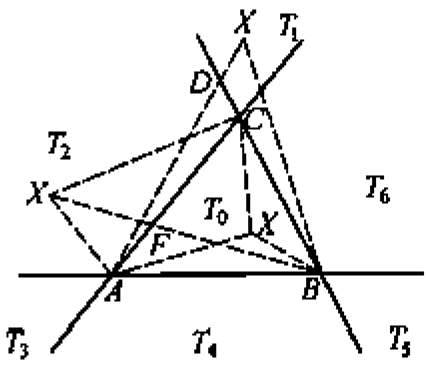


图 34.7

(1)$X\in T_0$,即在 $\triangle ABC$ 内(包括边界).不妨设 $\triangle ABC$ 最长的边是 AB,所以 $m(ABC)=h_C(ABC)$.此外显然有

$$XC\leqslant AB,XB\leqslant AB,XA\leqslant AB$$

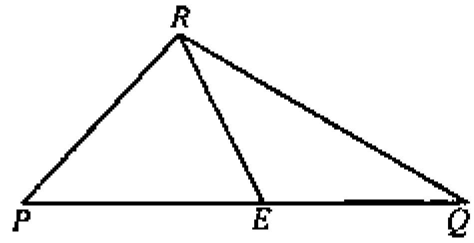
因此

$$m(ABC)\cdot AB=\triangle ABC=S_{\triangle ABX}+S_{\triangle AXC}+S_{\triangle XBC}\leqslant m(ABX)\cdot AB+m(AXC)\cdot AB+m(XBC)\cdot AB$$

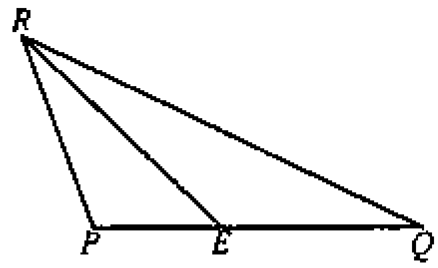
由此即得所要结论.

为证其他各个情形先证一个引理.如图 34.8 所示,点 E 在 $\triangle PQR$ 的边 PQ 上,我们有

$$m(PQR)\geqslant m(PER),m(PQR)\geqslant m(EQR)$$



(a)



(b)

图 34.8

若 $\angle R$ 是 $\triangle PQR$ 中的最大的角,如图 34.8(a) 所示,则有

$$m(PQR)=h_R(PQR)=h_R(PER)=h_R(EQR)$$

由此即得所要结论.

若 $\angle R$ 不是最大的角,不妨设 $\angle P$ 为最大的角,如图 34.8(b) 所示,那么必有 $\angle R<90°$,$\angle Q<90°$.因此有

$$m(PQR)=h_P(PQR)\geqslant h_P(PER)$$

$$h_P(PQR)\geqslant h_E(EQR)$$

这也推出所要结论.引理证毕.

(2) $X\in T_1$.由引理知

$$m(ABC)\leqslant m(ABD)\leqslant m(ABX)$$

所以结论成立.$X\in T_3$,$X\in T_5$ 同理可证.

(3) $X\in T_2$.由引理及已证明的情形(1)得

$$m(ABC)\leqslant m(ABF)+m(BCF)\leqslant m(ABX)+m(XBC)$$

所以结论成立.$X\in T_4$,$X\in T_6$ 同理可证.证毕.

德国命题

5 设 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 是全体正整数组成的集合.是否存在一个定义在集合 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n)$ 具有以下性质:

(1) 对一切 $n\in\mathbf{N}$,$f(n)\in\mathbf{N}$;

(2) 对一切 $n\in\mathbf{N}$,$f(n)<f(n+1)$;

(3) $f(1)=2$;

(4) 对一切 $n\in\mathbf{N}$,$f(f(n))=f(n)+n$.

解法1 如果满足条件的函数$f(n)$存在,则由条件(3)及(4)确定了这样一个数列,即

$$a_1 = f(1) = 2, a_2 = f(a_1) = a_1 + 1 = 3,$$
$$a_3 = f(a_2) = a_2 + a_1 = 5,$$
$$a_j = f(a_{j-1}) = a_{j-1} + a_{j-2}, j \geqslant 3$$

这表明这样的函数$f(n)$在初始项为$a_0 = 1, a_1 = 2$的斐波那契数列$a_0, a_1, a_2, \cdots$上的取值是完全确定的.记数列$\{a_j\} = A_0$.这样,问题就变为当$n \in \mathbf{N}, n \notin A_0$时如何定义$f(n)$使其满足条件.我们用如下的归纳方式来定义.

设$f(n)$已在集合$A_j \supseteq A_0$上有定义,$A_j \neq \mathbf{N}$.设b_0是$f(n)$还没有定义的最小正整数,显见$b_0 \geqslant 3$,且$n = b_0 - 1$时已有定义.现定义

$$f(b_0) = f(b_0 - 1) + 1 = b_1$$
$$f(b_j) = f(b_{j-1}) + b_{j-1} = b_{j+1}, j \geqslant 1$$

这样就扩大了$f(n)$的定义范围到集合$A_{j+1} = A_j \cup \{b_i\}$.容易验证这样的定义是合理的,不矛盾的,且在$A_{j+1}$上满足全部条件.若$A_{j+1} = \mathbf{N}$,则过程结束,不然就继续同样的过程.这样,最终在$\mathbf{N}$上定义了一个满足条件的函数$f(n)$.这一方法的缺点是不仅验证条件繁琐,而且$f(n)$没有一个明确简便的表示式.

下面来介绍另一解法.

我们可以这样来分析:由条件(2),(3)知

$$f(n)/n > 1, n \geqslant 1$$

进而由条件(4)知

$$1 < f(f(n))/f(n) = 1 + (f(n)/n)^{-1} < 2$$

因此可猜测比值$f(n)/n$当n趋于无穷大(或者n有一列特殊值趋于无穷大)时,应该有一极限值α.显见,它应满足

$$\alpha = 1 + \alpha^{-1}, \alpha \geqslant 1$$

因此$\alpha = (\sqrt{5} + 1)/2$.进而,就可猜想$f(n)$是应和$\alpha n$较接近的整数.作为中学竞赛题,一般$f(n)$不应有太复杂的形式,可以设想先用$f(n) = [\alpha n + \beta]$来试一下,其中$\beta$为一待定常数.显见,当

$$2 - \alpha \leqslant \beta < 3 - \alpha \qquad ①$$

时,条件(1),(2),(3)均成立.下面用条件(4)来确定β.为此要计算

$$I(n) = f(f(n)) - f(n) - n$$

我们有(利用$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$)

$$I(n) = [\alpha[\alpha n + \beta] + \beta] - [\alpha n + \beta] - n = [\alpha[\alpha n + \beta] + \beta] - \alpha[\alpha n + \beta] + (\alpha - 1)([\alpha n + \beta] - \alpha n)$$

由
$$\beta - 1 < [x + \beta] - x \leqslant \beta$$
有
$$\alpha(\beta - 1) < I(n) < \beta\alpha$$

右边不取等号是因为 α 是无理数，$\alpha n+\beta$ 与 $\alpha(\alpha n+\beta)+\beta$ 不能同时为整数. 因为 $I(n)$ 是整数，为使条件(4) 成立，即对所有 n，$I(n)=0$，只须 β 满足

$$1-\alpha^{-1}\leqslant\beta\leqslant\alpha^{-1}$$

这时式①也一定成立. 这样，任取一满足上式的 β，$f(n)=[\alpha n+\beta]$ 均满足全部条件. 证毕.

这是求解一类函数方程的一种方法的特例. 本题与第 20 届第 3 题完全类似，且要容易些. 容易证明那道题中要求的函数满足

$$f(f(n))=f(n)+n-1, f(1)=1$$

$$g(n)=f(n)+n$$

可以用这里的方法来解这道题. 但是，这两道题都不能算是好的竞赛题. 因为知道这种方法的很容易做出，不知道的就难以想到.

解法 2 从 $f(1)=2$ 出发，利用 $f(f(n))=f(n)+n$，我们得到

$$f(2)=2+1=3, f(3)=3+2=5, f(5)=5+3=8,$$

$$f(8)=8+5=13,\cdots$$

这表明每个斐波那契数的像是下一个斐波那契数，它可以用数学归纳法证明.

现在需要对剩下的数赋以其他的正整数值，使得满足所给的函数方程. 我们要用到 Zeckendorf 定理，它是说每个正整数 n 都可以惟一地表示为若干个不相邻的斐波那契数之和. 现在将此表达式写成如下形式，即

$$n=\sum_{j=1}^{m}F_{i_j},\ |i_j-i_{j-1}|\geqslant 2$$

和式中下标递增排列. 我们要证明：$f(n)=\sum\limits_{j=1}^{m}F_{i_j+1}$ 满足问题的所有条件. 事实上，1 本身就是一个斐波那契数，且 $f(1)=2$ 是下一个斐波那契数. 并且

$$f(f(n))=f(\sum_{j=1}^{m}F_{i_j+1})=\sum_{j=1}^{m}f_{i_j}+2=\sum_{j=1}^{m}(F_{i_j+1}+F_{i_j})=$$

$$\sum_{j=1}^{m}F_{i_j+1}+\sum_{j=1}^{m}F_{i_j}=f(n)+n$$

下面我们需要区分以下两种情形.

i 设 n 的斐波那契数表示中不含 F_1，也不含 F_2，则 $n+1$ 的表示为 n 的表示中加上一个 1. 从而 $f(n)$ 与 $f(n+1)$ 的表示中惟一的区别是 $f(n+1)$ 多一个和数，从而 $f(n)<f(n+1)$.

ii 设 n 的斐波那契数表示中有 F_1 或 F_2，加上 1 时，和式中某一项将变为一个较大的斐波那契数. 在 $n+1$ 的表示中有一个“最

大的斐波那契数"比 n 的表示中对应的数大(在斐波那契数表示中,下标最大的项与下标较小项逐项对比——译者注).这一性质在作用 f 之后仍然保持,所以 $f(n+1)>f(n)$(这是因为 $f(n)$ 的表示中没有相邻的斐波那契数出现,所有较小的斐波那契数之和都小于 $f(n+1)$ 中那个"最大的斐波那契数").

荷兰命题

6 设整数 $n>1$.有 n 盏灯 $L_0,L_1,\cdots,L_{n-1}$ 依次排列在一个圆周上,每盏灯可以有"开"或"关"两种状态.现依次进行一系列步骤:$S_0,S_1,\cdots,S_j,\cdots$,每个步骤 S_j 按以下规则来影响灯 L_j 的状态:若它的前一盏灯 L_{j-1} 是"关",则 L_j 的状态不变;若灯 L_{j-1} 是"开",则 L_j 改变状态,即从"开"变为"关",或从"关"变为"开".这里约定当 $h<0$ 或 $h\geqslant n$ 时,灯 L_h 就是灯 L_r,r 满足

$$h=qn+r,0\leqslant r<n$$

现假设开始时全部灯都是开着的.证明:

(1)一定存在正整数 $M(n)$,使得经过 $M(n)$ 个步骤 $S_0,S_1,\cdots,S_{M(n)-1}$ 后,全部灯也是开着的;

(2)若 $n=2^k$,则可取(1)中的 $M(n)=n^2-1$;

(3)若 $n=2^k+1$,则可取(1)中的 $M(n)=n^2-n+1$.

证法1 以 $L_i(j)$ 表示在施行步骤 S_j 之前灯 L_i 的状态,并约定

$$L_i(j)=\begin{cases}1, L_i(j)\text{ 为开}\\0, L_i(j)\text{ 为关}\end{cases}$$

这样,n 元数组(仅取值 0,1)

$$T_n(j)=T(j)=\{L_0(j),L_1(j),\cdots,L_{n-1}(j)\}$$

就表示施行步骤 S_j 之前这 n 盏灯的状态.本题的条件就是

$$T(0)=\{1,1,\cdots,1\}$$

现约定以下的运算(即模 2 的加法),即

$$0+0=0,1+0=0+1=1,1+1=0$$

这样,施行步骤 S_j 后,这 n 盏灯的状态为

$$T(j+1)=\{L_0(j),\cdots,L_{j-1}(j),L_j(j)+L_{j-1}(j),\\L_{j+1}(j),\cdots,L_{n-1}(j)\}$$

这里灯 L_j 见题中约定.容易看出

$$T(n)=\begin{cases}\{0,1,0,1,\cdots,0,1\},n\text{ 为偶}\\\{0,1,0,1,\cdots,0,1,0\},n\text{ 为奇}\end{cases}$$

(1)要证明对给定的 $n>1$,一定存在正整数 $M=M(n)$ 使得

$$T(M)=\{1,1,\cdots,1\}$$

由于对给定的 n，n 元数组 $T(j)$ 仅有有限种可能. 所以，在无穷序列 $T(0)$，$T(1)$，$T(2)$，… 中一定会出现完全相同的两个 n 元数组，记为

$$T(M_1+K)=T(M_1)$$

其中，$M_1\geqslant 0$，$K>0$. 此外，对任一 $l\geqslant 1$，$T(l)$ 不仅惟一确定 $T(l+1)$ 及其以后各态，而且也惟一确定 $T(l-1)$ 及其以前的各态. 因此对任意的 $j\geqslant 0$ 必有

$$T(j+K)=T(j)$$

特别地 $T(K)=T(0)$，取 $M(n)=K$ 就证明了(1).

下面用归纳法来证明(2) 和(3).

(2) 先考查几个具体例子. $k=1$，$n=2$ 时

	$T(0)$	$T(2)$	$T(2^2-1)$
L_0	1	0	1
L_1	1	1	1

结论成立. 当 $k=2$，$n=2^2$ 时

	$T(0)$	$T(2^2)$	$T(2\cdot 2^2)$	$T(3\cdot 2^2)$	$T(2^4-1)$
L_0	1	0	1	0	1
L_1	1	1	0	0	1
L_2	1	0	0	0	1
L_3	1	1	1	1	1

结论也成立. 从观察以上实例，启发我们来归纳证明以下结论：对任意正整数 k 及 $n=2^k$，必有

$$L_{n-1}(j)=1,0\leqslant j\leqslant(n-1)n \quad ①$$

$$L_{n-2}(j)=0,n-1\leqslant j\leqslant(n-1)n \quad ②$$

以及

$$T_n((n-1)n)=\{0,0,\cdots,0,1\} \quad ③$$

显见，由上式立即推出 $T_n(n^2-1)=\{1,1,\cdots,1\}$，即证明了(2). 下面用归纳法来证明这结论.

$k=1$ 时，由实例知结论成立. 假设 $k=m$，$n=2^m$ 时结论成立. 当 $k=m+1$，$n=2^{m+1}$ 时，我们有

	$T_{2^{m+1}}(0)$	$T_{2^{m+1}}(2^{m+1})$
L_0	1	0
L_1	1	1
⋮	⋮	⋮

L_{2^m-2}	1	0
L_{2^m-1}	1	1
L_{2^m}	1	0
L_{2^m+1}	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L_{2^{m+1}-2}$	1	0
$L_{2^{m+1}-1}$	1	1

其中，$T_{2^{m+1}}(2^{m+1})$ 是直接由题目条件写出的. 把这 2^{m+1} 盏灯，分为前面的 2^m 盏灯 $L_0,\cdots,L_{2^m-1}$，及后面的 2^m 盏灯 $L_{2^m},\cdots,L_{2^{m+1}-1}$. 此后，前 2^m 盏灯的变化仅和灯 $L_{2^{m+1}-1}$ 的状态直接有关，而后 2^m 盏灯的变化仅和灯 L_{2^m-1} 的状态直接有关. 由于

$$L_{2^{m+1}-1}(2^{m+1}) = L_{2^m-1}(2^{m+1}) = 1$$

从归纳假设对 $k = m$ 成立可知，在

$$T_{2^{m+1}}(s\cdot 2^{m+1}),1 \leqslant s \leqslant 2^m - 1$$

各态中，前面与后面的 2^m 盏灯的状态都分别同只有 2^m 盏灯的情形，在

$$T_{2^m}(s\cdot 2^m),1 \leqslant s \leqslant 2^m - 1$$

各态中的状态相同. 因此有(取 $s = 2^m - 1$)

	$T_{2^{m+1}}((2^m-1)2^{m+1})$	$T_{2^{m+1}}(2^m\cdot 2^{m+1})$
L_0	0	1
L_1	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L_{2^m-2}	0	1
L_{2^m-1}	1	0
L_{2^m}	0	0
L_{2^m+1}	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L_{2^{m+1}-2}$	0	0
$L_{2^{m+1}-1}$	1	1

再由此及归纳假设(特别是式 ②) 成立，就推出 $L_0,L_1,\cdots,L_{2^m-2}$，$L_{2^{m+1}-1}$ 这 2^m 盏灯在

$$T_{2^{m+1}}(s\cdot 2^{m+1}),2^m \leqslant s \leqslant 2^{m+1} - 1$$

各态中的状态同只有 2^m 盏灯的情形在

$$T_{2^m}((s-2^m)2^m),2^m \leqslant s \leqslant 2^{m+1} - 1$$

各态中的状态相同. 特别当 $s = 2^{m+1} - 1$ 时有

	$T_{2^{m+1}}((2^{m+1}-1)2^{m+1})$
L_0	0
L_1	0
⋮	⋮
L_{2^m-2}	0
L_{2^m-1}	0
L_{2^m}	0
L_{2^m+1}	0
⋮	⋮
$L_{2^{m+1}-2}$	0
$L_{2^{m+1}-1}$	1

这就证明了当 $k = m + 1$ 时结论也成立.(2) 证毕.

(3) 同样先考查几个实例. $k = 1, n = 3$ 时,我们有

	$T(0)$	$T(3)$	$T(2\cdot 3)$	$T(2\cdot 3+1)$
L_0	1	0	0	1
L_1	1	1	1	1
L_2	1	0	1	1

结论成立. $k = 2, n = 5$ 时,我们有

	$T(0)$	$T(5)$	$T(2\cdot 5)$	$T(3\cdot 5)$	$T(4\cdot 5)$	$T(4\cdot 5+1)$
L_0	1	0	0	0	0	1
L_1	1	1	1	1	1	1
L_2	1	0	1	0	1	1
L_3	1	1	0	0	1	1
L_4	1	0	0	0	1	1

结论也成立. 由此启发我们来归纳证明以下结论:对任意正整数 k 及 $n = 2^k + 1$,必有

$$L_0(j) = 0, 1 \leqslant j \leqslant (n-2)n \quad ④$$

$$L_{n-2}(j) = 0, 2n - 1 \leqslant j \leqslant (n-2)n \quad ⑤$$

$$L_{n-1}(j) = 0, n \leqslant j \leqslant (n-2)n \quad ⑥$$

及

$$T_n((n-2)n) = \{0,1,0,\cdots,0\} \quad ⑦$$

显见,由式 ⑦ 立即推得

$$T_n((n-1)n) = \{0,1,1,\cdots,1\}$$

$$T_n((n-1)n+1) = \{1,1,1,\cdots,1\}$$

即(3) 成立. 下面由归纳法来证明这结论.

由实例知 $k=1,2$ 时结论成立.假设结论当 $k=m(m\geqslant 2)$ 时成立.当 $k=m+1,n=2^{m+1}+1$ 时,有

	$T_{2^{m+1}+1}(0)$	$T_{2^{m+1}+1}(2^{m+1}+1)$
L_0	1	0
L_1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L_{2^m-2}	1	0
L_{2^m-1}	1	1
L_{2^m}	1	0
L_{2^m+1}	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L_{2^{m+1}-2}$	1	0
$L_{2^{m+1}-1}$	1	1
$L_{2^{m+1}}$	1	0

把这 $2^{m+1}+1$ 盏灯分为前面 $L_0,L_1,\cdots,L_{2^m}$ 及后面 $L_{2^m},L_{2^m+1},\cdots,L_{2^{m+1}}$ 各 2^m+1 盏灯,其中灯 L_{2^m} 重复出现.由此可看出,此后的变化,前面的 2^m+1 盏灯与灯 L_{2^m+1} 的状态直接相关,而后面的 2^m+1 盏灯与灯 L_{2^m-1} 的状态直接相关(要注意的是后面的 2^m+1 盏灯实际上与状态 $L_{2^m-1}(j)$ 有关,$j\geqslant 2^{m+1}+2^m+1$).由此及归纳假设当 $k=m$ 时成立,特别是式⑤成立(注意 $m\geqslant 2$,j 的变化范围非空),就推出在

$$T_{2^{m+1}+1}(s(2^{m+1}+1)),1\leqslant s\leqslant(2^m+1)-2$$

各态中,这前后各 2^m+1 盏灯的状态都分别同只有 2^m+1 盏灯的情形,在

$$T_{2^m+1}(s(2^m+1)),1\leqslant s\leqslant(2^m+1)-2$$

各态中的状态相同.因此有(取 $s=2^m-1,p=2^{m+1}+1$)

	$T_{2^{m+1}+1}(sp)$	$T_{2^{m+1}+1}(2^mp)$	$T_{2^{m+1}+1}((2^m+1)p)$
L_0	0	0	0
L_1	1	1	1
L_2	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L_{2^m-1}	0	1	1
L_{2^m}	0	1	0
L_{2^m+1}	1	0	0
L_{2^m+2}	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L_{2^{m+1}}$	0	0	0

再利用归纳假设可知：前 2^m+1 盏灯 $L_0,L_1,\cdots,L_{2^m}$ 在

$$T_{2^{m+1}+1}(s(2^{m+1}+1)),2^m+1\leqslant s\leqslant 2^{m+1}-1$$

中的状态同只有 2^m+1 盏灯在

$$T_{2^m}((s-2^m)(2^m+1)),2^m+1\leqslant s\leqslant 2^{m+1}-1$$

中的状态一样. 此外后面的 2^m 盏灯总是关的，即取值 0. 因此有（取 $s=2^{m+1}-1$）

	$T_{2^{m+1}+1}((2^{m+1}-1)(2^{m+1}+1))$
L_0	0
L_1	1
L_2	0
$\vdots$	$\vdots$
$L_{2^{m+1}}$	0

即当 $k=m+1$ 时，式 ⑦ 成立，综合以上讨论知式 ④ ~ ⑦ 当 $k=m+1$ 时全部成立. 证毕.

证法 2　用 $x_j\in\{0,1\}$ 表示灯 L_j 的状态（0 表示“关”，1 表示“开”）. 操作 S_j 影响 L_j 的状态，在操作前 L_j 的状态为 x_{j-n}. 在 S_j 操作时，L_{j-1} 处于状态 x_{j-1}，所以对 $j\geqslant 0$ 有

此证法属于 G.N.de Bruijn，解答属于 Marcin Kuczma

$$x_j\equiv x_{j-n}+x_{j-1}(\mathrm{mod}\ 2)\qquad ⑧$$

注意到，初始状态下（所有的灯都是“开”）有

$$x_{-n}=x_{-n+1}=x_{-n+2}=\cdots=x_{-2}=x_{-1}=1\qquad ⑨$$

这表明在时刻 j 该系统可以用向量 $v_j=\{x_{j-n},\cdots,x_{j-1}\}$ 表示，$v_0=\{1,1,\cdots,1\}$. 由于只有 2^n 个不同的向量，在数列 $v_0,v_1,v_2,\cdots$ 中必出现相同的向量. 注意到从 v_j 到 v_{j+1} 的操作是可逆的. 因此 $v_{j+m}=v_j$ 蕴含 $v_m=v_0$，故至多经过 2^n 次操作后，必有一次回到初始状态，这表明(1) 成立.

为证(2) 和(3)，利用式 ⑧ 有

$$x_j\equiv x_{j-n}+x_{j-1}\equiv(x_{j-2n}+x_{j-n-1})+(x_{j-1-n}+x_{j-2})\equiv$$
$$x_{j-2n}+2x_{j-n-1}+x_{j-2}\equiv x_{j-3n}+3x_{j-2n-1}+3x_{j-n-2}+x_{j-3}$$

如此等等. 对式 ⑧ 重复运用 r 次后，我们得到等式

$$x_j\equiv\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x_{j-(r-i)n-i}(\mathrm{mod}\ 2)$$

对所有使得　$j-(r-i)n-i\geqslant -n$

的 j,r 均成立. 特别地，若 r 有形式 $r=2^k$，则二项式系数 $\binom{r}{i}$ 除最外面的两个都是偶数. 从而得到

$$x_j\equiv x_{j-rn}+x_{j-r}(\text{对 }r=2^k\text{ 成立})\qquad ⑩$$

只要下标不小于 $-n$,即只要 $j \geqslant (r-1)n$,式 ⑩ 都成立.

现在如果 $n = 2^k$,选取 $j \geqslant n^2 - n$.在 ⑩ 中令 $r = n$,结合 ⑧ 知

$$x_j \equiv x_{j-n^2} + x_{j-n} \equiv x_{j-n^2} + (x_j - x_{j-1})$$

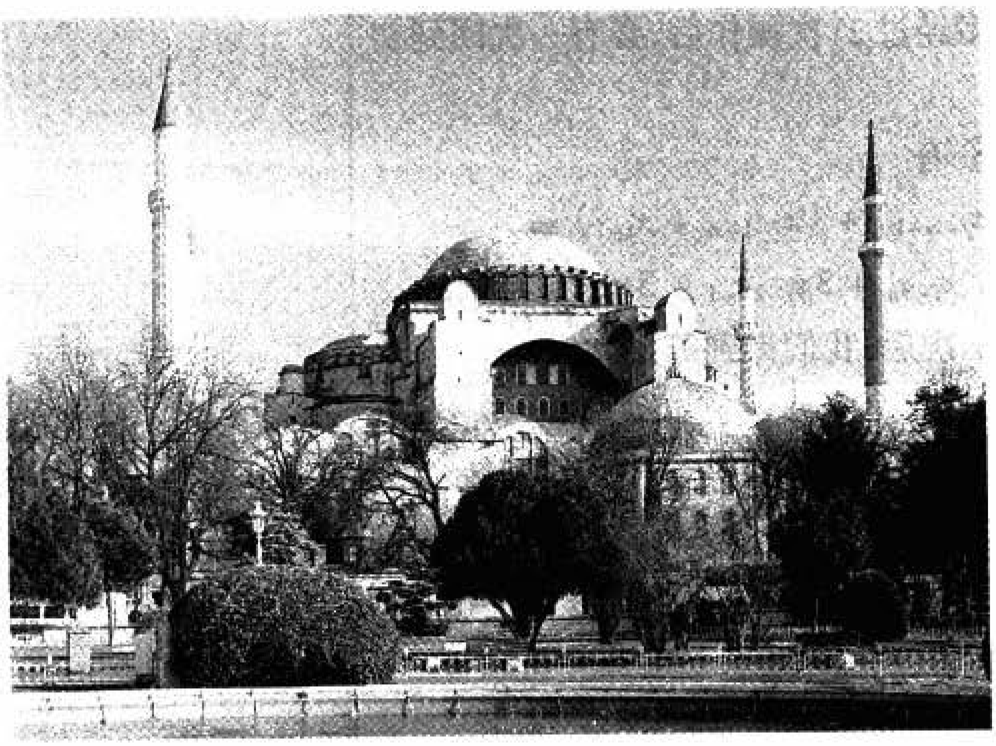
因此 $x_{j-n^2} = x_{j-1}$.这表明数列 x_j 有周期 $n^2 - 1$,从而数列 ⑨ 在经过恰好 $n^2 - 1$ 步后重复出现,故(2) 成立.

如果 $n = 2^k + 1$,选下标 $j \geqslant n^2 - 2n$,在 ⑩ 中令 $r = n - 1$.结合 ⑧ 可得

$$x_j \equiv x_{j-n^2+n} + x_{j-n+1} \equiv x_{j-n^2+n} + (x_{j+1} - x_j) \equiv$$

$$x_{j-n^2+n} - x_{j+1} + x_j$$

(因为 $x \equiv -x \pmod 2$)),于是 $x_{j-n^2+n} = x_{j+1}$.所以数列 x_j 有周期 $n^2 - n + 1$,(3) 获证.



君士坦丁堡的圣索菲亚大教堂

第 35 届国际数学奥林匹克

中国香港，1994

法国命题

1 设 m 和 n 是正整数. $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的不同元素. 每当 $a_i + a_j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$ 时，就有某个 k，$1 \leqslant k \leqslant m$，使得 $a_i + a_j = a_k$. 求证

$$\frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \geqslant \frac{1}{2}(n+1)$$

证法 1 不妨设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$. 关键在于证明，对任意 i，当 $1 \leqslant i \leqslant m$ 时，有

$$a_i + a_{m+1-i} \geqslant n + 1 \quad ①$$

用反证法，假如存在某个 $i, 1 \leqslant i \leqslant m$，有

$$a_i + a_{m+1-i} \leqslant n \quad ②$$

由于 $a_1 > a_2 > \cdots > a_m > 0$，得

$$a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \cdots < a_i + a_{m+1-i} \leqslant n \quad ③$$

$a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \cdots, a_i + a_{m+1-i}$ 是 i 个不同的正整数. 由题目条件，它们中每一个都应是 a_k 形式，由于 ③，可以知道，必为 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$ 之一，但是，$a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$ 全部仅是 $i-1$ 个不同的正整数，这显然是一个矛盾. 所以，① 成立. 从而利用 ①，我们有

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \cdots + (a_m + a_1) \geqslant m(n+1)$$

即

$$\frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \geqslant \frac{1}{2}(n+1) \quad ④$$

对于本题，我们可以提一个问题：等号何时成立？当 ④ 取等号时，① 必取等号. 即对任意 i，当 $1 \leqslant i \leqslant m$ 时，有

$$a_i + a_{m+1-i} = n + 1 \quad ⑤$$

在 ③ 中，取 $i = m$，有

$$a_m < a_m + a_m < a_m + a_{m-1} < \cdots < a_m + a_2 < a_m + a_1 = n + 1 \quad ⑥$$

由于已知 a_m, a_1, a_2 皆为正整数，因此由 ⑥，有

$$a_m + a_2 \leqslant n \quad ⑦$$

于是，$a_m+a_m,a_m+a_{m-1},\cdots,a_m+a_2$ 是 $(a_m,n]$ 内 $m-1$ 个不同的正整数. 由题目条件，它们中任一个都为 a_k 形式，在 $(a_m,n]$ 内，全部 a_k 形式的正整数只有 $a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1$ 这 $m-1$ 个. 因此，这两组正整数必对应相等. 那么，有

$$\begin{aligned} a_m+a_m &= a_{m-1} \\ a_m+a_{m-1} &= a_{m-2} \\ &\vdots \\ a_m+a_2 &= a_1 \end{aligned} \quad ⑧$$

由 ⑧，立即有

$$a_{m-1}=2a_m,a_{m-2}=3a_m,\cdots,a_2=(m-1)a_m,a_1=ma_m \quad ⑨$$

这样，就有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n+1) &= \frac{1}{m}(a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m) = \\ & \frac{1}{m}(m+m-1+\cdots+2+1)a_m = \\ & \frac{1}{2}(m+1)a_m \end{aligned} \quad ⑩$$

由 ⑩，有

$$a_m=\frac{n+1}{m+1} \quad ⑪$$

等式 ⑪ 和 ⑨ 完全确定了 m 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$. 当然，$n+1$ 必须是 $m+1$ 的倍数. 显然，由等式 ⑪ 和 ⑨ 确定的 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使不等式 ④ 取等号.

证法 2 可以假定 $a_1>a_2>\cdots>a_m$. 这样，对每个 a_i 在集合 A 中有且仅有 $i-1$ 个元素 $a_1,\cdots,a_{i-1}$ 比它大. 对任一个 a_j，若 $a_i+a_j\leqslant n$，则由假定知

$$n\geqslant a_i+a_j>a_i+a_{j+1}>\cdots>a_i+a_m$$

因此，由条件知，这 $m-j+1$ 个数 $a_i+a_j,\cdots,a_i+a_m$ 均属于集合 A 且都大于 i. 所以，必有 $m-j+1\leqslant i-1$，即 $j\geqslant m-i+2$. 这也就是说，对每个 i 有

$$a_i+a_{m-i+1}\geqslant n+1$$

由此即得

$$\begin{aligned} 2(a_1+a_2+\cdots+a_m) &= (a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\cdots+ \\ & (a_m+a_1)\geqslant m(n+1) \end{aligned}$$

证毕.

容易看出等号成立的充要条件是

$$a_i+a_{m-i+1}=n+1,1\leqslant i\leqslant (m+1)/2$$

由此可确定所有这样的子集.

亚美尼亚－澳大利亚命题

❷ $\triangle ABC$ 是一个等腰三角形，$AB = AC$. 假如

(1) M 是 BC 的中点，O 是直线 AM 上的点，使得 OB 垂直于 AB；

(2) Q 是线段 BC 上不同于 B 和 C 的一个任意点；

(3) E 在直线 AB 上，F 在直线 AC 上，使得 E, Q, F 是不同的点且共线.

求证：$OQ \perp EF$ 当且仅当 $QE = QF$.

证法1 如图35.1所示，连结线段 OE, OF, OC. 如果 $OQ \perp EF$，由于 $OB \perp AE$，因此 O, Q, B, E 四点共圆，因此

$$\angle OEQ = \angle OBQ \quad ①$$

由 $AB = AC, \angle BAO = \angle CAO, AO = AO$

得到

$$\triangle BAO \cong \triangle CAO \quad ②$$

于是

$$\angle ACO = \angle ABO = \frac{\pi}{2} \quad ③$$

这样一来

$$\angle FCO + \angle FQO = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad ④$$

这导致 O, C, F, Q 四点共圆. 从而，有

$$\angle OCQ = \angle OFQ \quad ⑤$$

而

$$\angle OBQ = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \angle ACB = \angle OCQ \quad ⑥$$

利用①，⑤和⑥，有

$$\angle OEQ = \angle OFQ \quad ⑦$$

所以 $\triangle OEF$ 是一个等腰三角形，$OE = OF$. 又 $OQ \perp EF$，于是 $QE = QF$.

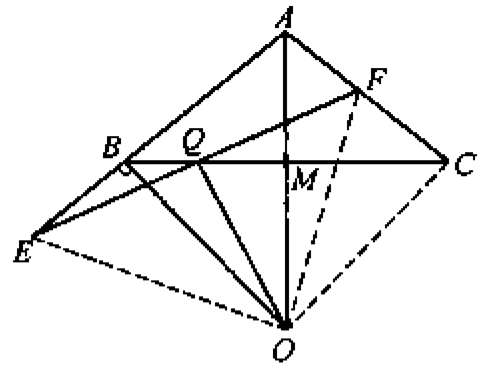


图35.1

反之，如果 $QE = QF$，四川省内江市安岳中学李挺同学用反证法很简洁地证明了 $OQ \perp EF$.

如果 OQ 不垂直于 EF，过点 Q 作直线 $E'F'$，如图35.2所示，使得 $OQ \perp E'F'$，点 E' 在直线 AB 上，点 F' 在直线 AC 上.

从前面证明，可以得到 $QE' = QF'$. 又 $QE = QF$，则四边形 $EE'FF'$ 是平行四边形，直线 EE' 平行于直线 FF'，但直线 EE' 与直线 FF' 相交于点 A. 矛盾.

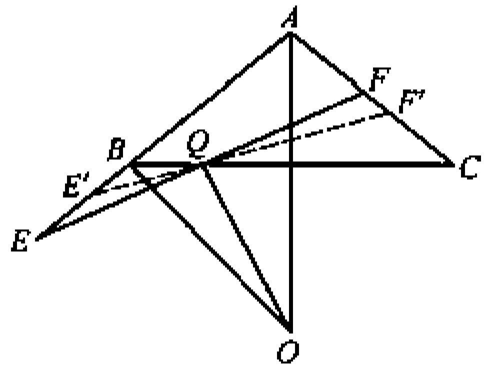


图35.2

证法 2　设圆 O，圆 O_1 交于 C,P 两点，O 在圆 O_1 上，OO_1 交圆 O_1 于点 A，依已知作图，如图 35.3 所示，易知题设条件全部嵌入到图中.

此证法属于王根章

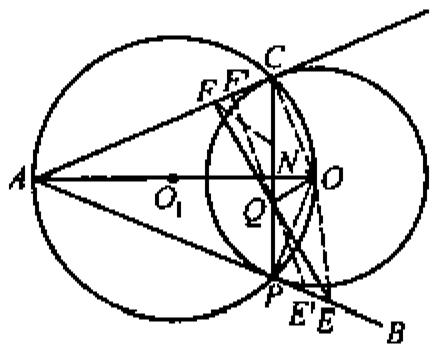


图 35.3

首先，设 $\angle OQE = 90°$，连结 OP,OC,OE,OF，由 O,E,P,Q 和 O,C,F,Q 均四点共圆，知 $\angle OEQ = \angle OPQ = \angle OCQ = \angle OFQ$，从而 $OE = OF$，故 $QE = QF$.

其次，设 $QE = QF$，而 $\angle OQE \neq 90°$，过点 Q 作 OQ 的垂线交 AB,AC 于 E',F'，由前述可证 $QE' = QF'$. 又 $QE = QF$，从而 $EE'FF'$ 为平行四边形，故 AC // AB，这不成立，因而 $\angle OQE = 90°$.

证法 3　如图 35.4 所示，取 N 为坐标原点，AN 为 x 轴. 设 AC 与 NP 所在直线即 y 轴交于点 S. 由已知条件可设各点的复数表示为

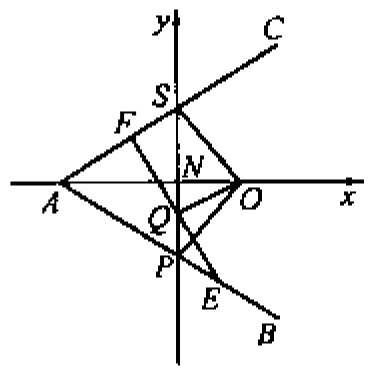


图 35.4

$$P:z_P = \mathrm{i}y_P, S:z_S = -\mathrm{i}y_P, O:z_O = x_O$$

$$E:z_E = x_E + \mathrm{i}y_E, F:z_F = x_F + \mathrm{i}y_F, Q:z_Q = \mathrm{i}y_Q$$

由条件 $\overrightarrow{PO} \perp \overrightarrow{PE}$，可知

$$\arg\frac{z_O - z_P}{z_E - z_P} = \frac{\pi}{2}$$

即 $$(z_O - z_P)\overline{(z_E - z_P)} + \overline{(z_O - z_P)}(z_E - z_P) = 0$$

或 $$\mathrm{Re}\{\bar{z}_P z_E - \bar{z}_O z_E + \bar{z}_O z_P\} = |z_P|^2$$

或

$$-x_O x_E + y_P y_E = y_P^2 \tag{8}$$

由已知有 $\overrightarrow{SO} \perp \overrightarrow{SF}$，注意 S 与 P 的对称关系，由 ⑧ 可得

$$-x_O x_F - y_P y_F = y_P^2 \tag{9}$$

首先假设 $\angle OQE = 90°$，从而由 $\overrightarrow{QO} \perp \overrightarrow{QE}$ 可得

$$-x_O x_E + y_E y_Q = y_Q^2 \tag{10}$$

由 $\overrightarrow{QO} \perp \overrightarrow{QF}$，可得

$$-x_O x_F + y_F y_Q = y_Q^2 \tag{11}$$

由 ⑧，⑩ 得 $$x_E = \frac{y_P y_Q}{x_O}, y_E = y_P + y_Q$$

由 ⑨，⑪ 得 $$x_F = -\frac{y_P y_Q}{x_O}, y_F = y_Q - y_P$$

于是有

$$|\overrightarrow{QE}| = |z_E - z_Q| = \sqrt{\frac{y_P^2 y_Q^2}{x_O^2} + y_P^2} = |z_F - z_Q| = |\overrightarrow{QF}|$$

其次，注意 $\angle OQE = 90°$ 等价于 $\arg\frac{z_O - z_Q}{z_E - z_Q} = \frac{\pi}{2}$，也等价于

$\arg\frac{z_O - z_Q}{z_E - z_F} = \frac{\pi}{2}$,同式⑧的推导可得其等价于

$$\frac{x_E - x_F}{y_E - y_F} = \frac{y_Q}{x_O} \quad ⑫$$

于是只须证明由 $|\overrightarrow{QE}| = |\overrightarrow{QF}|$ 可导出式⑫即可.事实上,由 $|\overrightarrow{QE}| = |\overrightarrow{QF}|$,有 $z_Q = \frac{z_E + z_F}{2}$,即

$$x_E + x_F = 0 \quad ⑬$$

$$y_E + y_F = 2y_Q \quad ⑭$$

由⑧,⑨,⑬,⑭即得式⑫.证毕.

证法 4 先证充分性,即由 $QE = QF \Rightarrow OQ \perp EF$.

如图 35.5 所示,作 $FN // CB$ 交 AB 于 N,连结 OC, OF, ON, OE.由条件,四边形 $ABOC$ 是关于 AO 的轴对称图形,所以 $OF = ON$.

因为 $EQ = QF, BQ // NF$,所以 $EB = BN$,又 $OB \perp EN$,所以 $OE = ON$,所以 $OE = OF$,又 $QE = QF$,所以 $OQ \perp EF$.

再证必要性,即由 $OQ \perp EF \Rightarrow QE = QF$.

连结 OC, OF, OE,由 $OB \perp AB$,及对称性易得 $OC \perp AC$,又 $OQ \perp EF$,所以 O, Q, F, C 四点共圆,所以 $\angle QFO = \angle QCO$,又由四边形 $ABOC$ 是轴对称图形及 BM 是 $Rt\triangle ABO$ 斜边上的高,所以

$$\angle QCO = \angle QBO = \angle BAO = \angle OAF$$

而由 $\angle QFO = \angle BAO$,所以 E, A, F, O 四点共圆,所以 $\angle OEF = \angle OAF$,而 $\angle QFO = \angle BAO$,所以 $\angle OEF = \angle QFO$,所以 $OE = OF$.

为方便,见图 35.6 中用数码表示的角,即圆中编号从 $\angle 1$ 到 $\angle 6$ 的 6 个角全相等,它们的传递关系是由 O, Q, F, C 共圆,$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$,又由 $\angle 4 = \angle 1, E, A, F, O$ 共圆,所以 $\angle 6 = \angle 5$,所以 $\angle 6 = \angle 1$.

又 $OQ \perp EF$,所以 $EQ = QF$.

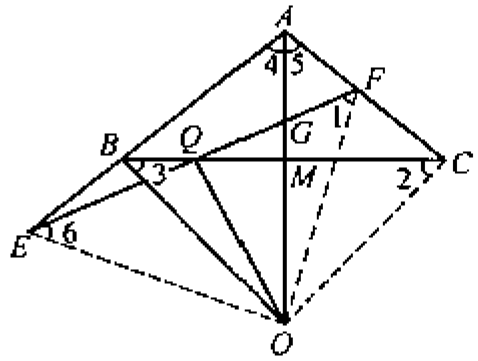


图 35.6

分析 为证 $OQ \perp EF$,而已有 $QE = QF$,只要证明 $OE = OF$.又为了利用 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,四边形 $ABOC$ 是轴对称图形的条件,可考虑过 F 作 BC 的平行线.

类似充分性,因为已有 $OQ \perp EF$,故要证 $OE = QF$,仍应证 $QE = OF$,原本想用证充分性类似的思路,逆向证明,即也添加平行辅助线,但未能成功.探究原因,是因为未能充分利用 $OQ \perp EF$ 的条件,怎样利用这个条件呢?联想到图中其他的垂直关系,可以想办法构造共圆的四点组,从而传递角之间的关系.

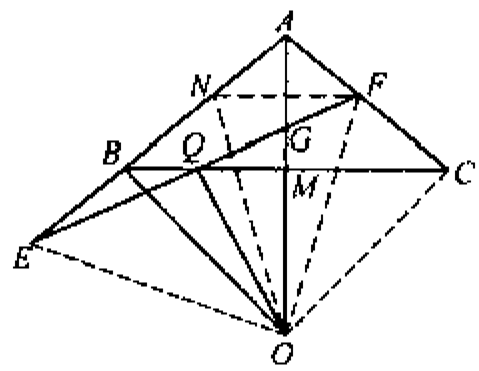


图 35.5

罗马尼亚命题

3 对任一正整数 k,以 A_k 表示集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中所有满足下述条件的元素组成的子集:它的二进制表示中恰好有三个数字是1.记 A_k 中的元素个数为 $f(k)$.

(1) 证明:对任一正整数 m,$f(k)=m$ 至少有一解.

(2) 求出所有正整数 m,使得 $f(k)=m$ 恰有一解.

解法1 一个正整数 n 的二进制表示中恰有三个数字为1时,就说 n 具有性质 α,并定义正整数变数 n 的函数

$$\delta(n)=\begin{cases}1, n\text{ 具有性质 }\alpha\\0, n\text{ 不具有性质 }\alpha\end{cases} \quad ①$$

显见,存在无穷多个 n 使 $\delta(n)=1$,$f(1)=0$,以及

$$f(k)=\sum_{j=k+1}^{2k}\delta(j) \quad ②$$

此外,由于 $2m$ 的二进制表示是 m 的二进制表示后加一个数字0,所以

$$\delta(2m)=\delta(m) \quad ③$$

为讨论函数 $f(k)$ 的变化,我们来比较 $f(k+1)$ 和 $f(k)$.我们有

$$f(k+1)=\sum_{j=k+2}^{2(k+1)}f(j)=\sum_{j=k+1}^{2k}f(j)+\delta(2k+1)+\delta(2k+2)-\delta(k+1)=f(k)+\delta(2k+1) \quad ④$$

最后一步用了式③.由此及前面的讨论就推出:$f(k)$ 是不减函数,$f(k+1)$ 要么和 $f(k)$ 相等,要么等于 $f(k)+1$,$f(k)$ 随 k 趋于无穷而趋于无穷,以及因 $f(1)=0$,所以 $f(k)$ 能取到每一个正整数值.这就证明了结论(1).

由以上所证知,对正整数 m 使 $f(k)=m$ 仅有一解 k 的充要条件是

$$f(k-1)=m-1,f(k)=m,f(k+1)=m+1 \quad ⑤$$

由此及式④知,亦即当且仅当

$$\delta(2k-1)=\delta(2k+1)=1$$

由于 $2k$ 的二进制表示必为

$$2k=1\times\times\cdots\times 0$$

所以

$$2k+1=1\times\times\cdots\times 1$$

因此 $\delta(2k+1)=1$ 当且仅当

$$2k=1\underbrace{0\cdots0}_{r}1\underbrace{0\cdots0}_{s},r\geqslant 0,s\geqslant 1$$

这时

$$2k-1=1\underbrace{0\cdots00}_{r+1}\underbrace{1\cdots1}_{s},r\geqslant 0,s\geqslant 1$$

因此,这时为使 $\delta(2k-1)=1$ 当且仅当 $s=2$.综上所述,当且仅当

$$2k = 1\underbrace{0\cdots0}_{r}100, r \geqslant 0$$

时才有式 ⑤ 成立.这时

$$k = 2^{r+2} + 2, r \geqslant 0 \qquad ⑥$$

这样,为定出全体这样的 m,就是要求 $f(2^{r+2}+2)$ 的值.由式④可得

$$f(2^{r+2}+2) = f(2^{r+2}+1) + \delta(2^{r+3}+3) = f(2^{r+2}) + \delta(2^{r+3}+1) + \delta(2^{r+3}+3)$$

容易看出 $\delta(2^{r+3}+1) = 0, \delta(2^{r+3}+3) = 1, r \geqslant 0$

这样就归结为求 $f(2^{r+2})$ 的值.由于从 0 到 $2^h - 1$ 的二进制表示是由二进制数

$$\underbrace{\times\times\cdots\times}_{h}$$

中的数字 ×, ×,…, × 任意取值 0,1 给出.所以其中具有性质 α 的数恰好由组合数 $\binom{h}{3}$ 给出,由此及 $\delta(2^h) = 0$ 推出

$$\sum_{j=1}^{2^h} \delta(j) = \binom{h}{3}$$

由此即得

$$f(2^{r+2}) = \sum_{j=1}^{2^{r+3}} \delta(j) - \sum_{j=1}^{2^{r+2}} \delta(j) = \binom{r+3}{3} - \binom{r+2}{3} = \binom{r+2}{2}$$

综合以上讨论得

$$f(2^{r+2}+2) = 1 + \binom{r+2}{2}, r \geqslant 0$$

因此,使 $f(k) = m$ 仅有一解的全体 m 由整数

$$1 + \binom{r+2}{2}, r \geqslant 0$$

给出,且其解 $k = 2^{r+2} + 2$.证毕.

解法 2 用 S 表示正整数集合内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素组成的集合.首先证明

$$f(k+1) = \begin{cases} f(k), 当\ 2k+1 \notin S; \\ f(k)+1, 当\ 2k+1 \in S. \end{cases} \qquad ⑦$$

由于 $f(k+1)$ 是集合 $\{k+2, k+3, \cdots, 2k+1, 2k+2\}$ 内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素组成的集合,$f(k)$ 是集合 $\{k+1, k+2, \cdots, 2k\}$ 内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素组成的集合.在二进制表示下,在 $k+1$ 的个位数后面添加一个零,恰为 $2(k+1)$ 在二进制表示下的数字.于是,$k+1$ 与 $2(k+1)$ 同属于 S,或者同时不属于 S,因此有公式 ⑦.

ⅰ 显然$f(1)=0,f(2)=0$.当$k=2^s$,s是大于等于2的正整数时,$f(2^s)$表示集合$\{2^s+1,2^s+2,\cdots,2^{s+1}\}$内在二进制表示下恰有3个1的所有元素的个数.在二进制下

$$2^s+1=10\cdots01(\text{中间有 } s-1 \text{ 个 } 0)$$

$$2^{s+1}=10\cdots0(\text{后面有 } s+1 \text{ 个 } 0)$$

考虑所有形如$1\times\times\cdots\times$的$s+1$位数.取2个1放入这$s$个$\times$中的任两个$\times$位置,其余$\times$位置全部放入0,就得到集合$\{2^s+1,2^s+2,\cdots,2^{s+1}\}$内在二进制表示下恰有3个1的一个元素.于是

$$f(2^s)=C_s^2=\frac{1}{2}s(s-1) \quad ⑧$$

当s增大时,$\frac{1}{2}s(s-1)$显然无上界.从⑦可知,$f(k)$无上界.又从$f(1)=0$,$f(k)$无上界及公式⑦可知,当k取遍所有正整数时,$f(k)$取遍所有非负整数.于是,对于每个正整数m,至少存在一个正整数k,满足$f(k)=m$.

ⅱ 由于对每一个(适当的)m,恰存在一个k,满足$f(k)=m$,则由公式⑦可知

$$f(k+1)=f(k)+1=m+1 \quad ⑨$$

以及

$$f(k-1)=f(k)-1=m-1 \quad ⑩$$

这表明 $2k+1\in S,2(k-1)+1\in S$

设在二进制下

$$k=2^s+k_12^{s-1}+k_22^{s-2}+\cdots+k_{s-1}2+k_s \quad ⑪$$

其中,$k_1,k_2,\cdots,k_s\in\{1,0\}$,$s$是正整数.

$$2k-1=2^{s+1}+k_12^s+k_22^{s-1}+\cdots+k_{s-1}2^2+k_s2-1 \quad ⑫$$

$$2k+1=2^{s+1}+k_12^s+k_22^{s-1}+\cdots+k_s2+1 \quad ⑬$$

由于在二进制下,$2k+1$恰有3个1,则$k_1,k_2,\cdots,k_s$中只有一个为1,其余皆为0.于是

$$2k+1=2^{s+1}+2^t+1 \quad ⑭$$

其中,t是小于等于s的正整数.因此

$$k=2^s+2^{t-1} \quad ⑮$$

于是,我们有

$$2k-1=2^{s+1}+2^t-1=2^{s+1}+2^{t-1}+\cdots+2+1 \quad ⑯$$

由于在二进制下,$2k-1$也恰有3个1,则$t=2$,从而,$s\geqslant2$.由⑮,有

$$k=2^s+2 \quad ⑰$$

$$k+1=2^s+2+1,2k=2^{s+1}+2^2 \quad ⑱$$

在二进制下,$k+1$为$10\cdots011$(中间有$s-2$个0),$2k$为$10\cdots0100$(一共有s个0).在$k+1$与$2k$之间的正整数为$1\times\times\cdots$

×（有 s 个 ×，但排除 10…000，10…001，10…010 三个数），及 $s+2$ 位数 10…01，10…010，10…011，10…0100. 因此

$$f(2^s+2)=C_s^2+1=\frac{1}{2}s(s-1)+1 \qquad ⑲$$

从而，$f(k)=m$ 恰有惟一解时，必有 ⑰ 和

$$m=\frac{1}{2}s(s-1)+1 \qquad ⑳$$

其中，$s\geqslant 2$.

当 $m=\frac{1}{2}s(s-1)+1$ 时，这里正整数 $s\geqslant 2$，取 $k=2^s+2$，从上述证明可以得到 ⑲. 由于

$$2(2^s+2)-1=2^{s+1}+2+1$$
$$2(2^s+2)+1=2^{s+1}+2^2+1 \qquad ㉑$$

它们在二进制下都恰有 3 个 1，则由公式 ⑦，可以得到

$$f(2^s+2-1)=f(2^s+2)-1$$
$$f(2^s+2+1)=f(2^s+2)+1 \qquad ㉒$$

从而，$f(k)=\frac{1}{2}s(s-1)+1$ 的确有惟一解 $k=2^s+2$，其中正整数 $s\geqslant 2$.

4 求出所有的正整数对 $\{m,n\}$，使得 $\frac{n^3+1}{mn-1}$ 是整数.

澳大利亚命题

解法 1 记 $a\mid b$ 为 a 整除 b. 由

$$n^3+1=n(n^2+m)-(mn-1)$$

可推出

$$mn-1\mid n^3+1\Leftrightarrow mn-1\mid n(n^2+m)\Leftrightarrow mn-1\mid n^2+m\Leftrightarrow$$
$$mn-1\mid m(n^2+m)\Leftrightarrow mn-1\mid m^2+n$$

最后一步用到了

$$m(n^2+m)=m^2+n+n(mn-1)$$

由以上讨论可以看出 m,n 是对称的，问题可转化为求所有正整数

$$mn-1\mid n^2+m,m\geqslant n\geqslant 1$$

ⅰ $n=1$ 时，仅有 $m=2,3$；

ⅱ $m=n>1$ 时，由

$$\frac{n^2+m}{mn-1}=\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1}$$

知，仅有 $m=n=2$；

ⅲ $m>n=2$ 时，仍利用原条件 $2m-1\mid 2^3+1$ 知，仅有 $m=5$；

ⅳ $m>n=3$ 时，由原条件 $3m-1\mid 3^3+1$ 知，仅有 $m=5$；

ⅴ 当 $m>n>3$ 时

$$\begin{aligned}mn-1=n^2+m+(mn-n^2-m-1)>\\ mn-n^2-m-1=\\ (m-(n+1))(n-1)-2\geqslant\\ -2>-(mn-1)\end{aligned}$$

因此,$mn-1\mid n^2+m$ 当且仅当

$$mn-n^2-m-1=0$$

即

$$m=(n+1)+\frac{2}{(n-1)}$$

现在 $n>3$,这不可能.

综上所述,全部解为

$$\begin{aligned}\{m,n\}=\{2,1\},\{3,1\},\{5,2\},\{5,3\},\{1,2\},\\ \{1,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{2,2\}\end{aligned}$$

解法2 容易看出,m^3 与 $mn-1$ 互素,所以 $mn-1\mid n^3+1$ 等价于 $mn-1\mid m^3(n^3+1)$.由于

$$m^3(n^3+1)=(m^3n^3-1)+m^3+1$$

所以 $mn-1\mid n^3+1$ 等价于 $mn-1\mid m^3+1$.因此,若 $m=a$,$n=b$ 是一组解,则 $m=b,n=a$ 亦是一组解,即 m,n 是对称的.因此,可以仅讨论 $m\geqslant n$ 的情形,$m<n$ 的情形由对称性推出.

i 若 $m=n$,我们有

$$\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}$$

因此,仅可能有 $m=n=2$ 一组解;

ii 若 $m>n$.显见,为使 $mn-1\mid n^3+1$,m 不能比 n 大太多.当 $n=1$ 时

$$\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{2}{m-1}$$

因此,仅可能有 $m=2,n=1$;$m=3,n=1$ 两组解.

当 $n\geqslant 2$ 时,我们用带余数除法来确定 m,n 之间的关系.设 $mn-1\mid n^3+1$.我们有

$$\frac{n^3+1}{mn-1}=9n+r,0\leqslant r<n$$

因而有

$$n^3+1=(qmn-q+rm)n-r$$

所以,$n\mid r+1$,因此必有 $r=n-1$.下面来定 q.由此及 $m>n$ 得

$$(q+1)n-1=\frac{n^3+1}{mn-1}<\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}$$

所以

$$qn<1+\frac{1}{n-1}$$

由此及 $n\geqslant 2$ 得 $q=0$.因此得

$$n^3+1=(mn-1)(n-1)$$

$$m=n+1+\frac{2}{n-1}$$

所以,这时仅有 $n=2,m=5;n=3,m=5$ 两组解,即

综上所述,根据对称性知共有九组解,即

$$\{m,n\}=\{2,2\},\{2,1\},\{1,2\},\{3,1\},\{1,3\},$$
$$\{5,2\},\{2,5\},\{5,3\},\{3,5\}$$

5 求出满足以下条件的全部函数 f:

(1) f 的定义域为 $x>-1$,及 $f(x)>-1$;

(2) 对所有的 $x>-1,y>-1$ 有

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$$

(3) 在区间 $-1<x<0$ 及 $x>0$ 上,$f(x)/x$ 均为严格递增.

英国命题

解法 1 在条件(2)中取 $y=x$ 得

$$f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x) \qquad ①$$

设 u 是函数 f 的不动点,即 $f(u)=u$.在式①中取 $x=u$ 得

$$f(u^2+2u)=u^2+2u$$

即 u^2+2u 也是 f 的不动点.若 $u>0$,则

$$u^2+2u>u>0$$

由条件(3)知

$$\frac{f(u^2+2u)}{u^2+2u}>\frac{f(u)}{u}$$

这与 u,u^2+2u 均为不动点矛盾.若 $-1<u<0$,则

$$-1<u^2+2u<u<0$$

由条件(3)知 $$\frac{f(u^2+2u)}{u^2+2u}<\frac{f(u)}{u}$$

这也与 u,u^2+2u 均为不动点矛盾.因此仅可能有 $u=0$.条件①不仅表明,只要满足题意的函数存在,这函数就一定有不动点,且对所有 $x>-1,u=x+(1+x)f(x)$ 均为不动点.结合以上讨论就推出

$$x+(1+x)f(x)$$

恒为零,即必有

$$f(x)=-\frac{x}{1+x},x>-1$$

容易验证(也必须验证)这个函数满足全部条件(留给读者).因此,满足条件的函数只有这一个.证毕.

解法 2 在函数方程中,令 $y=x$,有

$$f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x) \quad ②$$

如果能证明满足 $f(x)=x$ 的解只有一个 $x=0$，则由②，有

$$x+f(x)+xf(x)=0 \quad ③$$

即

$$f(x)=-\frac{x}{1+x} \quad ④$$

当 $-1<x<0$ 时，由于 $\frac{f(x)}{x}$ 是严格递增的，因此 $\frac{f(x)}{x}=1$ 至多有一个解 $x=u, u\in(-1,0)$，即至多存在一个 $u\in(-1,0)$，满足 $f(u)=u$。

如果这样的 u 存在，在方程②中令 $x=u$，并利用 $f(u)=u$，有

$$f(2u+u^2)=2u+u^2 \quad ⑤$$

由 $\quad u^2+2u=(u+1)^2-1, 0<u+1<1$

可知 $\quad 0<(u+1)^2<1, -1<(u+1)^2-1<0$

这表明 $u^2+2u\in(-1,0)$。从⑤可以知道，记 $x=u^2+2u$，上述 x 也满足 $\frac{f(x)}{x}=1$，且在 $(-1,0)$ 内，于是利用 $(-1,0)$ 内 $\frac{f(x)}{x}=1$ 至多有一个解，可以得到

$$u^2+2u=u \quad ⑥$$

由⑥，立即有

$$u(u+1)=0 \quad ⑦$$

由于 $-1<u<0$，等式⑦是不成立的。所以，当 $-1<x<0$ 时，不会有 x 满足 $f(x)=x$。

当 $x>0$ 时，由于 $\frac{f(x)}{x}$ 是严格递增的，因此当 $x>0$ 时，$\frac{f(x)}{x}=1$ 也至多有一解 $x=u$，其中，$u>0$。类似地，在方程①中令 $x=u$，并利用 $f(u)=u$，仍有⑤。当 $u>0$ 时，显然 $u^2+2u>0$，从而仍然有⑥和⑦。由于 $u>0$，等式⑦是不成立的。所以，当 $x>0$ 时，不会有 x 满足 $f(x)=x$。因此，由式②，必有式③，即必有式④。

当④成立时

$$x+f(y)+xf(y)=x-\frac{y}{1+y}-\frac{xy}{1+y}=\frac{x-y}{1+y} \quad ⑧$$

于是

$$f(x+f(y)+xf(y))=f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)=-\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}}=\frac{y-x}{1+x} \quad ⑨$$

而

$$y + f(x) + yf(x) = y - \frac{x}{1+x} - \frac{xy}{1+x} = \frac{y-x}{1+x} \qquad ⑩$$

所以,式 ④ 所表示的函数是满足题目条件的惟一解.

6 求证:存在一个具有下述性质的正整数的集合 A:对于任何由无限多个素数组成的集合 S,存在 $k \geqslant 2$ 及正整数 $m \in A$ 和 $n \notin A$,使得 m 和 n 均为 S 中 k 个不同元素的乘积.

芬兰命题

证法 1　设 $q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots$ 是全部素数从小到大的排列,即

$$q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, q_4 = 7, q_5 = 11, q_6 = 13, q_7 = 17, \cdots$$

令
$$A_1 = \{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 11, \cdots\}$$

即 A_1 是全部 $2q$ 的集合,其中,q 是大于 2 的素数;

$$A_2 = \{3 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 11, \cdots, 3 \cdot 7 \cdot 11, 3 \cdot 7 \cdot 13, \cdots\}$$

即 A_2 是全部 $3 \cdot q_i \cdot q_j$ 的集合,其中,$q_i < q_j$,q_i, q_j 都是大于 3 的素数;

……

简洁地写,对于任一个正整数 t_1,令

$$A_{t_1} = \bigcup_{q_{t_1} < q_{t_2} < \cdots < q_{t_{q_1}}} q_{t_1} q_{t_2} \cdots q_{t_{q_1}} \qquad ①$$

其中,$q_{t_i}(i = 1, 2, \cdots, q_{t_1})$ 全部是素数. 该并集是满足 $q_{t_1} < q_{t_2} < \cdots < q_{t_{q_{t_1}}}$ 条件的全部素数的并集.

再令

$$A = \bigcup_{t_1 = 1}^{\infty} A_{t_1} \qquad ②$$

对于由无限个素数组成的集合

$$S = \{p_1, p_2, \cdots, p_t, \cdots\} \qquad ③$$

其中,$p_1 < p_2 < \cdots < p_t < \cdots$,$p_1 \geqslant 2, p_2 \geqslant 3, p_3 \geqslant 5, \cdots$ 因素数 p_i 是某个 $q_{t_i}(i = 1, 2, \cdots, p_1 + 2)$,由 ① 知

$$p_1 p_2 \cdots p_{p_1} = q_{t_1} q_{t_2} \cdots q_{t_{q_{t_1}}} \in A_{t_1} \subset A \qquad ④$$

令 $m = p_1 p_2 \cdots p_{p_1}$,则 $m \in A$.

由于

$$q_{t_3} - q_{t_1} = p_3 - p_1 \geqslant 3 \qquad ⑤$$

那么

$$p_{p_1+2} = q_{t_{p_1+2}} = q_{t_{q_{t_1}+2}} < q_{t_{q_{t_3}}} \qquad ⑥$$

于是

$$p_3 p_4 \cdots p_{p_1+2} = q_{t_3} q_{t_4} \cdots q_{t_{q_{t_1}+2}} \notin A \qquad ⑦$$

令

$$n = p_3p_4\cdots p_{p_1+2}, k = p_1 \quad ⑧$$

本题得证.

证法 2　首先,他证明了如下的引理.

此证法属于张健

引理　在正整数集合的所有有限子集上,可以涂黑色或白色,使得对正整数的任意一个无限集,总有两个 k 元子集,$k \geq 2$. 一个子集是黑色,一个子集是白色.

引理的证明　对于正整数的一个 k 元子集,$k \geq 2$,如果在 mod k 意义下,该 k 元子集属于同一个剩余类,那么将该子集涂黑色,否则涂白色.

由此,对于任意一个无限正整数的集合 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$,设

$$k = |b_1 - b_2| + 1$$

因为 $b_1 - b_2 \not\equiv 0 \pmod k$,则 k 元子集 $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ 涂白色.

但是 B 是一个无限集,必存在一个无限子集 $\{b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots\}$,这里 $i_1 < i_2 < \cdots$,使得

$$b_{i_j} \equiv b_{i_1} \pmod k$$

那么子集 $\{b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_k}\}$ 涂黑色. 引理成立.

假如 $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < \cdots$ 是全部素数,即 $p_1 = 2$, $p_2 = 3, p_3 = 5$,等等.

用下述方法取集合 A,对于任意有限正整数集合 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$,其中,$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$,如果集合 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是黑色的,令 $p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \in A$,否则 $p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \notin A$.

下面证明集合 A 满足条件.

对于任意无限素数集合 $S = \{p_{s_1}, p_{s_2}, \cdots\}$,下标集合 $\{s_1, s_2, \cdots\}$ 是一个无限正整数集合. 由引理,有两个 k 元子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$, $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$,使得 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是黑色的, $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$ 是白色的. 于是, $m = p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k} \in A$, $n = p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_k} \notin A$.

第 36 届国际数学奥林匹克

加拿大，1995

保加利亚命题

❶ 设在一直线上依次给定 A,B,C 及 D 四点.分别以 AC 和 BD 为直径的两圆交于点 X 和 Y.直线 XY 和 BC 交于点 Z.设 P 是直线 XY 上异于 Z 的一点，直线 CP 和以 AC 为直径的圆交于 C 和 M，以及直线 BP 和以 BD 为直径的圆交于 B 和 N.证明：直线 AM,DN 和 XY 交于一点.

证明　先讨论点 P 在 Z 和 X 之间的情形.如图 36.1 所示，设 Q 是 AM 和 XY 的交点，Q' 是 DN 和 XY 的交点.要证点 Q 和 Q' 重合.

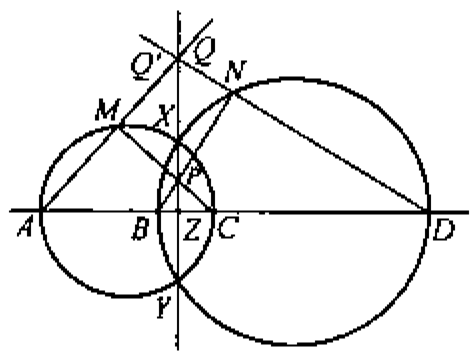


图 36.1

由条件易证：$\mathrm{Rt}\triangle CPZ \backsim \mathrm{Rt}\triangle CAM \backsim \mathrm{Rt}\triangle QAZ$.所以

$$ZC/ZQ = ZP/AZ$$

由条件知 XZ 是 $\mathrm{Rt}\triangle AXC$ 的斜边上的高，故有

$$XZ^2 = AZ \cdot ZC$$

由以上两式得

$$ZQ = ZX^2/ZP$$

同样，由条件可得

$$\mathrm{Rt}\triangle BPZ \backsim \mathrm{Rt}\triangle BDN \backsim \mathrm{Rt}\triangle Q'DZ$$

所以

$$ZB/ZQ' = ZP/DZ$$

由条件知 XZ 也是 $\mathrm{Rt}\triangle BXD$ 的斜边上的高，故有

$$XZ^2 = BZ \cdot ZD$$

因而

$$ZQ' = ZX^2/ZP$$

所以，$ZQ = ZQ'$，即 Q 和 Q' 为同一点.

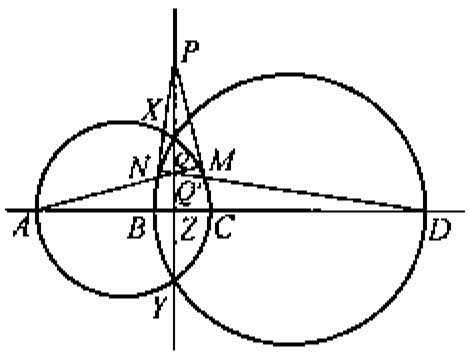


图 36.2

点 P 在 Z 和 Y 之间时，证明完全相同，其图形是上述情形的图形对直线 AD 的对称图形.当点 P 在线段 XY 之外时，如图 36.2 所示，证明方法也完全一样，留给读者.

俄罗斯命题

❷ 设 a,b 及 c 是正实数，满足 $abc = 1$.证明

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

证法 1　以 I 记所要证的不等式的左边的和式，设 $S = 1/a + 1/b + 1/c$.由条件 $abc = 1$ 可得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}=1/a\cdot\frac{1/a}{1/b+1/c}=1/a\left(\frac{S}{1/b+1/c}-1\right)=$$
$$S\left(\frac{1/a}{1/b+1/c}\right)-1/a=S\left(\frac{S}{1/b+1/c}-1\right)-1/a$$

类似可得
$$\frac{1}{b^3(c+a)}=S\left(\frac{S}{1/c+1/a}-1\right)-1/b$$
$$\frac{1}{c^3(a+b)}=S\left(\frac{S}{1/a+1/b}-1\right)-1/c$$

由以上三式推出
$$I=S^2\left(\frac{1}{1/b+1/c}+\frac{1}{1/c+1/a}+\frac{1}{1/a+1/b}\right)-4S \quad ①$$

这就算出了 I 的主要部分,即上式中的第一项.

利用正数的算术平均值不小于其调和平均值,即
$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\left(\frac{x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}}{3}\right)^{-1},x,y,z>0 \quad ②$$

可得(取 $x=(1/b+1/c)^{-1},y=(1/c+1/a)^{-1},z=(1/a+1/b)^{-1}$)
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1/b+1/c}+\frac{1}{1/c+1/a}+\frac{1}{1/a+1/b}\right)\geqslant\frac{3}{2S} \quad ③$$

再利用正数的算术平均值不小于其几何平均值,即
$$\frac{1}{3}(x+y+z)\geqslant\sqrt[3]{xyz},x,y,z>0 \quad ④$$

可得(取 $x=1/a,y=1/b,z=1/c$)
$$S=1/a+1/b+1/c\geqslant 3\sqrt[3]{(1/a)\cdot(1/b)\cdot(1/c)}=3 \quad ⑤$$

最后一步利用了条件 $abc=1$.由式 ①,③ 及 ⑤ 推出
$$I\geqslant\frac{9}{2}S-4S=\frac{1}{2}S\geqslant\frac{3}{2}$$

这就证明了所要结论.本题的困难在于不能直接对 I 应用不等式 ② 和 ④,必须先求出 I 的精确表达式 ①.

证法 2 巧妙地利用柯西不等式,即
$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \quad ⑥$$

其中,x_i,y_i 为实数.取
$$x_1=\sqrt{ab+ac},x_2=\sqrt{bc+ba},x_3=\sqrt{ca+cb}$$
$$y_1=(ax_1)^{-1},y_2=(bx_2)^{-1},y_3=(cx_3)^{-1}$$

利用不等式 ⑥ 及 $abc=1$,我们有
$$I=(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\geqslant(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-1}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2=$$
$$(2ab+2bc+2ca)^{-1}(1/a+1/b+1/c)^2=$$
$$\frac{1}{2}(1/a+1/b+1/c)$$

由此及式 ⑤ 即得 $I \geqslant 3/2$.

证法 3 利用柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

的推论

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i^2)\right)^2, a_i \in \mathbf{R}^+, i = 1,2,\cdots,n$$

得

$$(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)) \cdot \left(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right) \geqslant (1/a+1/b+1/c)^2 = (ab+bc+ca)^2$$

于是

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{2}$$

证法 4 利用柯西不等式的推论

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i}, b_i \in \mathbf{R}^+, i = 1,2,\cdots,n$$

得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{(1/a)^2}{1/b+1/c}+\frac{(1/b)^2}{1/c+1/a}+\frac{(1/c)^2}{1/a+1/b} \geqslant \frac{(1/a+1/b+1/c)^2}{2(1/a+1/b+1/c)} = \frac{1}{2}(1/a+1/b+1/c) \geqslant \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{3}{2}$$

证法 5 利用权方和不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{q+1}}{b_i^q} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{q+1}}{\sum_{i=1}^{n}b_i^q}$$

的推论

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{b_i^q}\geqslant n^{1-p+q}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^q},a_i>0,b_i>0,i=1,2,\cdots,n$$

得
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=$$
$$\frac{(1/a)^2}{1/b+1/c}+\frac{(1/b)^2}{1/c+1/a}+\frac{(1/c)^2}{1/a+1/b}\geqslant$$
$$3^{1-2+1}\cdot\frac{(1/a+1/b+1/c)^2}{2(1/a+1/b+1/c)}=$$
$$\frac{1}{2}(1/a+1/b+1/c)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}$$

证法 6 利用均值不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^r\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\geqslant\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^r}$$
$$a_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n$$

的推论
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{\lambda S_n-a_i}\geqslant\frac{n}{\lambda n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{m-1}$$

其中
$$a_i\in\mathbf{R}^+,S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i,m\geqslant 1$$
$$\lambda>\max\left\{\frac{a_1}{S_n},\frac{a_2}{S_n},\cdots,\frac{a_n}{S_n},\frac{1}{n}\right\}$$

令
$$S_3=1/a+1/b+1/c,\lambda=1,m=2$$

则
$$\lambda=1>\max\left\{\frac{1/a}{S_3},\frac{1/b}{S_3},\frac{1/c}{S_3},\frac{1}{3}\right\}$$

得
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=$$
$$\frac{(1/a)^2}{S_3-1/a}+\frac{(1/b)^2}{S_3-1/b}+\frac{(1/c)^2}{S_3-1/c}\geqslant$$
$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1/a+1/b+1/c}{3}\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}$$

证法 7 利用著名的切比雪夫不等式：若

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,0<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$$

或 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$

则
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant\frac{n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}b_i}$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则有

$$a^{-2}\leqslant b^{-2}\leqslant c^{-2},b^{-1}+c^{-1}\geqslant c^{-1}+a^{-1}\geqslant a^{-1}+b^{-1}$$

于是
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=$$
$$\frac{a^{-2}}{b^{-1}+c^{-1}}+\frac{b^{-2}}{c^{-1}+a^{-1}}+\frac{c^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\geqslant$$
$$\frac{3(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})}{2(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})}\geqslant\frac{(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})^2}{2(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})}=$$
$$\frac{1}{2}(1/a+1/b+1/c)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}$$

证法 8 构造二项平方和函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix-b_i)^2$，由 $f(x)\geqslant 0$ 得 $\Delta\leqslant 0$ 解决.

构造
$$f(x)=\left(\frac{bc}{\sqrt{ab+ac}}x-\sqrt{ab+ac}\right)^2+\left(\frac{ac}{\sqrt{bc+ab}}x-\sqrt{bc+ab}\right)^2+$$
$$\left(\frac{ab}{\sqrt{ac+bc}}x-\sqrt{ac+bc}\right)^2=\left(\frac{b^2c^2}{ab+ac}+\frac{c^2a^2}{bc+ab}+\right.$$
$$\left.\frac{a^2b^2}{ac+bc}\right)x^2-2(ab+bc+ac)x+2(ab+bc+ac)$$
因为 $f(x)\geqslant 0$，所以 $\Delta\leqslant 0$，即
$$4(ab+bc+ac)^2-8\left(\frac{b^2c^2}{ab+ac}+\frac{c^2a^2}{bc+ab}+\frac{a^2b^2}{ac+bc}\right)\cdot$$
$$(ab+bc+ac)\leqslant 0$$
于是 $$\frac{b^2c^2}{ab+ac}+\frac{c^2a^2}{bc+ab}+\frac{a^2b^2}{ac+bc}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ac)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$$
即
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

证法 9 从对称不等式等号成立出发证明，原不等式等价于
$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$
注意到当且仅当 $a=b=c=1$ 时不等式取等号，此时
$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}=\frac{1}{2}=\frac{a(b+c)}{4}$$
得
$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a(b+c)}{4}\geqslant bc$$
同理
$$\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{b(c+a)}{4}\geqslant ca,\quad\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{c(a+b)}{4}\geqslant ab$$
三式相加得

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ac)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$$

证法 10 由对称性引入正参数 t,由于

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+ta(b+c)\geqslant\frac{2\sqrt{t}}{a}$$
$$\frac{1}{b^3(c+a)}+tb(c+a)\geqslant\frac{2\sqrt{t}}{b}$$
$$\frac{1}{c^3(a+b)}+tc(a+b)\geqslant\frac{2\sqrt{t}}{c}$$

三式相加得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}+2t(ab+bc+ca)\geqslant$$
$$2\sqrt{t}(ab+bc+ca)$$

用 $abc=1$ 与前三个不等式取等号的条件联立解得 $t=\frac{1}{4}$,把它代入上式得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ac)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$$

证法 11 构造向量的内积证明,设

$$\overrightarrow{OA}=(\sqrt{a(b+c)},\sqrt{b(c+a)},\sqrt{c(a+b)})$$
$$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{bc}{\sqrt{a(b+c)}},\frac{ca}{\sqrt{b(c+a)}},\frac{ab}{\sqrt{c(a+b)}}\right)$$

向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

因为

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2(ab+bc+ca)}$$
$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}}$$

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=\sqrt{2(ab+bc+ca)}\cdot$

$$\sqrt{\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}}\cos\theta=ab+bc+ca$$

而 $|\cos\theta|\leqslant 1$,故有

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ac)\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$$

因此
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

以上 9 种证法属于魏亚清

3 确定所有这样的大于 3 的整数 n：在平面上存在 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，及实数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，使得

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意三点不在同一直线上；

(2) 对任意三个整数 $i,j,k(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$，$\triangle A_iA_jA_k$ 的面积等于 $r_i+r_j+r_k$.

日本命题

解　先讨论 $n=4$ 的情形. 平面上任意四点，在满足条件(1)时，其位置关系必为以下两种情况*.

ⅰ 有一点在其他三点构成的三角形内部，如图 36.3 所示；

ⅱ 四点构成一个凸四边形，如图 36.4 所示.

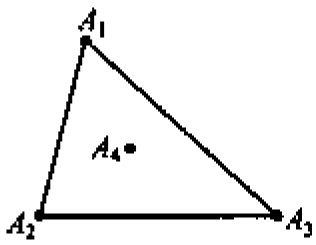


图 36.3

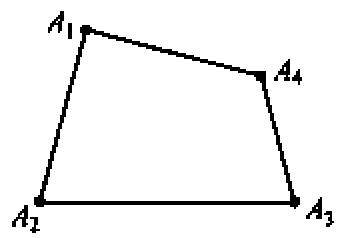


图 36.4

以 S_{ijk} 记 $\triangle A_iA_jA_k$ 的面积. 如果存在满足条件(2) 的实数 r_1，r_2,r_3,r_4. 那么，在情况 ⅰ 有

$$S_{123}=S_{124}+S_{234}+S_{314}$$

即满足

$$r_4=-\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3) \qquad ①$$

在情况 ⅱ 有

$$S_{123}+S_{341}=S_{124}+S_{234}$$

即满足

$$r_1+r_3=r_2+r_4 \qquad ②$$

下面来给出具体例子，说明 $n=4$ 是满足要求的整数. 在情况 ⅰ，取 $\triangle A_1A_2A_3$ 为边长为 2 的等边三角形，A_4 为其中心，不难验证，这时取

$$r_1=r_2=r_3=\sqrt{3}/3,r_4=-\sqrt{3}/3$$

就满足要求. 在情况 ⅱ，取 $A_1A_2A_3A_4$ 为边长为 1 的正方形. 不难验证，这时取

$$r_1=r_2=r_3=r_4=1/6$$

就满足要求. 应该指出，对任意给定满足条件(1) 的四点 A_1,A_2，A_3,A_4，无论哪种情形，都一定存在惟一的一组实数 r_1,r_2,r_3,r_4，满足条件(2). 证明留给读者.

下面来证明：当 $n\geqslant 5$ 时，一定不存在满足条件(1) 和(2) 的点与实数. 显见，只要证明 $n=5$ 时不存在即可. 先来讨论平面上

* 参看本题答案的最后一段.

满足条件(1)的任意五点的位置关系.这时可能出现如下三种情形.

ⅰ 存在三点使得其他两点均在这三点构成的三角形内部;

ⅱ 不出现情形 ⅰ,但存在三点使其构成的三角形内部有另外的一点;

ⅲ 任意三点所构成的三角形内均不含有另外的点.

我们来证明在这三种情形下,均不可能取到满足条件(2)的实数 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5.用反证法.假设能取到这样的 $r_1,\cdots,r_5$.

在情形 ⅰ,如图 36.5 所示,由式 ① 知,$r_4=r_5$.因此

$$S_{124}=S_{125},S_{234}=S_{235}$$

由于点 A_4,A_5 在直线 A_1A_2 的同侧,所以 $A_4A_5 \parallel A_1A_2$.同理有 $A_4A_5 \parallel A_2A_3$.这不可能,矛盾.

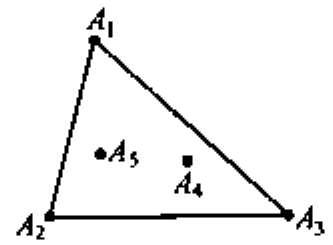


图 36.5

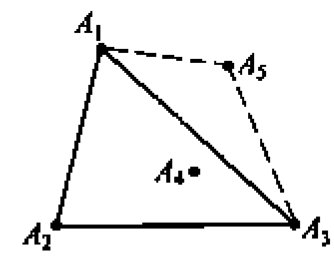


图 36.6

在情形 ⅱ,如图 36.6 所示.设 A_4 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 内.由于不能出现情形 ⅰ,这时 A_1,A_2,A_3,A_5 必构成一个凸四边形.由式 ① 得

$$r_4=-\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3)$$

这时点 A_4 必在 $\triangle A_1A_2A_5$ 或 $\triangle A_2A_3A_5$ 内,不妨设前者成立.则由式 ① 推出

$$r_4=-\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_5)$$

所以,$r_3=r_5$.因此

$$S_{123}=S_{125},S_{143}=S_{145}$$

由于点 A_3,A_5 在直线 A_1A_2 同侧,所以,$A_3A_5 \parallel A_1A_2$.同理有 $A_3A_5 \parallel A_1A_4$.这不可能,矛盾.

在情形 ⅲ,如图 36.7 所示.这时任意四点均构成凸四边形.考虑 $A_1A_2A_3A_4$ 及 $A_1A_2A_3A_5$ 这两个凸四边形.由式 ② 知

$$r_1+r_3=r_2+r_4,r_1+r_3=r_2+r_5$$

所以 $r_4=r_5$.因而有

$$S_{124}=S_{125},S_{234}=S_{235}$$

同前讨论一样,推出 $A_4A_5 \parallel A_1A_2,A_4A_5 \parallel A_2A_3$.这不可能,矛盾.证毕.

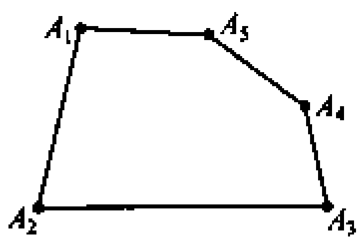


图 36.7

应该指出,证明本题的关键是基于这样一个事实,如图 36.8 所示,对满足条件(1)的四个点 A_1,A_2,A_3,A_4,当且仅当 A_4 属于区域 D_1,D_2,D_3 内时,$A_1A_2A_3A_4$ 构成一个凸四边形;而在其他情形,则必有一点在其他三点构成的三角形之内.此外,任给满足条件(1)的五个点,至少有四个点构成一个凸四边形.更精确地说,在情形 ⅰ 恰有一个凸四边形,在 ⅱ 恰有三个凸四边形,在 ⅲ 恰有五个凸四边形,即任意四点均构成一个凸四边形.请读者自己证明这些结论.更一般地,可讨论满足条件(1)的 n 个点,所构成的凸

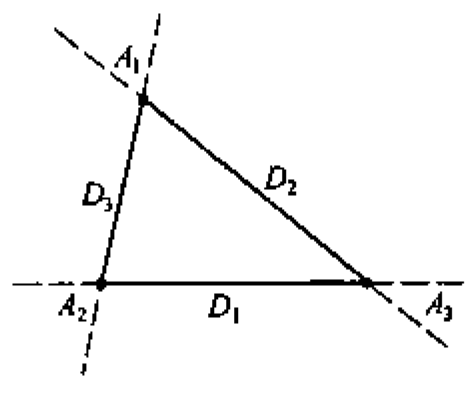


图 36.8

四边形，或凸多边形问题.在几何学中，要讨论位置关系的问题，一般都是比较困难的.

波兰命题

4 设正实数序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{1\,995}$ 满足条件：

(1) $x_0 = x_{1\,995}$；

(2) 对 $i = 1, 2, \cdots, 1\,995$，有

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

求 x_0 的最大值.

解 当 x_i 均等于 1 时满足条件，所以若存在所要求的最大值 x_0，则必大于等于 1. 当取定 $x_{i-1}(i \geqslant 1)$ 后，由条件(2)知，x_i 所能取的值必满足二次方程

$$2x^2 - \left(x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}}\right)x + 1 = (2x - x_{i-1})\left(x - \frac{1}{x_{i-1}}\right) = 0$$

所以必有

$$x_i = \frac{1}{2}x_{i-1} \quad 或 \quad x_i = \frac{1}{x_{i-1}} \qquad ①$$

显见，这两个值均满足条件(2). 因此，从初始值 x_0 开始，所能取的序列中的数必为以下形式，即

$$2^k x_0, 2^k x_0^{-1}, k \in \mathbf{Z}$$

由于 $x_0 \geqslant 1$，所以，为使(1)成立，$x_{1\,995}$ 可能取值的形式是

$$x_0(2^k x_0 中\ k = 0)\ 或\ 2^k x_0^{-1}(k \in \mathbf{Z})$$

下面来证明：$x_{1\,995}$ 仅可能取 $2^k x_0^{-1}$ 的形式，且最大可能取 $k = 1\,994$. 因此，本题所求的最大值为 $x_0 = 2^{997}$.

我们先来分析满足条件(2)的序列所可能取值的途径. 我们用图来表示. x_0 取定后，x_1 可能取的值由图 36.9"→"所示.

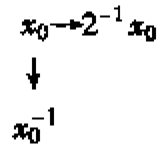


图 36.9

若取 $x_1 = x_0^{-1}$，则 x_2 可能取的值如图 36.10 所示.

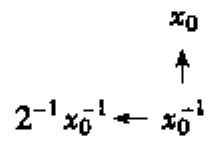


图 36.10

若取 $x_1 = 2^{-1}x_0$，则 x_2 可能取的值如图 36.11 所示.

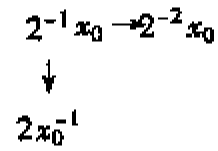


图 36.11

把这三个图合起来得到图 36.12.

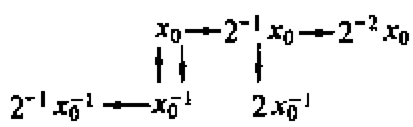


图 36.12

所以，序列 x_0, x_1, x_2 所可能取的值，只要在图 36.12 中，从 x_0 出发，依次沿"→"所指方向来取值 x_1, x_2，共有四种可能. 按此道理，可以用这样的图示方式来表示序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 所有可能取值的途径：从图 36.13 中的 x_0 出发，依次按"→"所指方向来取下一个值，直到取 x_n. 显然共有 2^n 种可能的途径. 如

$$x_0, 2^{-1}x_0, 2x_0^{-1}, x_0^{-1}, x_0, 2^{-1}x_0, 2^{-2}x_0, 2^2x_0$$

$$x_0, x_0^{-1}, 2^{-1}x_0^{-1}, 2^{-2}x_0^{-1}, 2^2x_0, 2x_0, x_0$$

分别给出了 $n = 7, n = 6$ 的两种序列的取值途径.

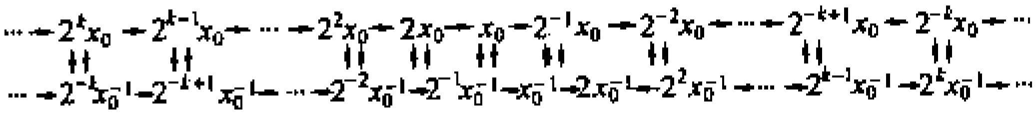


图 36.13

由图 36.12 的结构容易看出:若序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的某一取值途径,使 x_n 确实回到图中的 x_0,那么,这个序列的取值图必是由一个封闭的圈路(可重复)表示,注意到 $x_n = x_0$,所以,在第一行取值的个数必比第二行取值的个数多1.因此,n 必为偶数.现在 $n = 1\ 995$,所以这种情形不可能出现.因此,仅可能是

$$x_0 = x_n = 2^k x_0^{-1}$$

显见,k 愈大,x_0 愈大.由图可知最大可取 $k = 1\ 994$.这序列仅可能是

$$\begin{cases} x_i = 2^{-i}x_0, 0 \leqslant i \leqslant 1\ 994 \\ x_{1\ 995} = 2^{1\ 994}x_0^{-1} \end{cases}$$

即 $x_0 = 2^{997}$.证毕.

新西兰命题

5 设 $ABCDEF$ 是凸六边形,满足

$$AB = BC = CD, DE = EF = FA$$

及

$$\angle BCD = \angle EFA = 60°$$

再设 G, H 是这个六边形的两个内点,使得 $\angle AGB = \angle DHE = 120°$,证明

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$$

证明 如图 36.14 所示,由条件知 $\triangle BCD$ 和 $\triangle EFA$ 均是等边三角形,所以 $AB = BD, AE = ED$,因而 BE 是四边形 $ABDE$ 的对称轴.设 G', H' 分别是 G, H 关于轴 BE 的对称点.显然有 $GH = G'H'$,及

$\triangle ABG \cong \triangle DBG', AG = DG', BG = BG', \angle DG'B = 120°$

$\triangle DEH \cong \triangle AEH', DH = AH', EH = EH', \angle AH'E = 120°$

由于 $CG' + G'H' + H'F \geqslant CF$,由以上各式知,若能证明

$$CG' = BG' + DG' \qquad ①$$

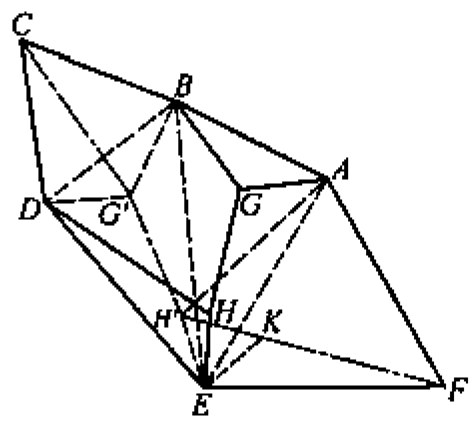


图 36.14

$$FH' = AH' + EH' \quad ②$$

则立即推出所要结论.下面来证式②,式①可同理推出.

由点 F 分别作 $H'A$,$H'E$ 的垂线 FP,FQ,如图 36.15 所示.显然有 $\angle PFQ = 60°$,及 $\angle AFP = \angle EFQ$.因而 $\mathrm{Rt}\triangle AFP \cong \triangle EFQ$,$AP = EQ$.所以 $H'F$ 是 $\angle EH'A$ 的角平分线,$\angle AH'F = \angle EH'F = 60°$.

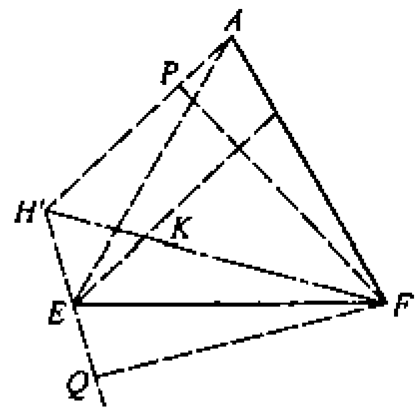


图 36.15

作 $EK \parallel H'A$,交 $H'F$ 于 K.显见,$\triangle H'EK$ 为等边三角形.所以

$$H'E = EK = KH' \quad ③$$

而由 $\angle H'EK = \angle AEF = 60°$,推出 $\angle H'EA = \angle KEF$.注意到 $AE = EF$,就得 $\triangle AEH' \cong \triangle FEK$.由此及式③就推出式②.证毕.

波兰命题

6 设 p 是奇素数,求集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 的所有满足以下条件的子集 A 的个数:

(1) A 恰好有 p 个元素;

(2) A 中所有元素之和被 p 整除.

解法 1 这种子集的个数就是同余方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p \equiv 0 \pmod p \\ 1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leqslant 2p \end{cases} \quad ①$$

的解数 N.下面利用组合及数论知识来解.我们要证明

$$N = 1 + \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p-1}\binom{p}{p-r}\binom{p}{r} + 1 \quad ②$$

由此可推出

$$N = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2 \quad ③$$

我们先来证明由式②可推出式③.$\binom{2p}{p}$ 就是在 $2p$ 个元素中任取 p 个元素的组合数.而这相当于把这 $2p$ 个元素分为 A,B 两组,每组 p 个元素,对 $r = 0,1,2,\cdots,p$,在 A 组任意取定 r 个元素,然后再在 B 组任取 $p - r$ 个元素.而这样的取法共有

$$\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}\binom{p}{p-r} = 2 + \sum_{r=1}^{p-1}\binom{p}{r}\binom{p}{p-r}$$

个,由于它等于 $\binom{2p}{p}$,由此及式②就推出式③.

下面来证式②.对同余方程①的每一组解

$$x_1, x_2, \cdots, x_p \quad ④$$

必有惟一的 $r, 0 \leqslant r \leqslant p$，使这组解分为两部分，即

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leqslant p < x_{r+1} < \cdots < x_p \leqslant 2p \qquad ⑤$$

显见，$r = 0$ 时不存在前一部分，而后一部分仅可能取

$$x_i = p + i, 1 \leqslant i \leqslant p$$

这的确是①的解.$r = p$ 时不存在后一部分，而前一部分仅可能取

$$x_i = i, 1 \leqslant i \leqslant p$$

这的确也是 ① 的解.现来讨论 $1 \leqslant r \leqslant p-1$ 的情形.

对取定的 $r, 0 \leqslant r \leqslant p$，以 N_r 表示同余方程 ① 满足条件 ⑤ 的解数.因此(利用 $N_0 = N_p = 1$)

$$N = \sum_{r=0}^{p} N_r = 1 + \sum_{r=1}^{p-1} N_r + 1 \qquad ⑥$$

我们来证明

$$N_r = \frac{1}{p}\binom{p}{p-r}\binom{p}{r}, 1 \leqslant r \leqslant p-1 \qquad ⑦$$

由以上两式就推出式 ②.

对取定的 $r, 1 \leqslant r \leqslant p-1$，满足条件 ⑤ 的全部解可以这样来得到：先在 $p+1, p+2, \cdots, 2p$ 中任意取定 $p-r$ 个变数 x_{r+1}，$x_{r+2}, \cdots, x_p$ 的值，这共有 $\binom{p}{p-r}$ 种取法.对这样任意取定的 x_{r+1}，$x_{r+2}, \cdots, x_p$，设

$$x_{r+1} + \cdots + x_p \equiv -c \pmod p$$

那么原解的前一部分 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 可能取的值就是满足同余方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_r \equiv c \pmod p \\ 1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leqslant p \end{cases} \qquad ⑧$$

的全部解，设其解数为 $N_r(c)$.我们来证明对任意的 c，$N_r(c)$ 均相等.由于满足 $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leqslant p$ 的数组(不一定是 ⑧ 的解)$\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 共有 $\binom{p}{r}$ 种取法，所以，由此及 $N_r(c)$ 均相等就推出

$$N_r(c) = \frac{1}{p}\binom{p}{r} \qquad ⑨$$

因此，式 ⑦ 成立.对取定的 $r(1 \leqslant r \leqslant p-1)$，为证对任意的 c，$N_r(c)$ 均相等，只要证对任意的 c 有

$$N_r(c+1) = N_r(c) \qquad ⑩$$

即同余方程 ⑧ 与同余方程

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_r \equiv c + 1 \pmod p \\ 1 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_r \leqslant p \end{cases} \qquad ⑪$$

的解数相同.为此，我们来建立这两个同余方程的解之间的一一

对应关系.设 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 是 ⑧ 的一组解,记

$$x_{i+1}-x_i\equiv l_i(\mathrm{mod}\ p),1\leqslant l_i\leqslant p,1\leqslant i\leqslant r$$

当 $i=r$ 时,取 $x_{r+1}=x_1$(这不是同余方程 ① 中的 x_{r+1}).显然有

$$l_1+l_2+\cdots+l_r=p$$

由于 $r\leqslant p-1$,所以必有某些 i,使 $l_i\geqslant 2$.设 i_0 是使 $l_i\geqslant 2$ 的最小的 i,即

$$i_0=\min\{i\mid 1\leqslant i\leqslant r,l_i\geqslant 2\}$$

现取

$$\begin{cases}y_i=x_i,i\neq i_0,1\leqslant i\leqslant r\\ y_{i_0}\equiv x_{i_0}+1(\mathrm{mod}\ p),1\leqslant y_{i_0}\leqslant p\end{cases} \qquad ⑫$$

容易验证,这样得到的 $y_1,y_2,\cdots,y_r$ 确是同余方程 ⑪ 的解,且 ⑧ 的不同的解由此对应的 ⑪ 的解也不同(留给读者).所以,$N_r(c)\leqslant N_r(c+1)$.反之,对取定的 ⑪ 的一组解 $y_1,y_2,\cdots,y_r$,记

$$y_i-y_{i-1}\equiv h_i(\mathrm{mod}\ p),1\leqslant h_i\leqslant p,1\leqslant i\leqslant r$$

当 $i=0$ 时,取 $y_{-1}=y_r$.显然有

$$h_1+h_2+\cdots+h_r=p$$

由于 $r\leqslant p-1$,故必有某些 i,使 $h_i\geqslant 2$.设 i_1 是使 $h_i\geqslant 2$ 的最小的 i,即

$$i_1=\min\{i\mid 1\leqslant i\leqslant r,h_i\geqslant 2\}$$

取

$$\begin{cases}x_i=y_i,i\neq i_1,1\leqslant i\leqslant r\\ x_{i_1}\equiv y_{i_1}-1,1\leqslant x_{i_1}\leqslant p,i=i_1\end{cases} \qquad ⑬$$

容易验证,这样得到的 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 确是同余方程 ⑧ 的解,且 ⑪ 的不同的解由此对应 ⑧ 的解也不同.所以,$N_r(c+1)\leqslant N_r(c)$.这就证明了式 ⑩,且建立了同余方程 ⑧ 和 ⑪ 的解之间的一个一一对应关系.证毕.

本题的提出者波兰的 Marcin Kuczma 给出了一个非常漂亮简洁的解法.现介绍如下.

集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 的每个子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$(依 $x_1<x_2<\cdots<x_p$ 排列),必存在惟一的 $r(0\leqslant r\leqslant p)$,把这子集分为满足式 ⑤ 的两部分

$$\{x_1,\cdots,x_r\},\{x_{r+1},\cdots,x_p\}$$

对应于 $r=0$ 和 $r=p$ 的子集是惟一的,分别为

$$x_1=p+1,x_2=p+2,\cdots,x_p=2p$$

和

$$x_1=1,x_2=2,\cdots,x_p=p$$

显见,这两个子集均满足条件(2).由于 p 个元素的子集共有

$\binom{2p}{p}$ 个，所以，相应于 $1 \leqslant r \leqslant p-1$ 的所有 p 个元素的子集个数为 $\binom{2p}{p}-2$. 这样，问题就转化为确定这些子集中满足条件(2) 的子集的个数.

现把这些子集按下述方法来分类：子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ 和 $\{x'_1, x'_2, \cdots, x'_p\}$ 称为是属于同一类的，如果

ⅰ 它们对应的 r 相等；

ⅱ $x'_i = x_i, r+1 \leqslant i \leqslant p$；

ⅲ 存在 $m(0 \leqslant m < p)$ 使得

$$x'_i \equiv x_i + m \pmod p, 1 \leqslant i \leqslant r \tag{14}$$

即 $\{x'_1, x'_2, \cdots, x'_r\}$ 是 $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ 的一个"模 p 平移"，"平移距离"为 m. 容易验证(留给读者)：由这样来确定分类的关系是一个等价关系. 这样就把相应于 $1 \leqslant r \leqslant p-1$ 的全部子集分成了两两不相交的等价类.

我们来证明：每个等价类中的子集个数等于 p. 任意取定一个子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$，依次取 $m = 0, 1, 2, \cdots, p-1$，由条件 ⅱ 和 ⅲ 就确定 p 个子集($m = 0$ 时，即 $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ 本身)，容易证明(留给读者)，由此确定的这 p 个子集是两两不同的. 此外，对应同一个 m 的两个子集一定是相同的. 这就证明了所要结论. 由此推出等价类的个数是

$$\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}-2\right) \tag{15}$$

下面来确定每一等价类中，满足条件(2) 的子集个数，考虑子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ 所属的等价类. 由前面讨论知，这等价类中每个子集 $\{x'_1, x'_2, \cdots, x'_p\}$ 必对应于惟一的 $m(0 \leqslant m < p)$ 满足式⑭. 因而

$$x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_p \equiv c + mr \pmod p$$

其中，$c = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$. 由于对取定的 $c, r(1 \leqslant r \leqslant p-1)$ 有

$$c + mr \equiv 0 \pmod p$$

m 有且仅有一解，即这一等价类中仅有一个子集的元素之和被 p 整除. 所以，在相应于 $1 \leqslant r \leqslant p-1$ 的全部子集中满足条件的子集的个数即是等价类的个数，即由式⑮给出，它加上相应于 $r = 0$ 和 p 的两个子集就证明了满足题意的子集个数由式③给出. 证毕.

解法 2 我们将给出该问题最一般的推广形式的两个解. 令 $\sigma(A)$ 表示 A 的所有元素的和. 推广问题是，求使得 $|A| = p$, $\sigma(A) \equiv 0 \pmod p$ 的 $[mp]$ 的子集 A 的个数. 令

$$C_m = \{A \subseteq [mp] \mid |A| = p, \sigma(A) \equiv 0 \pmod p\}$$

用多截公式我们要证明

$$|C_m| = \frac{1}{p}\left(\binom{mp}{p} + m(p-1)\right)$$

考虑多项式

$$F(x,y) = (1+xy)(1+xy^2)\cdots(1+xy^{mp})$$

乘积中对 $x^k y^\sigma$ 的每一份贡献都对应一个子集(可能空)$A = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subseteq [mp]$,其中 $|A| = k, \sigma(A) = \sigma$.所以

$$|C_m| = \sum_{\sigma \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)} [x^p y^\sigma] F(x,y)$$

余下来的就是代数问题.由多截公式

$$|C_m| = [x^p] \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} F(x, \omega^j)$$

其中,$\omega = e^{2\pi i/p}$.因此

$$|C_m| = [x^p] \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (1+x\omega^j)(1+x\omega^{2j})\cdots(1+x\omega^{mpj}) =$$

$$[x^p] \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} ((1+x)(1+x\omega^j)\cdots(1+x\omega^{(p-1)j}))^m$$

其中,最后一步用到 $\omega^{kj} = \omega^{(k+p)j}$.对 $j = 0$,被加数是 $(1+x)^{mp}$,对 j 的其他 $p-1$ 个值,被加数是 $(1+x^p)^m$.为证明这一点,注意 $(1, \omega^j, \omega^{2j}, \cdots, \omega^{(p-1)j})$ 是 $(1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{(p-1)})$ 的一个排列,而且

$$(1+x)(1+\omega x)(1+\omega^2 x)\cdots(1+\omega^{p-1}x) = 1 + x^p$$

所以 $|C_m| = [x^p] \dfrac{1}{p}((1+x)^{mp} + (p-1)(1+x^p)^m) =$

$$\frac{1}{p}\left(\binom{mp}{p} + m(p-1)\right)$$

令 $m = 2$,我们就得到原问题的答案,即

$$|C_2| = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} + 2(p-1)\right)$$

注 一位美国学生雅可比·罗瑞(Jacob Lurie)利用多截公式发现了一个当素数 p 用任意正整数 n 代替后仍然成立的公式.此公式涉及欧拉 ϕ 函数.

第二种方法要用到更常规的组合方法.设 p 是个奇素数,对 $0 \leqslant k \leqslant p$,$0 \leqslant r \leqslant p-1$,令

$$F_{k,r} = \{A \subseteq [p] \mid |A| = k, \sigma(A) \equiv r \pmod p\}$$

首先我们证明,对 $1 \leqslant k \leqslant p-1$ 有

$$|F_{k,0}| = |F_{k,1}| = \cdots = |F_{k,p-1}| = \frac{1}{p}\binom{p}{k}$$

因为 $\sum\limits_{r=0}^{p-1} |F_{k,r}| = \dbinom{p}{k}$,所以只要证明对 $0 \leqslant r, s \leqslant p-1$,存在双射 ϕ:

$F_{k,r} \to F_{k,s}$ 即可.对 $A \in F_{k,r}$,令

$$\phi(A) = \{x + k^{-1}(s - r) \mid x \in A\}$$

其中,$x + k^{-1}(s - r)$ 的计算是在 $\mathbf{Z}_p$ 里进行的.显然由 $\sigma(A) \equiv r \pmod p$ 可推出 $\sigma(\phi(A)) \equiv s \pmod p$,所以 $\phi: F_{k,r} \to F_{k,s}$.容易验证 ϕ 是双射,逆映射是

$$\phi^{-1}(B) = \{y + k^{-1}(r - s) \mid y \in B\}$$

正如前面一样,令

$$C_m = \{A \subseteq [mp] \mid |A| = p, \sigma(A) \equiv 0 \pmod p\}$$

我们通过建立递归关系找出 $|C_m|$ 的公式.假设 $m > 1$,对 $A \in C_m$ 令 $X = A \cap [p]$,$Y = A - X$.我们将 $|C_m|$ 的组成分为三种情况.

ⅰ $X = A = [p]$,这对计算 C_m 的所有集合的贡献是 1.

ⅱ $X = \varnothing$,那么 $A \subseteq \{p+1, p+2, \cdots, mp\}$,而且容易计算这种情况下 A 的个数是 $|C_{m-1}|$.

ⅲ 如果 $|X| = k, 1 \leqslant k \leqslant p-1$,$Y$ 的选择有 $\binom{(m-1)p}{p-k}$ 种,一旦选定,$\sigma(X)$ 的模 p 剩余类由下式确定,即

$$\sigma(A) = \sigma(X) + \sigma(Y) \equiv 0 \pmod p$$

由前面的结果,X 有 $\binom{p}{k}\Big/p$ 种选择.总而言之,我们有

$$|C_m| = 1 + |C_{m-1}| + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{(m-1)p}{p-k}\binom{p}{k}$$

为了计算这个和,我们应用范德蒙恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

因此我们得到

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{(m-1)p}{p-k}\binom{p}{k} = \binom{mp}{p} - \binom{(m-1)p}{p} - 1$$

进而 $$|C_m| - |C_{m-1}| = \frac{1}{p}\left(\binom{mp}{p} - \binom{(m-1)p}{p} + (p-1)\right)$$

显然 $|C_1| = 1$,如果令 $C_0 = \varnothing$,上面的关系对 $m = 1$ 也成立,所以我们叠代求和得

$$|C_m| = \frac{1}{p}\left(\binom{mp}{p} + m(p-1)\right)$$

将 $m = 2$ 带人就得到原问题的解.

第 37 届国际数学奥林匹克

印度，1996

1 设 $ABCD$ 是块矩形的板，$|AB|=20$，$|BC|=12$.这块板分成 20×12 个单位正方形.

设 r 是给定的正整数.当且仅当两个小方块的中心之间的距离等于$\sqrt{r}$ 时，可以把放在其中一个小方块里的硬币移到另一个小方块中.

在以 A 为顶点的小方块中放有一个硬币，我们的工作是要找出一系列的"移动"，使这个硬币移到以 B 为顶点的小方块中.

(1) 证明：当 r 被 2 或 3 整除时，这一工作不能够完成；

(2) 证明：当 $r=73$ 时，这项工作可以完成；

(3) 当 $r=97$ 时，这项工作是否能完成？

芬兰命题

证明 把小方块按它所在的行数及列数进行编号，以(i,j)表示在第 i 行第 j 列的小方块$(i=1,2,\cdots,12;j=1,2,\cdots,20)$.由题意可知，在$(i_1,j_1)$ 中的硬币可以移到(i_2,j_2) 的条件是

$$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2=r$$

(1) 当 $2\mid r$ 时，由条件 i_1-i_2 与 j_1-j_2 的奇偶性相同，即

$$i_1-i_2\equiv j_1-j_2 \pmod 2$$

从而
$$i_1-j_1\equiv i_2-j_2 \pmod 2$$

但由于
$$1-1\not\equiv 1-20 \pmod 2$$

所以，不可能找出一系列的"移动"把硬币从(1,1) 移到(1,20).

当 $3\mid r$ 时，由条件可知

$$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2\equiv 0 \pmod 3$$

由于完全平方数模 3 时，只能为 0，1，因此

$$i_1-i_2\equiv j_1-j_2\equiv 0 \pmod 3$$

从而
$$i_1+j_1\equiv i_2+j_2 \pmod 3$$

同样由于
$$1+1\not\equiv 1+20 \pmod 3$$

所以不可能找出一系列"移动"把硬币从(1,1) 移到(1,20).

(2) 当 $r=73$ 时，条件成为

$$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2=73$$

由于 $73=3^2+8^2$,因此,$|i_1-i_2|$,$|j_1-j_2|$ 中一个为 3,另一个为 8. 如下的一系列移动就把硬币从 (1,1) 移到了 (1,20),即

$$(1,1)\to(4,9)\to(7,17)\to(10,9)\to(2,6)\to(5,14)\to$$
$$(8,6)\to(11,14)\to(3,17)\to(6,9)\to(9,17)\to(1,20)$$

(3) 当 $r=97$ 时,条件成为

$$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2=97$$

由于 $97=4^2+9^2$,因此,$|i_1-i_2|$,$|j_1-j_2|$ 中一个为 4,另一个为 9. 这时,符合要求的一系列移动是不存在的,其原因是这块板太小. 把每一列的 12 块小方块分成 4 块一组,而每 4 块看成一个大块. 然后,仿照国际象棋棋盘的方式把它们染成黑白两色,如图 37.1 所示. 于是,在黑格中的硬币只能移到黑格中,由于 (1,1) 是黑格,而 (1,20) 是白格,因此不存在符合要求的一系列移动.

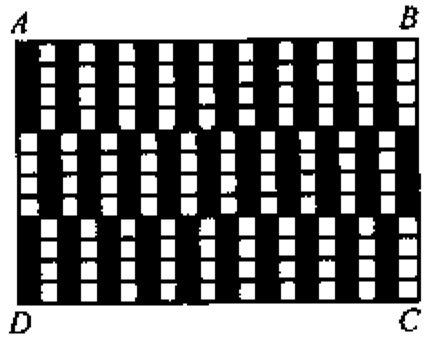


图 37.1

2 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点,$\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$. 又设 D,E 分别是 $\triangle APB$ 及 $\triangle APC$ 的内心. 证明:AP,BD,CE 交于一点.

加拿大命题

证法 1 如图 37.2 所示,延长 AP 交 BC 于点 K,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F,连结 BF,CF,有

此证法属于蔡凯华

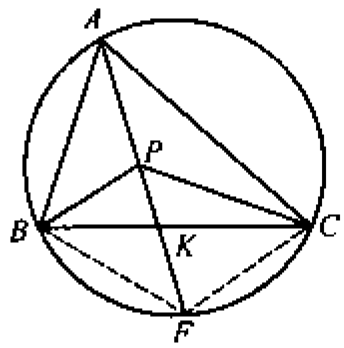


图 37.2

$$\angle APC-\angle ABC=\angle AKC+\angle PCK-\angle ABC=\angle PCK+\angle KCF=\angle PCF$$

同理
$$\angle APB-\angle ACB=\angle PBF$$

由假设,有
$$\angle PCF=\angle PBF$$

由正弦定理,有

$$\frac{PB}{\sin\angle PFB}=\frac{PF}{\sin\angle PBF}=\frac{PF}{\sin\angle PCF}=\frac{PC}{\sin\angle PFC}$$

所以
$$\frac{PB}{PC}=\frac{\sin\angle PFB}{\sin\angle PFC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{AC}$$

即
$$\frac{PB}{AB}=\frac{PC}{AC}$$

记 BD 与 AP 的交点为 M,由于 BD 是 $\angle ABP$ 的平分线,所以

$$\frac{PM}{MA}=\frac{PB}{AB}$$

记 CE 与 AP 的交点为 N,由于 CE 是 $\angle ACP$ 的平分线,所以

$$\frac{PN}{NA}=\frac{PC}{AC}$$

因而,$\frac{PM}{MA}=\frac{PN}{NA}$,即 M 与 N 重合. 于是 AP,BD,CE 交于一点.

证法 2 如图 37.3 所示,过点 P 作 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 的垂线,垂足分别为 X,Y,Z.

由于 P,X,B,Z 共圆，且 PB 为圆的直径．于是

$$PB=\frac{XZ}{\sin\angle ABC}$$

同理
$$PC=\frac{XY}{\sin\angle ACB}$$

因此
$$\frac{PB}{PC}=\frac{XZ}{XY}\cdot\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{XZ}{XY}\cdot\frac{AB}{AC}$$

延长 AP 交 BC 于 K，有

$$\angle APC-\angle ABC=\angle PCX+\angle BAP=\angle PYX+\angle ZYP=\angle ZYX$$

同理
$$\angle APB-\angle ACB=\angle YZX$$

由假设条件，$\angle ZYX=\angle YZX$，有 $XY=XZ$.

因而，$\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$. 同证法 1 即知 AP,BD,CE 交于一点.

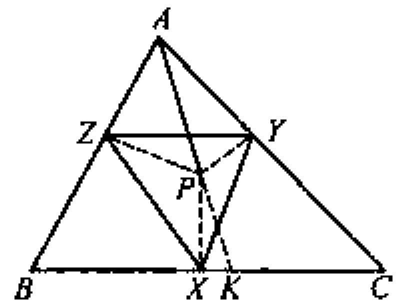


图 37.3

注　本题关键在于证明 $\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$. 实际上，满足这一等式的点 P 的轨迹是一个圆，即阿波罗尼圆．因此，也即要证明：满足本题条件(即关于角的等式)的点 P 在阿波罗尼圆的圆弧 $\overset{\frown}{AK}$ 上(其中 AK 是 $\angle BAC$ 的平分线)．作 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 K，又作 $\angle A$ 的外角平分线交 BC 于 K_1，阿波罗尼圆就是以 K_1K 为直径的圆．可以证明：在弧 $\overset{\frown}{AK}$ 上的点 P 满足本题中的关于角的等式．进而可证明：使本题中角的等式成立的点 P_1 在弧 $\overset{\frown}{AK}$ 上．这样也可证明本题，但不如上面作法简明.

此证法属于程善明

证法 3　分别延长 BP,CP 交圆 ABC 于 C',B'，如图 37.4 所示，连结 AB',AC'，则

$$\angle AB'C=\angle ABC,\angle AC'B=\angle ACB$$

于是由三角形外角定理得

$$\angle APB-\angle ACB=\angle APB-\angle AC'B=\angle PAC'$$
$$\angle APC-\angle ABC=\angle APC-\angle AB'C=\angle PAB'$$

至此，两个角差相等便转化为 $\angle PAC'=\angle PAB'$，延长 AP 交圆 ABC 于 M，连结 MB',MC'，则由

$$\angle PAC'=\angle PAB'\Rightarrow MC'=MB' \qquad ①$$

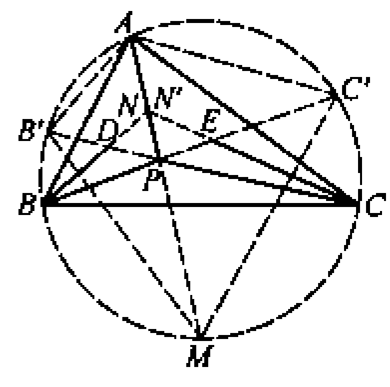


图 37.4

设 BD,CE 的延长线分别交 AP 于 N 及 N'，由内心及角平分线性质定理，可得

$$\frac{NA}{NP}=\frac{BA}{BP}$$

但
$$\frac{BA}{BP}=\frac{MC'}{MP}$$

(因为 $\triangle BAP\backsim\triangle MC'P$) 所以

$$\frac{NA}{NP}=\frac{MC'}{MP} \qquad ②$$

同理,由 $\triangle CAP \backsim \triangle MB'P$,可得

$$\frac{N'A}{N'P}=\frac{CA}{CP}=\frac{MB'}{MP} \quad ③$$

由 ①,②,③ 知

$$\frac{NA}{NP}=\frac{N'A}{N'P}\Rightarrow\frac{NA}{AP}=\frac{N'A}{AP}\Rightarrow NA=N'A$$

由此可知 N 与 N' 重合,即 AP,BD,CE 交于一点.

3 设 $S=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 是所有非负整数的集合.找出所有在 S 上定义,取值于 S 中的满足下面条件的函数 f:

$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$$

对所有 $m,n\in S$ 成立.

罗马尼亚命题

解 设 $f:S\to S$ 满足

$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n),m,n\in S \quad ①$$

取 $m=n=0$,得

$$f(f(0))=f(f(0))+f(0) \quad ②$$

所以

$$f(0)=0$$

又在 ① 中取 $m=0$,可知

$$f(f(n))=f(n),\forall n\in S$$

这样,式 ① 变成

$$f(m+f(n))=f(m)+f(n),\forall m,n\in S$$

记 f 的值域为 $T(T=\{f(n)\mid n\in S\})$.显然如果某个 $n\in S$ 使 $f(n)=n$,则 $n\in T$.

反之,对于 T 中的任何数 n,由 $n\in T$,有 $k\in S$ 使 $n=f(k)$.于是

$$f(n)=f(f(k))=f(k)=n$$

因此,f 的值域 T 也就是 f 的全体不动点所组成的集.

首先,对于 T 中任何两个数(可以相同),它们的和仍在 T 中.因为当 $n,m\in T$ 时,$f(m)=m,f(n)=n$,所以

$$f(m+n)=f(m+f(n))=f(m)+f(n)=m+n$$

即 $m+n\in T$(其实,在 ② 中,右端表示值域中任何两个数之和,而左端显然在值域中).

其次,当两个数一个在 T 中,另一个不在 T 中时,这两个数之和必定不在 T 中,因为当 $m\notin T,n\in T$ 时

$$f(m+n)=f(m+f(n))=f(m)+f(n)=$$
$$f(m)+n\neq m+n$$

所以,$m+n\notin T$(因 T 是 f 的不动点全体).

Ⅰ 如果 $T=\{0\}$,显然,由于 f 的值域只有一个数 0,故

$f(n)=0$(对任何 $n\in S$),即 $f\equiv 0$.

ⅱ 如果 $1\in T$. 由于 T 对加法封闭,即 T 中任何两个数之和在 T 中,可见 $T=S$,即 S 中每个数都是 f 的不动点. 这时,$f(n)=n$(对任何 $n\in S$),即 f 是个"恒等"函数.

ⅲ 在上述两种情况之外,则 T 中有自然数,但 $1\notin T$. 记 T 中最小自然数为 $n_0(n_0\geqslant 2)$.

由于 $n_0\in T$ 及 T 对加法封闭,可见 $kn_0\in T$(对任何 $k\in S$). 又由于 n_0 是 T 中最小自然数,$1,2,\cdots,n_0-1$ 都不在 T 中,于是,任何 $n\in S$ 写成 kn_0+r 时,如果余数 $r\neq 0$,即 $1\leqslant r\leqslant n_0-1$,则它不在 T 中,可见 T 恰为 n_0 倍数的全体所组成.

由于 $f(1),f(2),\cdots,f(n_0-1)$ 都在 T 中,故都是 n_0 的倍数,即有 $a_1,a_2,\cdots,a_{n_0-1}\in S$(可以有相同的数)使

$$f(1)=a_1n_0,f(2)=a_2n_0,\cdots,f(n_0-1)=a_{n_0-1}n_0$$

这时,对任何 $n\in S$,记 $n=kn_0+r$. 则

$$f(n)=f(r+kn_0)=f(r+f(kn_0))=$$
$$f(r)+f(kn_0)=a_rn_0+kn_0$$

(a_0 当做 0 理解).

以上讨论了 f 必定具有的形式,这就为作出所有满足 ① 的 f 做好了准备. 实际上,任取自然数 $n_0\geqslant 2$,再任取 S 中 n_0-1 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n_0-1}$,并令 $a_0=0$,作 f 为如下函数:当 S 中 n 写成形式 $n=kn_0+r$ 时(其中,$k\in S,0\leqslant r\leqslant n_0-1$),令

$$f(n)=a_rn_0+kn_0$$

这样作出的函数 f 以及恒等于 0 的函数,恒等函数就是满足 ① 的全部函数.

最后,还要验证这些函数确实满足条件 ①. 恒等于 0 的函数及恒等函数显见满足 ①,故只要对所作的函数来验证. 易知这样作出的 f 的值域等于 $\{kn_0\mid k\in S\}$. 对于任何 $m,n\in S$,如果 $m=kn_0+r$,而 $f(n)$ 当然是 n_0 的倍数,$f(n)=k_1n_0$,从而

$$f(m+f(n))=f(kn_0+r+k_1n_0)=$$
$$f((k+k_1)n_0+r)=a_rn_0+(k+k_1)n_0$$
$$f(m)=f(kn_0+r)=a_rn_0+kn_0$$
$$f(f(m))=a_rn_0+kn_0$$
$$f(n)=k_1n_0$$

因此 $$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$$

对任何 $m,n\in S$ 成立.

俄罗斯命题

41 设正整数 a,b 使 $15a+16b$ 和 $16a-15b$ 都是正整数的平方.求这两个平方数中较小的数能够取到的最小值.

解 设正整数 a,b 使得 $15a+16b$ 和 $16a-15b$ 都是正整数的平方,即

$$15a+16b=r^2,16a-15b=s^2,r,s\in\mathbf{N}$$

于是
$$15^2a+16^2a=15r^2+16s^2$$
即
$$481a=15r^2+16s^2$$
$$16^2b+15^2b=16r^2-15s^2$$
即
$$481b=16r^2-15s^2$$

因此,$15r^2+16s^2,16r^2-15s^2$ 都是 481 的倍数,下证 r,s 都是 481 的倍数.

由 $481=13\times37$,故只要证明 r,s 都是 13,37 的倍数即可.

先证 r,s 都是 13 的倍数,用反证法.

由于 $16r^2-15s^2$ 是 13 的倍数,则 $13\nmid r,13\nmid s$.

因为 $16r^2\equiv15s^2 \pmod{13}$,所以
$$16r^2s^{10}\equiv15s^{12}\equiv15\equiv2 \pmod{13}$$
由于左边是个完全平方数,两边取 6 次方,有
$$((4rs^5)^2)^6\equiv1 \pmod{13}$$
故
$$2^6\equiv1 \pmod{13}$$
矛盾.

再证 $37\mid r,37\mid s$.用反证法.

假定 $37\nmid r,37\nmid s$.因为
$$37\mid15r^2+16s^2,37\mid16r^2-15s^2$$
所以
$$37\mid r^2-31s^2$$
即
$$r^2\equiv31s^2 \pmod{37}$$
因此
$$r^2s^{34}\equiv31s^{36}\equiv31 \pmod{37}$$

左边是完全平方数,两边取 18 次方,即得
$$31^{18}\equiv1 \pmod{37}$$
但 $31^{18}\equiv(31^2)^9\equiv((-6)^2)^9\equiv36^9\equiv(-1)^9\equiv-1 \pmod{37}$
矛盾.

从而,$481\mid r,481\mid s$,显见这两个完全平方数都大于或等于 481^2.

另一方面,取 $a=481\times31,b=481$ 时,两个完全平方数都是 481^2.因此,所求的最小值等于 481^2.

亚美尼亚命题

5 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 AB 平行于 ED，BC 平行于 FE，CD 平行于 AF. 又设 R_A, R_C, R_E 分别表示 $\triangle FAB$，$\triangle BCD$ 及 $\triangle DEF$ 的外接圆半径，p 表示六边形的周长. 证明

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2}$$

证法 1 过 A, D 作 BC 的垂线，只考虑 BC 与 EF 之间的一段，记它的长度为 h，记六边形 $ABCDEF$ 的六条边 $AB, BC, \cdots, FA$ 的长分别为 a, b, c, d, e, f，又 $\angle A, \angle B, \cdots, \angle F$ 分别表示六边形的六个内角. 由假设有 $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$.

显然，$BF \geqslant h$. 从而，$2BF \geqslant 2h$. 而在计算 h 时，两条 BC 与 EF 之间的线段分别由点 A 及点 D 分成两段，这样共有四条线段，于是

$$2BF \geqslant 2h = a \cdot \sin B + f \cdot \sin F + c \cdot \sin C + d \cdot \sin E$$

类似地，过 B, E 作 CD 的垂线并考虑 CD 与 AF 之间的线段，可得

$$2DF \geqslant a \cdot \sin A + b \cdot \sin C + d \cdot \sin D + e \cdot \sin F$$

$$2BD \geqslant f \cdot \sin A + e \cdot \sin E + b \cdot \sin B + c \cdot \sin D$$

另一方面，$\triangle BAF$ 的外接圆半径

$$R_A = \frac{BF}{2\sin A}$$

同样

$$R_C = \frac{BD}{2\sin C}, R_E = \frac{DF}{2\sin E}$$

于是

$$R_A + R_C + R_E = \frac{1}{4}\left(\frac{2BF}{\sin A} + \frac{2BD}{\sin C} + \frac{2DF}{\sin E}\right) >$$

$$\frac{1}{4}\left(\left(\frac{a \cdot \sin B + f \cdot \sin F + c \cdot \sin C + d \cdot \sin E}{\sin A}\right) + \right.$$

$$\left(\frac{f \cdot \sin A + e \cdot \sin E + b \cdot \sin B + c \cdot \sin D}{\sin C}\right) +$$

$$\left.\left(\frac{a \cdot \sin A + b \cdot \sin C + d \cdot \sin D + e \cdot \sin F}{\sin E}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(a\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin E}\right) + b\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin E}\right) + \right.$$

$$c\left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin D}{\sin C}\right) + d\left(\frac{\sin E}{\sin A} + \frac{\sin D}{\sin E}\right) +$$

$$\left.e\left(\frac{\sin E}{\sin C} + \frac{\sin F}{\sin E}\right) + f\left(\frac{\sin F}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\right)\right)$$

上式右端的六个括号中，因为 $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$，所以各是两个互为倒数的正数之和，从而都大于等

于 2. 这样

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{1}{4}(2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f) = \frac{1}{2}p$$

此证法属于姚一隽

证法 2　由 $\triangle FAB$,$\triangle BCD$,$\triangle DEF$ 分别作一个平行四边形，以 FB,BD,DF 为对角线，而另一个顶点分别记为 A',C',E'，即过 B 作 AF 的平行线，过 D 作 BC 的平行线，过 F 作 DE 的平行线，这三条线的交点围成 $\triangle A'C'E'$（当原六边形的三组平行对边中有一组相等时，必定三组都相等，而三个点 A',C',E' 重合成一个点）.

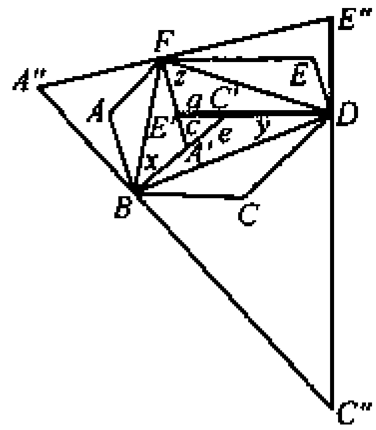


图 37.5

过 B 作 BA' 的垂线，过 D 作 DC' 的垂线，过 F 作 FE' 的垂线，这三条线两两的交点记为 A'',C'',E''，如图 37.5 所示.（当原六边形的三组平行对边分别相等时，A',C',E' 重合成一点 Q，这时 QB,QD,QF 分别是六边形的三条边长，从而六边形的周长等于 $2(QB + QD + QF)$. 另一方面 $\triangle FAB$ 的外接圆半径等于 $\triangle FA'B$ 的外接圆半径，也就是 $\frac{1}{2}A'A''$. 这样，三个半径分别等于 $\frac{1}{2}QA''$，$\frac{1}{2}QC''$，$\frac{1}{2}QE''$. 所要证明的不等式即为莫德尔（Mordell）不等式）.

把六边形的三组平行对边中较短的边的长分别记为 x,y,z（在图 37.5 中 $A'B = x$,$C'D = y$,$E'F = z$），$\triangle A'C'E'$ 的三边分别记为 a,c,e. 于是，六边形的另三条边长为 $x + e$,$y + a$,$z + c$. 从而

$$p = 2x + 2y + 2z + a + c + e$$

由余弦定理有

$$BF^2 = x^2 + (z + c)^2 - 2x(z + c)\cos A$$

由于 $\angle A = \angle FA'B$，是 $\angle A''$ 的补角，故等于 $\angle C'' + \angle E''$. 因此

$$\begin{aligned} BF^2 &= x^2 + (z + c)^2 - 2x(z + c)\cos(C'' + E'') = \\ &x^2 + (z + c)^2 - 2x(z + c) \cdot \\ &(\cos C'' \cdot \cos E'' - \sin C'' \cdot \sin E'') = \\ &(x \cdot \sin C'' + (z + c)\sin E'')^2 + \\ &(x \cdot \cos C'' - (z + c)\cos E'')^2 \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} BD^2 &= y^2 + (x + e)^2 - 2y(x + e)\cos C = \\ &y^2 + (x + e)^2 - 2y(x + e)\cos(E'' + A'') = \\ &y^2 + (x + e)^2 - 2y(x + e) \cdot \\ &(\cos E'' \cdot \cos A'' - \sin E'' \cdot \sin A'') = \\ &(y \cdot \sin E'' + (x + e)\sin A'')^2 + \\ &(y \cdot \cos E'' - (x + e)\cos A'')^2 \end{aligned}$$

$$DF^2 = z^2 + (y + a)^2 - 2z(y + a) \cdot \cos(\angle A'' + \angle C'') =$$

$$(z\cdot\sin A''+(y+a)\sin C'')^2+$$
$$(z\cdot\cos A''-(y+a)\cos C'')^2$$

在上面三个等式中，右端第一个括号内的数是正数，所以

$$BF\geqslant x\cdot\sin C''+(z+c)\sin E''$$
$$BD\geqslant y\cdot\sin E''+(x+e)\sin A''$$
$$DF\geqslant z\cdot\sin A''+(y+a)\sin C''$$

另一方面
$$R_A=\frac{BF}{2\sin A}=\frac{BF}{2\sin A''}$$
$$R_C=\frac{BD}{2\sin C''},R_E=\frac{DF}{2\sin E''}$$

从而
$$R_A+R_C+R_E\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x\cdot\sin C''+(z+c)\sin E''}{\sin A''}+\frac{y\cdot\sin E''+(x+e)\sin A''}{\sin C''}+\frac{z\cdot\sin A''+(y+a)\sin C''}{\sin E''}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(x\left(\frac{\sin C''}{\sin A''}+\frac{\sin A''}{\sin C''}\right)+y\left(\frac{\sin E''}{\sin C''}+\frac{\sin C''}{\sin E''}\right)+z\left(\frac{\sin A''}{\sin E''}+\frac{\sin E''}{\sin A''}\right)+c\frac{\sin E''}{\sin A''}+e\frac{\sin A''}{\sin C''}+a\frac{\sin C''}{\sin E''}\right)$$

但 $\triangle A'C'E'$ 的内角中，$\angle C'A'E'$ 是 $\angle FA'B$ 的补角，从而等于 $\angle A''$. 同样

$$\angle A'C'E'=\angle C'',\angle C'E'A'=\angle E''$$

所以
$$\frac{\sin E''}{\sin A''}=\frac{\sin E'}{\sin A'}=\frac{e}{a}$$
$$\frac{\sin A''}{\sin C''}=\frac{a}{c},\frac{\sin C''}{\sin E''}=\frac{c}{e}$$

再由两个互为倒数的正数之和大于或等于 2，即得

$$R_A+R_C+R_E\geqslant\frac{1}{2}(2x+2y+2z+\frac{ce}{a}+\frac{ea}{c}+\frac{ac}{e})$$

而
$$\frac{ce}{a}+\frac{ea}{c}+\frac{ac}{e}=\frac{1}{2}(\frac{ce}{a}+\frac{ea}{c}+\frac{ea}{c}+\frac{ac}{e}+\frac{ac}{e}+\frac{ce}{a})\geqslant$$
$$\frac{1}{2}(2e+2a+2c)=a+c+e$$

从而
$$R_A+R_C+R_E\geqslant\frac{1}{2}(2x+2y+2z+a+c+e)=\frac{1}{2}p$$

法国命题

6 设 n,p,q 都是正整数且 $n > p+q$，若 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是满足下面条件的整数：

(1) $x_0 = x_n = 0$；

(2) 对每个整数 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，或 $x_i - x_{i-1} = p$，或 $x_i - x_{i-1} = -q$.

证明：存在一对标号 (i,j)，使 $i < j$，$(i,j) \neq (0,n)$，且 $x_i = x_j$.

证明 首先，不妨设 $(p,q) = 1$.（当 $(p,q) = d > 1$ 时，记 $p = dp_1, q = dq_1$，则 $(p_1,q_1) = 1$. 只要考虑 $\frac{x_0}{d},\frac{x_1}{d},\cdots,\frac{x_n}{d}$，而相邻两项之差等于 p_1 或 $-q_1$，且 $n > p_1 + q_1$. 一切条件都满足.）

由于 $x_i - x_{i-1} = p$ 或 $-q(i = 1,2,\cdots,n)$，如果这 n 个差 $x_i - x_{i-1}$ 中有 a 个为 p，b 个为 $-q$，则

$$x_n = ap - bq, a + b = n$$

从而，$ap = bq$. 由 $(p,q) = 1$，$a = kq$，而 $b = kp$. 又由于

$$n = a + b = k(p+q)$$

及

$$n > p + q$$

故 $k \geqslant 2$.

记

$$y_i = x_{i+p+q} - x_i, i = 0,1,\cdots,(k-1)(p+q)$$

因为 $x_i - x_{i-1} = p$ 或 $-q \equiv p(\bmod(p+q))$，把 $i = 0,1,\cdots$，直到某个 i 都相加，即知

$$x_i \equiv i_p(\bmod(p+q))$$

于是

$$x_j - x_i \equiv (j-i)p(\bmod(p+q))$$

特别地

$$y_i \equiv 0(\bmod(p+q))$$

即每个 y_i 都是 $p+q$ 的倍数.

又

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1+p+q} - z_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i)$$

由于括号中的数只能是 p 或 $-q$，所以 $y_{i+1} - y$ 只能等于 $p+q$，0，$-(p+q)$ 三数之一.

再由

$$y_0 + y_{(p+q)} + y_{2(p+q)} + \cdots + y_{(k-1)(p+q)} = x_n = 0$$

如果 $y_0 > 0$，则其中总有数小于 0；如 $y_0 < 0$，则其中总有数大于 0.

这样，$\frac{y_0}{p+q},\frac{y_1}{p+q},\cdots,\frac{y_{(k-1)(p+q)}}{p+q}$ 是整数，且每相邻两项之差只能是 1，0 或 -1，而且不可能全是正数，也不可能全是负数，因此总有一个是 0，即有 i_0 使 $y_{i_0} = 0$. 这时，取 $i = i_0, j = i_0 + p + q$ 即符合要求.

第 38 届国际数学奥林匹克

阿根廷，1997

白俄罗斯命题

1 在坐标平面上，具有整数坐标的点构成单位边长的正方格的顶点，这些正方格被涂上黑白相间的两种颜色（像国际象棋棋盘那样）.

对于任意一对正整数 m 和 n，考虑一个直角三角形，它的顶点具有整数坐标，两条直角边的长度分别为 m 和 n，且两条直角边都在这些正方格的边上.

令 S_1 为这个三角形区域中所有黑色部分的总面积，S_2 则为所有白色部分的总面积. 令 $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

(1) 当 m 和 n 同为正偶数或同为正奇数时，计算 $f(m,n)$ 的值；

(2) 证明：$f(m,n) \leqslant \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ 对所有的 m 和 n 都成立；

(3) 证明：不存在常数 c，使得对所有的 m 和 n，不等式 $f(m,n) < c$ 都成立.

解 (1) 设 $\triangle ABC$ 为一直角三角形，它的顶点具有整数坐标，且两条直角边都在这些正方格的边上. 设 $\angle A = 90°$，$AB = m$，$AC = n$. 如图 38.1 所示.

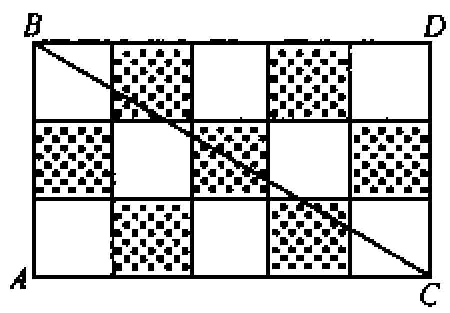


图 38.1

对于任一多边形 P，记 $S_1(P)$ 为 P 的区域中所有阴影部分的面积，$S_2(P)$ 为其所有白色部分的面积.

当 m 和 n 同时为偶数或者同时为奇数时，矩形 $ABDC$ 的阴影部分关于斜边 BC 的中点中心对称，因此

$$S_1(ABC) = S_1(BCD),\ S_2(ABC) = S_2(BCD)$$

从而
$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABCD) - S_2(ABCD)|$$

于是，当 m 和 n 同为偶数时，$f(m,n) = 0$；当 m 和 n 同为奇数时，$f(m,n) = \frac{1}{2}$.

(2) 如果 m 和 n 同为偶数或者同为奇数，则由(1)即知结论成

立.故可设 m 为奇数,n 为偶数.如图38.2所示,考虑 AB 上的点 L 使得 $AL=m-1$.

由于 $m-1$ 为偶数,我们有 $f(m-1,n)=0$,即 $S_1(ALC)=S_2(ALC)$.因此

$$f(m,n)=|S_1(ABC)-S_2(ABC)|=|S_1(LBC)-S_2(LBC)|\leqslant$$
$$S_{\triangle LBC}=\frac{n}{2}\leqslant\frac{1}{2}\max\{m,n\}$$

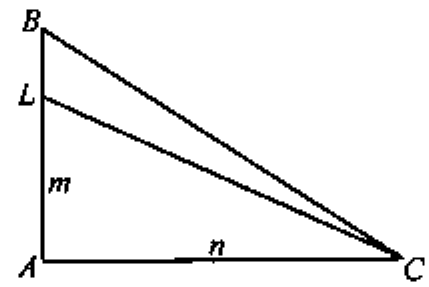


图38.2

(3) 我们来计算 $f(2k+1,2k)$ 的值.如同在(2)中,考虑 AB 上的点 L,使得 $AL=2k$.因为 $f(2k,2k)=0$ 且 $S_1(ALC)=S_2(ALC)$,有

$$f(2k+1,2k)=|S_1(LBC)-S_2(LBC)|$$

$\triangle LBC$ 的面积等于 k.不失一般性,可以假设对角线 LC 全部落在阴影正方格中,如图38.3所示.于是,$\triangle LBC$ 的白色部分由若干个三角形组成,即

$$\triangle BLN_{2k},\triangle M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1},\cdots,\triangle M_1L_1N_1$$

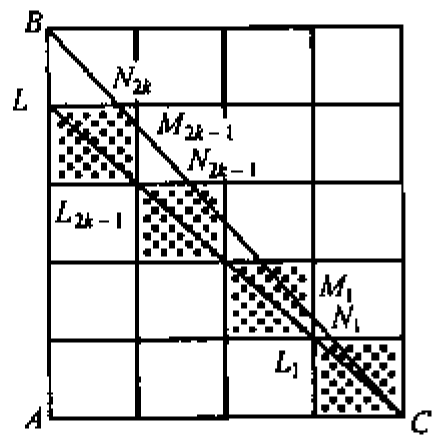


图38.3

它们每一个都与 $\triangle BAC$ 相似.其总面积为

$$S_2(LBC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{2k+1}\left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2+\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2k}\right)^2\right)=$$
$$\frac{1}{4k(2k+1)}(1^2+2^2+\cdots+(2k)^2)=\frac{4k+1}{12}$$

因此,阴影部分的总面积为

$$S_1(LBC)=k-\frac{1}{12}(4k+1)=\frac{1}{12}(8k-1)$$

最终得到
$$f(2k+1,2k)=\frac{2k-1}{6}$$

这个函数可以取任意大的值.

英国命题

② 设 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 中最小的内角,点 B 和 C 将这个三角形的外接圆分成两段弧.设 U 是落在不含 A 的那段弧上且不等于 B 与 C 的一个点.

线段 AB 和 AC 的垂直平分线分别交线段 AU 于 V 和 W,直线 BV 和 CW 相交于 T.

证明:$AU=TB+TC$.

证法1 如图38.4所示,因为点 V 在线段 AB 的垂直平分线上,所以,$\angle VAB=\angle VBA$,又因 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的最小内角,且 $\angle VAB=\angle UAB<\angle CAB$,故

$$\angle VBA=\angle VAB<\angle CAB\leqslant\angle CBA$$

即 V 在 $\angle ABC$ 内部.同理,W 在 $\angle ACB$ 内部.

设 $\angle UAB=\alpha$,则 $\angle VBA=\alpha$.下面用 $\angle A,\angle B,\angle C$ 分别表

示 $\angle CAB,\angle ABC,\angle BCA$.则有

$$\angle CAU=\angle A-\alpha,\angle CBT=\angle B-\alpha$$

因为 W 在线段 AC 的垂直平分线上,所以

$$\angle ACW=\angle CAW=\angle A-\alpha$$

$$\angle BCT=\angle C-\angle ACT=\angle C+\alpha-\angle A$$

于是 $\angle BTC=180^\circ-(\angle B-\alpha)-(\angle C+\alpha-\angle A)=$

$$180^\circ-\angle B-\angle C+\angle A=2\angle A$$

在 $\triangle BCT$ 中使用正弦定理,有

$$\frac{BC}{\sin\angle BTC}=\frac{TB}{\sin\angle TCB}=\frac{TC}{\sin\angle TBC}$$

注意到 $\angle B-\alpha=180^\circ-(\angle C+\alpha+\angle A)$

有 $TB+TC=\frac{BC}{\sin\angle BTC}(\sin\angle TCB+\sin\angle TBC)=$

$$\frac{BC}{\sin 2A}(\sin(\angle C+\alpha-\angle A)+\sin(\angle B-\alpha))=$$

$$\frac{BC}{\sin 2A}(\sin(\angle C+\alpha-\angle A)+\sin(\angle C+\alpha+\angle A))=$$

$$\frac{BC}{\sin 2A}\cdot 2\sin(\angle C+\alpha)\cdot\cos A=$$

$$\frac{BC}{\sin A}\cdot\sin(\angle C+\alpha)$$

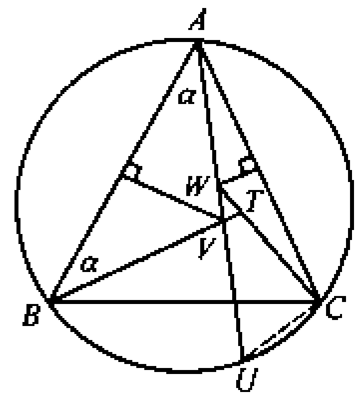


图 38.4

设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R,则由正弦定理知$\frac{BC}{\sin A}=R$.故得

$$TB+TC=2R\cdot\sin(C+\alpha) \quad ①$$

连结 CU.由 A,B,U,C 四点共圆可知

$$\angle BCU=\angle BAU=\alpha$$

故 $$\angle ACU=C+\alpha$$

在 $\triangle ACU$ 中使用正弦定理,有

$$AU=2R\cdot\sin(C+\alpha)$$

结合式①即得

$$AU=TB+TC$$

证法2 延长 CT 交圆于 P,连结 BP.如图38.5所示.

由 $WA=WC,VA=VB$,所以 $\angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$,所以

$$WA\cdot WU=WC\cdot WP$$

所以 $WU=WP$,所以 $AU=CP$.

又因为

$$\angle BAC=\angle P,\angle BAC=\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$$

而 $\angle 2=\angle 5$,所以

$$\angle BAC=\angle 4+\angle 5$$

即 $$\angle P = \angle PBT, PT = BT$$
所以 $$CP = CT + PT = CT + BT$$
即 $$AU = BT + CT$$

注 若延长 BT 交圆于 Q，同法可证：$AU = BQ, QT = CT$.

由题设 $\angle A$ 是最小的内角，我们有 $\angle 4 = \angle 3 < \angle BAC < \angle ABC$，所以 BV 与 AU 交点 V 在 $\triangle ABC$ 内，如图38.5所示，同理点 W 也在 $\triangle ABC$ 内. 因此，所得图形如同上述所示.

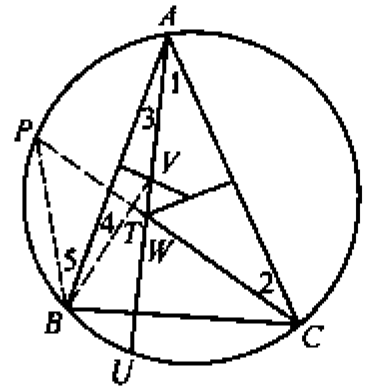


图 38.5

俄罗斯命题

3 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是满足下列条件的实数：
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$
且 $$|x_i| \leqslant \frac{n+1}{2}, i = 1,2,\cdots,n$$
证明：存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个排列 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，使得
$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}$$

证明 对于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任意一个排列 $\pi = y_1, y_2, \cdots, y_n$，记 $S(\pi)$ 为和式 $y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n$ 的值. 令 $r = \frac{n+1}{2}$. 要证存在某个排列 π 使得 $|S(\pi)| \leqslant r$.

令 $\pi_0 = x_1, x_2, \cdots, x_n$，$\widetilde{\pi} = x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$. 如果 $|S(\pi_0)| \leqslant r$ 或者 $|S(\widetilde{\pi})| \leqslant r$，则题目得证. 故假设 $|S(\pi_0)| > r$ 且 $|S(\widetilde{\pi})| > r$. 注意到
$$\begin{aligned} S(\pi_0) + S(\widetilde{\pi}) = &(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) + \\ &(x_n + 2x_{n-1} + \cdots + nx_1) = \\ &(n+1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \end{aligned}$$
从而 $$|S(\pi_0) + S(\widetilde{\pi})| = n + 1 = 2r$$

因为 $S(\pi_0)$ 和 $S(\widetilde{\pi})$ 的绝对值都大于 r，它们必然取相反的符号. 进而，它们其中之一大于 r，另一个小于 $-r$.

从 π_0 开始，通过若干次交换两个相邻元素的位置，我们可以得到任意一个排列. 特别地，存在一个排列的序列 $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_m$，使得 $\pi_m = \widetilde{\pi}$，且对每个 $i \in \{0,1,\cdots,m-1\}$，排列 π_{i+1} 是通过交换 π_i 的两个相邻元素的位置得到的. 这意味着，如果 $\pi_i = y_1, \cdots, y_n$，$\pi_{i+1} = z_1, \cdots, z_n$，则存在某个脚标 $k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，满足
$$z_k = y_{k+1}, z_{k+1} = y_k, z_j = y_j，任意的 j \neq k, k+1$$

因为 x_i 的绝对值不超过 r,所以

$$|S(\pi_{i+1})-S(\pi_i)|=|kz_k+(k+1)z_{k+1}-ky_k-(k+1)y_{k+1}|=$$
$$|y_k-y_{k+1}|\leqslant|y_k|+|y_{k+1}|\leqslant 2r$$

这说明在序列 $S(\pi_0),S(\pi_1),\cdots,S(\pi_m)$ 中,任意两个相邻数的距离不超过 $2r$.注意到 $S(\pi_0)$ 和 $S(\pi_m)$ 均落在区间 $[-r,r]$ 的外面,且分别位于该区间的两侧,所以至少要有一个数 $S(\pi_i)$ 落在该区间内,于是存在置换 π_i 使得 $|S(\pi_i)|\leqslant r$.

4 一个 $n\times n$ 的矩阵(正方阵)称为 n 阶银矩阵,如果它的元素取自集合

$$S=\{1,2,\cdots,2n-1\}$$

且对于每个 $i=1,2,\cdots,n$,它的第 i 行和第 i 列中的所有元素合起来恰好是 S 中的所有元素,证明:

(1) 不存在 $n=1\ 997$ 阶的银矩阵;

(2) 有无限多个 n 的值,存在 n 阶银矩阵.

伊朗命题

证法 1 (1) 设 $n>1$ 且存在 n 阶银矩阵 A.由于 S 中所有的 $2n-1$ 个数都要在矩阵 A 中出现,而 A 的主对角线上只有 n 个元素,所以至少有一个 $x\in S$ 不在 A 的主对角线上.取定一个这样的 x,对于每个 $i=1,2,\cdots,n$,记 A 的第 i 行和第 i 列中的所有元素合起来构成的集合为 A_i,称为第 i 个十字,则 x 在每个 A_i 中恰出现一次.

假设 x 位于 A 的第 i 行,第 j 列 $(i\neq j)$,则 x 属于 A_i 和 A_j.这意味着 A 的 n 个十字两两配对,从而 n 必为偶数.而 1 997 是奇数,故不存在 $n=1\ 997$ 阶银矩阵.

(2) 对于 $n=2$,$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$ 为一个银矩阵.

对于 $n=4$,$A=\begin{pmatrix}1&2&5&6\\3&1&7&5\\4&6&1&2\\7&4&3&1\end{pmatrix}$ 为一个银矩阵.

一般地,假设存在 n 阶银矩阵 A,则可以按照如下方式构造 $2n$ 阶银矩阵 D,即

$$D=\begin{pmatrix}A&B\\C&A\end{pmatrix}$$

其中,B 是一个 $n\times n$ 矩阵,它是通过把 A 的每一个元素加上 $2n$ 得到的,而 C 则是通过把 B 的主对角线元素换成 $2n$ 得到的.

为证明 D 是一个银矩阵,考查其第 i 个十字,不妨设 $i\leqslant n$.这时,第 i 个十字由 A 的第 i 个十字以及 B 的第 i 行和 C 的第 i 列

构成. A 的第 i 个十字包含元素 $\{1,2,\cdots,2n-1\}$，而 B 的第 i 行和 C 的第 i 列包含元素 $\{2n,2n+1,\cdots,4n-1\}$，所以 D 确实是一个 $2n$ 阶银矩阵.

证法2 (1) 事实上，对每个大于1的奇数 n，都不存在 n 阶银矩阵.

称银矩阵第 i 行和第 i 列全体元素的集合 M_i 为第 i 个支架. n 阶矩阵共有 n 个支架. 每个支架恰含 S 的所有数各一次. 由于主对角元 a_{ii} 只出现在一个支架 M_i 中，而非主对角元 $a_{ij}(i\neq j)$ 恰出现在两个支架 M_i 与 M_j 中，因此当 n 为奇数时，S 的每个数都应在主对角线上出现(否则该数在所有支架中的出现次数为偶数，不可能等于 n). 这就要求 $2n-1=n$，即 $n=1$.

(2) 对 $k\geqslant 0$ 归纳证明存在 $n=2^k$ 阶银矩阵并且它的主对角元全是 1.

$k=0$ 时，$n=1$，$S=\{1\}$，显然有一阶银矩阵(1).

设存在主对角元全是 1 的 2^k 阶银矩阵 A. 由它拼出如 $\begin{pmatrix} A & B' \\ B & A \end{pmatrix}$ 的 2^{k+1} 阶矩阵 A'，其中，$B=A+2^{k+1}-1$(即 A 的每个元素各加上 $2^{k+1}-1$)，B' 的主对角元全是 $2^{k+2}-1$，其他元素与 B 完全相同. 显然，A' 的主对角元全是 1. 下证 A' 是 2^{k+1} 阶的银矩阵.

首先指出，对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant 2^k)$，$B$ 中第 i 列和 B' 中第 i 行的全体元素(共 2^{k+1} 个)就是 B 中的第 i 个支架添上一个数 $2^{k+2}-1$，由 B 的构造及 A 的银矩阵性质可知这 2^{k+1} 个数恰是 $2^{k+1},2^{k+1}+1,\cdots,2^{k+2}-1$. 同理 B 中第 i 行和 B' 中第 i 列的全体元素也是这 2^{k+1} 个数.

现在 A' 的第 i 个支架 $(1\leqslant i\leqslant 2^k)$ 由左上方那个 A 的第 i 个支架，B 的第 i 列及 B' 的第 i 行组成，因此恰是 $S'=\{1,2,\cdots,2^{k+1}-1,2^{k+1},\cdots,2^{k+2}-1\}$ 的所有元素. 而 A' 的第 2^k+i 个支架由右下方那个 A 的第 i 个支架，B 的第 i 行及 B' 的第 i 列组成，也是 S' 的所有元素. 故 A' 是银矩阵.

注 (1) 解答中(2)的证明，是从一个已知的 n 阶银矩阵出发，构造出一个 $2n$ 阶的银矩阵. 由于易构造出 2 阶和 4 阶银矩阵，这就确保了所有 2^k 阶银矩阵的存在性. 易证明，奇数阶的银矩阵不存在. 本文要证明，对任何偶数 $2k$，都存在 $2k$ 阶银矩阵(见定理 2)，这就解决了银矩阵的存在性问题. 此注属于蒋茂森

定义 1　记 $Q=\{1,2,\cdots,n\}$，以 $\mathscr{B}$ 表示 Q 的所有二元组合所组成的集合，即

$$\mathscr{B}=\{(1,2),(1,3),\cdots,(n-1,n)\}$$

(对每个组合(i,j),写成惟一的排列的形式,其中 $i<j$)

$$|\mathscr{B}| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

如果 $\mathscr{B}$ 能分解成$(n-1)$个不相交集合 E_i 的并,即

$$\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$$

其中,$E_i \cap E_j = \varnothing\ (i \neq j)$,且每个 E_i 中所有集合的并集都是 Q(从而 E_i 都含同样多个二元组合),则称这种分解为 n 的银分解,并称 E_i 为银集合.

例 1 对 $n=4$,设

$$E_1 = \{(1,2),(3,4)\}$$
$$E_2 = \{(1,3),(2,4)\}$$
$$E_3 = \{(1,4),(2,3)\}$$

则$\{E_1,E_2,E_3\}$便是 4 的银分解.

显然,若 n 存在银分解,则必须是偶数.下面的定理证明了这个简单的必要条件实际上已经是充分的了.

定理 1 对于偶数 $n=2k$,存在 n 的银分解.

定理 1 的证明 用归纳构造方法给出证明.

由例 1 可知,定理对 $k=2$ 正确($k=1$是平凡的).假定对所有小于$2k$的偶数 n 均已存在银分解,我们来构造 $n=2k$ 的银分解.分两种情形考虑.

i 设 k 为偶数,则 k 存在银分解.任取它的一个银分解,设为

$$\{E'_1, E'_2, \cdots, E'_{k-1}\}$$

再任取$\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$的一个银分解

$$\{E''_1, E''_2, \cdots, E''_{k-1}\}$$

(E''_i 也可由将 E'_i 中每个二元集(i,j)换作$(i+k,j+k)$而得到)令

$$E_i = E'_i \cup E''_i, i = 1,2,\cdots,k$$

写出一个 $2\times k$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ k+1 & k+2 & \cdots & 2k \end{pmatrix}$$

以下用以构造 $E_k, E_{k+1}, \cdots, E_{2k-1}$ 的方法姑且称为滚动对应法.令

$$E_k = \{(1,k+1),(2,k+2),\cdots,(k-1,2k-1),(k,2k)\}$$
$$E_{k+1} = \{(1,k+2),(2,k+3),\cdots,(k-1,2k),(k,k+1)\}$$
$$\vdots$$
$$E_{2k-1} = \{(1,2k),(2,k+1),\cdots,(k-1,2k-2),(k,2k-1)\}$$

如此构造的$\{E_1,E_2,\cdots,E_{2k-1}\}$便是 $n=2k$ 的一个银分解.事实上,显然每个 E_i 都包含k个二元组合,这 k 个二元组合的并集就是 Q.当 $i\neq j$ 时,显然 $E_i \cap E_j = \varnothing$.对任何一个二元组合$(p,q)$,当 $q \leqslant k$时它必属于某个E'_i,当 $p>k$时它必属于某个E''_i,从而(p,q)属于某个 $E_i(1\leqslant i\leqslant k)$;当$p\leqslant k$而 $q>k$ 时,(p,q)属于某个 $E_i(k+1\leqslant i\leqslant 2k)$.

例 2 应用例 1 的结果和上述方法所构造的 8 的银分解为

$$E_1=\{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)\}$$
$$E_2=\{(1,3),(2,4),(5,7),(6,8)\}$$
$$E_3=\{(1,4),(2,3),(5,8),(6,7)\}$$
$$E_4=\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$$
$$E_5=\{(1,6),(2,7),(3,8),(4,5)\}$$
$$E_6=\{(1,7),(2,8),(3,5),(4,6)\}$$
$$E_7=\{(1,8),(2,5),(3,6),(4,7)\}$$

ⅱ 设 k 为奇数，则 $k+1$ 为偶数. 记

$$Q_1=\{1,2,\cdots,k,x\}$$

(其中，x 为虚设元)，则 Q_1 存在银分解，设为

$$\{E'_1,E'_2,\cdots,E'_k\}$$

记
$$Q_2=\{k+1,k+2,\cdots,2k,y\}$$

(其中，y 亦为虚设元)，也存在银分解，设为

$$\{E''_1,E''_2,\cdots,E''_k\}$$

假定 E'_i 中含 x 的二元组合为 (p_i,x)(或 (x,p_i))，E''_i 中含 y 的二元组合为 (q_i,y)(或 (y,q_i))，将二者中的虚设元 x,y 去掉，合成一个二元组合 (p_i,q_i)，然后保留 E'_i 与 E''_i 中所有其他组合，并将二者合并，记为 E_i.

根据上述 $p_i,q_i(1\leqslant i\leqslant k)$，写出一个 $2\times k$ 矩阵，即

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix}$$

用滚动对应法作出其余的 E_i，但须将对应中作出的头一个银子集，即 $\{(p_1,q_1),(p_2,q_2),\cdots,(p_k,q_k)\}$ 去掉(因为此中的二元组合均在前面的 E_i 中出现过)，令

$$E_{k+1}=\{(p_1,q_2),(p_2,q_3),\cdots,(p_{k-1},q_k),(p_k,q_1)\}$$
$$E_{k+2}=\{(p_1,q_3),(p_2,q_4),\cdots,(p_{k-1},q_1),(p_k,q_2)\}$$
$$\vdots$$
$$E_{2k-1}=\{(p_1,q_k),(p_2,q_1),\cdots,(p_{k-1},q_{k-2}),(p_k,q_{k-1})\}$$

如此得到的 $\{E_1,E_2,\cdots,E_{2k-1}\}$ 便是 $n=2k$ 的一个银分解. 证明与ⅰ类似.

例 3 下面应用ⅱ中的方法来构造 6 的银分解.

$Q_1=\{1,2,3,x\}$，相应的银分解为

$$E'_1=\{(1,2),(3,x)\}$$
$$E'_2=\{(1,3),(2,x)\}$$
$$E'_3=\{(1,x),(2,3)\}$$

$Q_2=\{4,5,6,y\}$，相应的银分解为

$$E''_1=\{(4,5),(6,y)\}$$
$$E''_2=\{(4,6),(5,y)\}$$
$$E''_3=\{(4,y),(5,6)\}$$

于是
$$E_1=\{(1,2),(4,5),(3,6)\}$$

$$E_2 = \{(1,3),(2,5),(4,6)\}$$
$$E_3 = \{(1,4),(2,3),(5,6)\}$$

现在
$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

应用滚动法又得到两个 E_i，即

$$E_4 = \{(3,5),(2,4),(1,6)\}$$
$$E_5 = \{(3,4),(2,6),(1,5)\}$$

定义 2 假定 $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ 是定义在 S 上的任意一个 n 阶矩阵.对任何 $t \in S$，假定 $a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \cdots, a_{i_mj_m}$ 是 A 中全部的等于 t 的元素.记

$$G_t = \{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\cdots,(i_m,j_m)\}$$

称为数字(或元素) t 的地址集.

很明显，每个 A 与它的 $2n-1$ 个地址集彼此惟一决定，又地址集 G_t 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有二元排列集合的子集，G_t 彼此不相交，且其并集即全部二元排列的总集.

引理 假定 A 及地址集 $G_t(1 \leqslant t \leqslant 2n-1)$ 如定义 2 中所述.现令

$$I_t = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$$
$$J_t = \{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$$

则 A 为银矩阵的充分必要条件是对任何 t 同时满足以下三个条件：

ⅰ I_t, J_t 均由不同元素组成；

ⅱ $I_t \cup J_t = \{1,2,\cdots,n\}$；

ⅲ 对任何 $1 \leqslant r,s \leqslant m, r \neq s$，必有 $i_r \neq j_s$.

引理的证明 先证必要性.若 A 是银矩阵，则对任何 $t \in S$，第 i 行或第 i 列$(1 \leqslant i \leqslant n)$中必须有 t，这就是条件 ⅱ.第 i 行与第 i 列中总共只能有一个 t，这就是条件 ⅰ 与条件 ⅲ.

再证充分性.当条件 ⅱ 满足时，表明或者 A 的第 i 行，或者第 i 列必须有 t，条件 ⅰ 表明当第 i 行有 t 时只能有一个 t，当第 i 列有 t 时也只能有一个 t.条件 ⅲ 表明，当第 i 行和第 j 列同时有 t 时，除非 $a_{ii} = t$.因此，当三个条件同时成立时，恰好表明，每个 $t \in S$ 在第 i 行与第 i 列 的并集中出现且仅出现一次，这就是说，这个并集即是 S，A 确实是银矩阵.

定理 2 对于任何奇数 $n(n > 1)$，不存在 n 阶银矩阵，对于任何偶数 $n = 2k$，必存在 $2k$ 阶银矩阵.

定理 2 的证明 假定 A 是 n 阶银矩阵，A 的地址集如前设.对任何 $t \in S$，设在 I_t 与 J_t 中使 $i_l = j_l$ 的 l 共有 x_t 个，则由于

$$I_t \cup J_t = \{1,2,\cdots,n\}, I_t = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}, J_t = \{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$$

就有

$$2m - x_t = n \quad ①$$

又因 $\sum_{t=1}^{2n-1} x_t$ 等于主对角线上元素数等于 n，知必有使 $x_t = 0$ 的 t，从而由式 ① 推知 n 为偶数.这就证明了不存在大于 1 的奇数阶银矩阵.

对任何 $n = 2k$，我们来构造 $2k$ 阶的银矩阵.为方便起见，不妨设 $x_1 =$

n(这不是必须的),即主对角线上元素全是 1,则对所有其余的 $t \neq 1$,均有 $x_t = 0$,从而由①推出 $m = k$,即对每个 $t \in S, t \neq 1$,t 的地址集均由 k 个不同的二元排列所组成,这些排列的并集恰好是 $\{1,2,\cdots,n\}$,这启示我们可用如下的构造方法.

对于 $n = 2k$,假定 $\{E_1,E_2,\cdots,E_{n-1}\}$ 是 n 的一个银分解.对于 $E_p(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ 中每个二元组合 (i,j)(注意我们总假定 $i < j$),将 i,j 对调写出一个二元排列 (j,i),以 (j,i) 替代 (i,j) 所得到的集合记做 F_p,则 $\{F_1,F_2,\cdots,F_{n-1}\}$ 也是 n 的银分解.

现在这样来构造一个 S 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$.令 1 的地址集

$$G_1 = \{(1,1),(2,2),\cdots,(n,n)\}$$

然后依次令 $2,3,\cdots,n$ 的地址集分别为 $E_1,E_2,\cdots,E_{n-1}$,即 $G_2 = E_1, G_3 = E_2,\cdots,G_n = E_{n-1}$;再依次令 $n+1,n+2,\cdots,2n-1$ 的地址集分别为 $F_1,F_2,\cdots,F_{n-1}$,即 $G_{n+1} = F_1, G_{n+2} = F_2,\cdots,G_{2n-1} = F_{n-1}$.

由于这些地址集显然满足引理中的条件 ⅰ,ⅱ,ⅲ,因此相应的 $\boldsymbol{A}$ 便是 n 阶银矩阵.

(2) 单墫发现此题与散步问题有意想不到的联系.$2k$ 个人,每天分成 k 对外出散步.如果每人每天散步的伴侣都不相同,这样的散步至多可以持续多少天?

由于每个人至多有 $2k-1$ 个不同的伴侣,所以散步持续的天数小于等于 $2k-1$.

但证明等号一定成立,需要构造一个合乎题目要求的散步方案.这种方案有实用价值:如果将 $2k$ 个人改为 $2k$ 个球队,两人一同散步改为两个队进行一场比赛,那么散步方案就成为一张比赛的日程表.

为了作出这个方案,先作一个圆,第一个人(1 号)在圆心,其余的人:2,3,$\cdots$,$2k$ 号,顺次排在圆圈上,如图 38.6 所示.

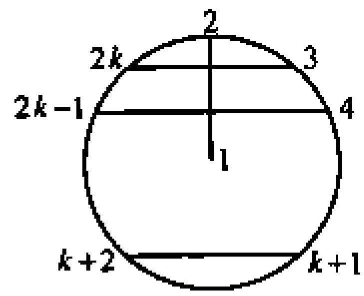


图 38.6

第 1 天,1 与 2 结伴,其余的人两两结对,每一对在圆上的位置关于 1,2 的连线对称(即 3 与 $2k$,4 与 $2k-1$,$\cdots$,$k+1$ 与 $k+2$ 结伴).

第 2 天,1 与 3 结伴,其余的伴侣关于 1,3 的连线对称(即 4 与 2,5 与 $2k$,$\cdots$,$k+2$ 与 $k+3$ 结伴).

依此类推,半径的端点由 $2,3,\cdots$,一直变到 $2k$ 就产生了 $2k-1$ 天的散步方案.例如 $k=3$,用这个方法得出

第 1 天 (1,2),(3,6),(4,5)
第 2 天 (1,3),(4,2),(5,6)
第 3 天 (1,4),(5,3),(2,6)
第 4 天 (1,5),(4,6),(2,3)
第 5 天 (1,6),(5,2),(3,4)

这个问题与图论有关.它表明 $2k$ 个顶点的完全图的色指数是 $2k-1$.

设 $n = 2k$,先在 n 阶矩阵的主对角线上写 n 个 $2k$.再按下面的方法写主对角线的上方:在散步问题中,$2k$ 个人可以结成伴侣,按照要求持续 $2k-1$ 天.第 t 天$(1 \leqslant t \leqslant 2k-1)$的 k 个对中如果有 $(i,j)(i<j)$,就在第 i 行第 j 列处写上 t,下面以 $n=6$ 为例说明这一作法,即

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 8 & 10 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 8 & 11 & 6 & 1 & 4 \\ 10 & 11 & 9 & 7 & 6 & 2 \\ 11 & 9 & 7 & 10 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

(读者可与前面的散步问题对照).最后,在主对角线下方,第 j 行第 i 列($j > i$)处写 $t+n$,即将上方关于主对角线对称的地方(第 i 行第 j 列)写的数 t 加上 n.

因为在散步问题中,第 $t(1 \leqslant t \leqslant 2k-1)$ 天,第 i 个人恰出现一次,所以在上面构造的矩阵中,第 i 行与第 i 列中只有一个 $t(1 \leqslant t \leqslant 2k-1)$,从而也只有一个 $t+n$.又显然第 i 行与第 i 列中只有一个 n,所以第 i 行与第 i 列的元素组成的集等于 $S(1 \leqslant i \leqslant n)$.即上面构造的矩阵是银矩阵.

5 求所有的整数对 (a,b),其中 $a \geqslant 1, b \geqslant 1$,且满足等式 $a^{b^2} = b^a$.

捷克命题

解法 1 显然当 a,b 中有一个等于 1 时,$(a,b)=(1,1)$.下设 $a,b \geqslant 2$.

设 $t = \frac{b^2}{a}$,则由题中等式得 $b = a^t, at = a^{2t}$,从而 $t = a^{2t-1}$.因此 $t > 0$.如果 $2t-1 \geqslant 1$,则

$$t = a^{2t-1} \geqslant (1+1)^{2t-1} \geqslant 1 + (2t-1) = 2t > t$$

矛盾.所以 $2t-1<1$.于是,有 $0<t<1$.

记 $k = \frac{1}{t}$,则 $k = \frac{a}{b^2} > 1$ 为有理数.由 $a = b^k$ 可知

$$k = b^{k-2} \quad ①$$

如果 $k \leqslant 2$,则 $k = b^{k-2} \leqslant 1$,与前面所证 $k>1$ 矛盾,因此 $k>2$.设 $k = \frac{p}{q}, p,q \in \mathbf{N}, (p,q)=1$,则 $p > 2q$.于是,由式①可得

$$\left(\frac{p}{q}\right)^q = k^q = b^{p-2q} \in \mathbf{Z}$$

这意味着 $q^q \mid p^q$.但 p,q 互素,故 $q=1$,即 k 为一个大于 2 的自然数.

当 $b=2$ 时,由式①得 $k = 2^{k-2}$,所以 $k \geqslant 4$.又因

$$\begin{aligned} k = 2^{k-2} &\geqslant C_{k-2}^0 + C_{k-2}^1 + C_{k-2}^2 = \\ &1 + (k-2) + \frac{(k-2)(k-3)}{2} = \\ &1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \geqslant 1 + (k-1) = k \end{aligned}$$

等号当且仅当 $k=4$ 时成立,所以

$$a = b^k = 2^4 = 16$$

当 $b \geqslant 3$ 时

$$k = b^{k-2} \geqslant (1+2)^{k-2} \geqslant 1 + 2(k-2) = 2k - 3$$

从而，$k \leqslant 3$. 这意味着 $k = 3$. 于是

$$b = 3, a = b^k = 3^3 = 27$$

综上所述，满足题目等式的所有正整数对为

$$(a,b) = (1,1),(16,2),(27,3)$$

解法2 显然$(1,1)$是一组解，且 a 与 b 之一等于1时，另一个也必等于1. 下设 a 与 b 都大于1.

记 a 与 b^2 的最大公因子

$$(a,b^2) = d, a = md, b^2 = nd, (m,n) = 1$$

代入原方程并开 d 次方得到

$$a^n = b^m$$

由算术基本定理，a 与 b 有相同的素因子，设为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，且 $a = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}, b = p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}$. 代入比较 p_i 的次数得到

$$n\alpha_i = m\beta_i, 1 \leqslant i \leqslant k$$

因为$(n,m) = 1$，所以 $n \mid \beta_i$，即 b 的每个素因子的次数都是n 的倍数，故有正整数 x 使 $b = x^n$. 再由 $a^n = b^m = x^{mn}$ 有 $a = x^m$，所以

$$d = (a,b^2) = (x^m, x^{2n}) = x^{\min\{m,2n\}}$$

有以下两种可能.

ⅰ $m \leqslant 2n$. 此时 $d = x^m = a$，所以

$$m = 1, b = a^n \cdot a^{a^{2n}} = a^{na}, n = a^{2n-1}$$

但 $a \geqslant 2$ 时，对 $n \geqslant 1$ 归纳可证 $a^{2n-1} > n$，故此种情形下无解.

ⅱ $m > 2n$. 此时 $d = x^{2n} = b^2$，所以

$$n = 1, a = b^m, m \geqslant 3$$

由 $b^{mb^2} = b^{b^m}$ 得到$m = b^{m-2}$.

取 $m = 3$ 得 $b = 3, a = 3^3 = 27$;

取 $m = 4$ 得 $b = 2, a = 2^4 = 16$;

而对 $m \geqslant 5$ 归纳可证 $b^{m-2} > m$. 即 $m \geqslant 5$ 时无解.

因此本题共有三组解：$(1,1),(16,2),(27,3)$.

立陶宛命题

6 对于每个正整数 n,将 n 表示成 2 的非负整数次方的和.令 $f(n)$ 为正整数 n 的不同表示法的个数.

如果两个表示法的差别仅在于它们中各个数相加的次序不同,则这两个表示法就被视为是相同的.例如,$f(4)=4$,因为 4 恰有下列四种表示法,即

$$4,2+2,2+1+1,1+1+1+1$$

证明:对于任意整数 $n\geqslant 3$ 有

$$2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}$$

证明 对于任意一个大于 1 的奇数 $n=2k+1$,n 的任一表示中必包含一个 1.去掉这个 1 就得到 $2k$ 的一个表示.反之,给 $2k$ 的任一表示加上一个 1 就得到 $2k+1$ 的一个表示.这显然是 $2k+1$ 和 $2k$ 的表示之间的一个一一对应.从而有如下递归式,即

$$f(2k+1)=f(2k) \qquad ①$$

进一步地,对于任意正偶数 $n=2k$,其表示可以分为两类:包含若干个 1 的和不包含 1 的.对于前者,去掉 1 个 1 就得到 $2k-1$ 的一个表示;对于后者,将每一项除以 2,就得到 k 的一个表示.这两种变换都是可逆的,从而都是一一对应的,于是得到第二个递归式

$$f(2k)=f(2k-1)+f(k) \qquad ②$$

式①,②对于任意 $k\geqslant 1$ 都成立.显然 $f(1)=1$.定义 $f(0)=1$,则式①对于 $k=0$ 也成立.根据式①,②,函数 f 是不减的.

由式①,可以将式②中的 $f(2k-1)$ 换成 $f(2k-2)$,得

$$f(2k)-f(2k-2)=f(k),k=1,2,3,\cdots$$

给定任一正整数 $n\geqslant 1$,将上式对 $k=1,2,\cdots,n$ 求和,得

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n),n=1,2,3,\cdots \qquad ③$$

下面先证明上界.

在式③中,右端所有的项都不大于最后一项.对于 $n\geqslant 2$,$2=f(2)\leqslant f(n)$.于是,有

$$f(2n)=2+(f(2)+\cdots+f(n))\leqslant 2+(n-1)f(n)\leqslant$$
$$f(n)+(n-1)f(n)=nf(n),n=2,3,4,\cdots$$

进而得到 $f(2^n)\leqslant 2^{n-1}f(2^{n-1})\leqslant 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}f(2^{n-1})\leqslant$

$$2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 2^{n-3}f(2^{n-3})\leqslant\cdots\leqslant$$
$$2^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}f(2)=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2$$

因为当 $n\geqslant 3$ 时,有 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2<2^{\frac{n^2}{2}}$,上界得证.

为了证明下界,我们先证明对于具有相同奇偶性的正整数 $b\geqslant a\geqslant 0$,有

$$f(b+1)-f(b) \geqslant f(a+1)-f(a) \quad ④$$

事实上,如果 a,b 同为偶数,则由式 ① 知上式两端均等于 0,而当 a,b 同为奇数时,由式 ② 知

$$f(b+1)-f(b)=f\left(\frac{b+1}{2}\right)$$

$$f(a+1)-f(a)=f\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

由函数 f 是不减的即得不等式 ④ 成立.

任取正整数 $r \geqslant k \geqslant 1$,其中 x 为偶数,在式 ④ 中依次令 $a = r-j, b = r+j, j=0,1,\cdots,k-1$. 然后将这些不等式加起来,得

$$f(r+k)-f(r) \geqslant f(r+1)-f(r-k+1)$$

因为 r 是偶数,所以

$$f(r+1)=f(r)$$

从而 $\quad f(r+k)+f(r-k+1) \geqslant 2f(r), k=1,2,\cdots,r$

对于 $k=1,2,\cdots,r$,将上述不等式相加,即得

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(2r) \geqslant 2rf(r)$$

根据式 ③,上式左端等于 $f(4r)-1$,从而对于任意偶数 $r \geqslant 2$ 有

$$f(4r) \geqslant 2rf(r)+1 \geqslant 2rf(r)$$

取 $r=2^{m-2}$ 即得

$$f(2^m) \geqslant 2^{m-1}f(2^{m-2}) \quad ⑤$$

要使 $r=2^{m-2}$ 为偶数,m 须为大于 2 的整数,但是式 ⑤ 对于 $m=2$ 也成立.

令 n 为大于 1 的整数. 如果 l 是一个满足 $2l \leqslant n$ 的整数,则对 $m=n,n-1,\cdots,n-2l+2$ 应用不等式 ⑤,得

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1}f(2^{n-2}) > 2^{n-1}\cdot 2^{n-3}f(2^{n-4}) > \\ &2^{n-1}\cdot 2^{n-3}\cdot 2^{n-5}f(2^{n-6}) > \cdots > \\ &2^{(n-1)+(n-3)+\cdots+(n-2l+1)}f(2^{n-2l}) = \\ &2^{l(n-l)}f(2^{n-2l}) \end{aligned}$$

如果 n 是偶数,取 $l=\frac{n}{2}$;如果 n 是奇数,取 $l=\frac{n-1}{2}$. 于是,当 n 为偶数时

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}}f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}}$$

当 n 为奇数时

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2-1}{4}}f(2^1) = 2^{\frac{n^2-1}{4}}\cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}}$$

因此,对于 $n \geqslant 2$ 下界成立.

第 39 届国际数学奥林匹克

中国台湾,1998

卢森堡命题

1 在凸四边形 $ABCD$ 中,两对角线 AC 与 BD 互相垂直,两对边 AB 与 DC 不平行.点 P 为线段 AB 及 CD 的垂直平分线的交点,且 P 在四边形 $ABCD$ 的内部.证明:$ABCD$ 为圆内接四边形的充分必要条件是 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 的面积相等.

证法 1 先证必要性.即当 A,B,C,D 四点共圆时,有 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CDP}$.

设两条垂直的对角线 AC 与 BD 交于一点 K,如图 39.1 所示.从而

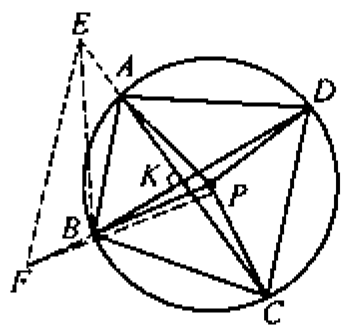


图 39.1

$$90^\circ=\angle AKB=\angle DBC+\angle ACB=$$

$$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}\text{ 的度数}+\overset{\frown}{CD}\text{ 的度数})=\frac{1}{2}(\angle APB+\angle CPD)\Rightarrow$$

$$\angle APB+\angle CPD=180^\circ\Rightarrow\sin\angle APB=\sin\angle CPD$$

又由于 A,B,C,D 共圆,且 AB 与 CD 不平行,故 P 为 $ABCD$ 外接圆的圆心.从而,$PA=PB=PC=PD$.所以

$$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}PA\cdot PB\cdot\sin\angle APB=$$

$$\frac{1}{2}PC\cdot PD\cdot\sin\angle CPD=S_{\triangle CDP}$$

下证充分性.即当 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CDP}$ 时,有 A,B,C,D 四点共圆.

如果 $PA=PD$,那么,由 P 的定义可知 A,B,C,D 都在一个以 P 为圆心的圆周上.

否则,不失一般性,假设 $PA<PD$.于是可在 KA 延长线上取一点 E,使 $PE=PD$;在 KB 延长线上取一点 F,使 $PF=PC$.则凸四边形 $EDCF$ 满足 E,D,C,F 共圆,且对角线 $EC\perp FD$.对其应用前述必要性的证明可知 $S_{\triangle PEF}=S_{\triangle PCD}$.

另一方面,无论 P 位置如何,总有直线 BP 与线段 AC 相交,可知 E 到直线 BP 的距离一定大于 A 到直线 BP 的距离 $\Rightarrow S_{\triangle ABP}<S_{\triangle EBP}$.类似地,直线 EP 必与线段 BD 相交.从而 F 到直线 PE 的距离一定大于 B 到直线 PE 的距离 $\Rightarrow S_{\triangle EFP}>S_{\triangle EBP}$.从而,

$S_{\triangle EFP} > S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$. 与前述矛盾，故假设不成立. 故必有 $PA = PD$，即 A,B,C,D 共圆.

综合以上两方面知，A,B,C,D 四点共圆的充分必要条件为 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 面积相等.

证法2　记 AC 与 BD 交于点 E，过点 P 作线段 AE，BE 之垂线，垂足分别记为 M，N. 由 $AC \perp BD$ 可知 $PMEN$ 为矩形，因此

此证法属于许以超

$$PM = NE, PN = ME$$

由点 P 的选取可知 $PA = PB$，$PC = PD$，为了证 A,B,C,D 四点共圆，只要证明

$$PA = PB = PC = PD$$

下面先来计算 $\triangle ABP$，$\triangle CDP$ 之面积，即

$$\begin{aligned}2S_{\triangle ABP} &= 2S_{\triangle ABE} - 2S_{\triangle PAE} - 2S_{\triangle PBE} = \\ &(AM + ME)(BN + NE) - (AM + ME)PM - \\ &(BN + NE)PN = AM \cdot BN - PN \cdot NE = \\ &AM \cdot BN - PN \cdot PM\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2S_{\triangle CDP} &= 2S_{\triangle ECD} + 2S_{\triangle PCE} + 2S_{\triangle PED} = \\ &(CM - ME)(DN - EN) + (CM - ME)PM + \\ &(DN - NE)PN = CM \cdot DN - NE \cdot EM = \\ &CM \cdot DN - PN \cdot PM\end{aligned}$$

所以　$$2(S_{\triangle ABP} - S_{\triangle CDP}) = AM \cdot BN - CM \cdot DN$$

因此，为了证明 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$ 当且仅当

$$AM \cdot BN = CM \cdot DN$$

设 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$，我们来证 $PA = PC$. 用反证法，若 $PA \neq PC$. 由对称性，不妨设 $PA > PC$. 由于 PM 为 $\triangle PAC$ 的过点 P 的高，因此 $AM > CM$. 因为 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$，所以有 $AM \cdot BN = CM \cdot DN$，所以 $DN > BN$；由于 PN 为 $\triangle PBD$ 的过点 P 的高，因此 $PD > PB$，即 $PC > PA$. 这和 $PA > PC$ 矛盾，所以证明了 $PA = PC$.

反之，若 $PA = PB = PC = PD$，分别考虑 $\triangle PAC$ 及 $\triangle PBD$ 有 $AM = MC$，$BN = ND$，所以 $AM \cdot BN = MC \cdot ND$，$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$.

证法3　如图39.2所示，不妨设 BA 和 CD 交于点 Q，AC 与 BD 交于点 G. E，F 分别为 AB 与 CD 的中点，H 为 EG 的延长线与 CD 的交点.

若 A,B,C,D 四点共圆，由条件 GE 为 $\mathrm{Rt}\triangle AGB$ 的斜边上的中线，可知

$$\angle HGC = \angle AGE = \angle GAE = \angle BDC$$

从而　$$\angle HGC + \angle HCG = \angle GDC + \angle DCG = 90^\circ$$

故 $EH\perp CD$.所以 $EG\parallel PF$.同理可证 $GF\parallel PE$.于是四边形 $PFGE$ 为平行四边形. 此时,$PF=EG=\frac{1}{2}AB$,$PE=GF=\frac{1}{2}CD$.这表明

$$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot PE=\frac{1}{4}AB\cdot CD=\frac{1}{2}PF\cdot CD=S_{\triangle CDP}$$

必要性得证.

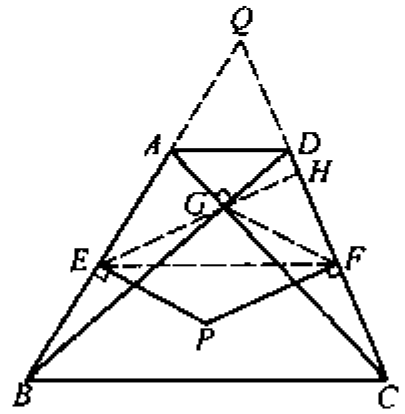


图 39.2

若 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CDP}$,则有

$$\frac{EG}{GF}=\frac{AB}{CD}=\frac{PF}{EP}$$

而在 $\triangle GEF$ 与 $\triangle PFE$ 中,有

$$\angle EGF=\angle EGB+\angle BGC+\angle FGC=90^\circ+\angle QBD+\angle QCA=$$
$$90^\circ+(\angle GDC-\angle Q)+\angle GCD=$$
$$180^\circ-\angle Q=\angle EPF$$

从而 $\triangle GEF\backsim\triangle PFE$,而 $EF=EF$,故 $\triangle GEF\cong\triangle PFE$.由此易证四边形 $PFGE$ 为平行四边形.于是 $EH\perp CD$,这表明

$$\angle CDB=90^\circ-\angle DGH=90^\circ-\angle EGB=90^\circ-\angle ABG=\angle BAC$$

所以 A,B,C,D 四点共圆.充分性获证.

❷ 在某项竞赛中,共有 a 个参赛选手与 b 个裁判,其中 $b\geqslant 3$ 且为奇数.每个裁判对每个选手的评分只有“通过”或“不及格”两个等级.设 k 是满足以下条件的整数:任何两个裁判至多可对 k 个选手有完全相同的评分.

证明:$\frac{k}{a}\geqslant\frac{b-1}{2b}$.

印度命题

证法1 首先,如果两个裁判对某个参赛者有相同的评判,我们就称其为一个“同意”.由已知,任意两个裁判最多对 k 个参赛者有相同的评判,即任两个裁判最多产生 k 个“同意”(设“同意”的点数为 n).从而

$$n\leqslant kC_b^2 \quad ①$$

另一方面,对任意一个参赛者,设有 A 个裁判判他通过,而 B 个裁判判他不及格,其中 $A+B=b$.则对于这个参赛者,有关他的“同意”个数为

$$C_A^2+C_B^2=\frac{A^2+B^2-(A+B)}{2}=$$
$$\frac{(A+B)^2+(A-B)^2-2(A+B)}{4}=$$

$$\frac{b^2-2b+(A-B)^2}{4}$$

由于 b 是一个奇数，故 $A-B$ 也应是一个奇数．从而

$$C_A^2+C_B^2 \geqslant \frac{b^2-2b+1}{4}=\left(\frac{b-1}{2}\right)^2$$

这样

$$n \geqslant a\left(\frac{b-1}{2}\right)^2 \quad ②$$

由 ①，② 可知

$$a\left(\frac{b-1}{2}\right)^2 \leqslant kC_b^2 \Rightarrow \frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$$

证法 2　构造一个 $a \times b$ 的矩阵(A_{ij})，其中 $A_{ij}(1 \leqslant i \leqslant a,1 \leqslant j \leqslant b)$ 定义如下

此证法属于田廷彦

$$A_{ij}=\begin{cases}1,\text{若第 } j \text{ 个裁判对第 } i \text{ 个参赛者判为“通过”}\\-1,\text{若第 } j \text{ 个裁判对第 } i \text{ 个参赛者判为“不及格”}\end{cases}$$

易知，第 j 个和第 n 个裁判对第 i 个参赛者判定相同时，有 $A_{ij}A_{in}=1$，判定不相同时，$A_{ij}A_{in}=-1$.

设 k_{jn} 表示第 j 个和第 n 个裁判对所有参赛者判定相同的人数，则

$$a=2k_{jn}-\sum_{i=1}^{a}A_{ij}A_{in}$$

而对任意 $1 \leqslant j<n \leqslant b$，有 $k_{jn} \leqslant k$，于是

$$\sum_{1 \leqslant j<n \leqslant b} a \leqslant \sum_{1 \leqslant j<n \leqslant b}\left(2k-\sum_{i=1}^{a}A_{ij}A_{in}\right) \quad ③$$

注意到

$$\sum_{1 \leqslant j<n \leqslant b}\sum_{i=1}^{a}A_{ij}A_{in}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{1 \leqslant j<n \leqslant b}A_{ij}A_{in}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\left(\left(\sum_{m=1}^{b}A_{im}\right)^2-\sum_{m=1}^{b}A_{im}^2\right)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\left(\left(\sum_{m=1}^{b}A_{im}\right)^2-b\right) \quad ④$$

由于 b 为奇数，从而 $\sum_{m=1}^{b}A_{im} \neq 0$，于是式 ④ 右边大于等于

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}(1-b)=\frac{1}{2}a(1-b)$$

结合式 ③ 有　　$aC_b^2 \leqslant 2kC_b^2-\frac{1}{2}a(1-b)$

由此可得　　$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$

白俄罗斯命题

3 对任一正整数 n,令 $d(n)$ 表示 n 的正因数(包括 1 及 n 本身)的个数.试确定所有可能的正整数 k,使得有一个正整数 n 满足$\frac{d(n^2)}{d(n)}=k$.

解法 1 首先,如果 k 是一个可能的正整数,即存在 $n\in\mathbf{N}$,使得

$$\frac{d(n^2)}{d(n)}=k$$

可设 n 的素数分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,则有

$$d(n)=\prod_{i=1}^{s}(\alpha_i+1)$$

而

$$d(n^2)=\prod_{i=1}^{s}(2\alpha_i+1)$$

从而

$$\prod_{i=1}^{s}(2\alpha_i+1)=k\prod_{i=1}^{s}(\alpha_i+1)$$

由于左边是奇数,故 k 也应是奇数.

下面证明,所有的奇数都是可能的.

(1) 首先,如果一个数可以表示成$\prod_{i=1}^{s}\frac{(2\alpha_i+1)}{(\alpha_i+1)}$的形式(其中 α_i 都是非负整数,$i=1,2,\cdots,s$),那么,由于素数是无限多的,可取 s 个互异素数$p_1,p_2,\cdots,p_s$,并取 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$.则有$\frac{d(n^2)}{d(n)}$等于这个数.从而这个数是可能的.

(2) 类似地,也可知,若自然数 k 是可能的,如果$\prod_{i=1}^{s}\frac{(2\alpha_i+1)}{(\alpha_i+1)}$,$k\in\mathbf{N}$,那么这个数也是可能的.

下面用归纳法证明上面提出的那个命题.

由于$\frac{d(1^2)}{d(1)}=1$,故 1 是可能的.假设对小于等于 $2k-1$ 命题成立.则对于 $2k+1(k\in\mathbf{N})$,设 $2k+2=2^m t$(m 是自然数,t 是奇数).取

$$p=2t(2^{m-1}-1),q=t(2^{m-1}p+1)-1$$

则

$$t\left(\frac{2p+1}{p+1}\right)\left(\frac{4p+1}{2p+1}\right)\cdots\left(\frac{2^{m-1}p+1}{2^{m-2}p+1}\right)\left(\frac{2q+1}{q+1}\right)=$$

$$t\cdot\frac{(2^{m-1}p+1)}{p+1}\cdot\frac{2t(2^{m-1}p+1)-1}{t(2^{m-1}p+1)}=$$

$$\frac{2t(2^{m-1}p+1)-1}{p+1}=2^m t-\frac{2t(2^{m-1}-1)+1}{p+1}=$$

$$2^m t - 1 = 2k + 1$$

由于 t 是小于 $2k+1$ 的奇数，故 t 是可能的. 由上面的式子可知 $2k+1$ 也是可能的. 从而，所有的正奇数都是可能的.

综合以上两个方面知，所有可能的数即为所有的正奇数.

解法 2 记 $n = p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}$，其中 $1 < p_1 < \cdots < p_t$ 为素数，由函数 $d(n)$ 的定义可知

此解法属于许以超

$$d(n) = (e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_n+1)$$
$$d(n^2) = (2e_1+1)(2e_2+1)\cdots(2e_n+1)$$

于是 $d(1) = d(1^2) = 1$，因此 $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$. 设 $n > 1$，有

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{(2e_1+1)(2e_2+1)\cdots(2e_t+1)}{(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_t+1)} = k$$

注意到分子为奇数. 所以若对自然数 k，存在自然数 n，则 k 必须为奇数，且每个 e_i 必须为偶数.

我们来证明任取奇数 k，则必存在自然数 n 有 $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$. 为此对 k 作归纳法，当 $k = 1$，取 $n = 1$ 即可. 设对小于 k 的奇数 k_0，都有自然数 n_0，$\frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = k_0$. 今任取奇数 k，$k \geq k_0$ 则有

$$k = 2^e k_0 - 1, e \in \mathbf{N}$$

由 $d(n)$ 的定义可知：如果 $n = n'n''$，n' 和 n'' 互素，则

$$d(n) = d(n')d(n'')$$

今构造

$$e_1 = (2^e - 1)k_0 - 1, e_i = 2^{i-1}e_1, i = 1,2,\cdots,e$$

取素数 $p_1,\cdots,p_e$ 和 k_0 互素. 由此可构造数 n，即

$$n = p_1^{e_1}\cdots p_e^{e_e}n_0$$

则
$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{d(p_1^{2e_1}\cdots p_e^{2e_e})d(n_0^2)}{d(p_1^{e_1}\cdots p_e^{e_e})d(n_0)} = \frac{(2e_1+1)\cdots(2e_e+1)}{(e_1+1)\cdots(e_e+1)}k_0 =$$
$$\frac{(2e_1+1)(2^2e_1+1)\cdots(2^e e_1+1)}{(e_1+1)(2e_1+1)\cdots(2^{e-1}e_1+1)}k_0 = \frac{2^e e_1+1}{e_1+1}k_0$$

由于
$$e_1 = (2^e - 1)k_0 - 1$$

所以
$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2^e e_1 + 1}{e_1+1} = \frac{2^e(2^e-1)k_0 - 2^e + 1}{((2^e-1)k_0 - 1) + 1} =$$
$$\frac{(2^e-1)(2^e k_0 - 1)}{(2^e-1)k_0} = 2^e k_0 - 1 = k$$

由归纳法便证明了命题. 结论为 k 为任意奇数.

此解法属于田廷彦

解法 3 显然，$n=1$ 时，$\frac{d(n^2)}{d(n)}=1$，故 k 可以取 1.

若 $n>1$，设 n 的质因数分解为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，则

$$\frac{d(n^2)}{d(n)}=\frac{(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_s+1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)}=\frac{(2\beta_1-1)(2\beta_2-1)\cdots(2\beta_s-1)}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}$$

其中 $$\beta_i=\alpha_i+1,1\leqslant i\leqslant s$$

命题转化为求所有可以表示为如下形式的正整数 k，即

$$k=\frac{(2\beta_1-1)(2\beta_2-1)\cdots(2\beta_s-1)}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}\qquad ③$$

其中，s 为自然数，β_i 为大于 1 的自然数. 为方便起见，我们称具有形式 ③ 的自然数 k 为"可表示的". 显然，如果 k_1 和 k_2 都是可表示的，则 $k_1\cdot k_2$ 也是可表示的. 并且，基于 ③ 的分子均为奇数，所以，β_i 均为大于 1 的奇数，且 k 必须为奇数.

下面用数学归纳法证明：所有的正奇数均是可以表示的.

注意到，$3=\frac{9}{5}\times\frac{5}{3}$，所以 3 是可表示的.

由于每个正奇数均可惟一地表示为 $2^{n+1}m+2^n-1$ 的形式，其中，n 为自然数，$m\geqslant 0$ 为整数（这一点只须将奇数表示为二进制，再将从右至左连续出现的所有的 1 合为 2^n-1 即可）. 我们假设所有小于 $2^{n+1}m+2^n-1$ 的奇数均为可表示的，下证 $2^{n+1}\cdot m+2^n-1$ 也是可表示的.

事实上，如果令

$$\beta_1=(2^n-1)(2m+1),\beta_{i+1}=2\beta_i-1,1\leqslant i\leqslant n-1$$

则 $$\beta_n-1=2^{n-1}(\beta_1-1),2\beta_n-1=(2^n-1)(2^{n+1}m+2^n-1)$$

于是 $$A=\frac{(2\beta_1-1)}{\beta_1}\cdot\frac{(2\beta_2-1)}{\beta_2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2\beta_n-1)}{\beta_n}=\frac{2\beta_n-1}{\beta_1}=\frac{2^{n+1}m+2^n-1}{2m+1}$$

注意到，当 $2^{n+1}m+2^n-1>1$ 时，有 $\beta_1>1$. 上式中，若 $m=0$，则表明 $2^{n+1}m+2^n-1$ 是可表示的，否则，由归纳假设 $2m+1$ 是可表示的，设 $2m+1$ 具有表示 B，则 AB 即为 $2^{n+1}m+2^n-1$ 的表示.

综上所述，满足条件的 k 为一切正奇数.

英国命题

4 试确定使 ab^2+b+7 整除 a^2b+a+b 的全部正整数对 (a,b).

解法 1 若正整数对 (a,b) 满足 $ab^2+b+7\mid a^2b+a+b$，

则

$$ab^2+b+7\mid a(ab^2+b+7)-b(a^2b+a+b)=7a-b^2$$

ⅰ 当 $7a-b^2=0$ 时,有 $7\mid b$,设 $b=7k(k\in\mathbf{N}^+)$.代入得 $a=7k^2$.此时有

$$a^2b+a+b=k(ab^2+b+7)$$

故 $(7k^2,7k)$ 是解.

ⅱ 当 $7a-b^2<0$ 时,有

$$b^2-7a>0\Rightarrow b^2-7a\geqslant ab^2+b+7$$

但这是不可能的.

ⅲ 当 $7a-b^2>0$ 时,有

$$7a-b^2\geqslant ab^2+b+7\Rightarrow 7a>ab^2\Rightarrow b=1\text{ 或 }2$$

若 $b=1$.则

$$a+8\mid a^2+a+1$$

而
$$\begin{aligned}a^2+a+1&\equiv(-8)^2+(-8)+1(\mathrm{mod}(a+8))\equiv\\&57(\mathrm{mod}(a+8))\Rightarrow\\&a+8=19\text{ 或 }57\Rightarrow a=11\text{ 或 }49\end{aligned}$$

此时又得两组解

$$\begin{cases}a=11\\b=1\end{cases},\begin{cases}a=49\\b=1\end{cases}$$

若 $b=2$.由

$$ab^2+b+7\mid 7a-b^2\Rightarrow 4a+9\mid 7a-4$$
$$2(4a+9)>7a-4$$

故只能
$$4a+9=7a-4$$

但这也不可能.

综合 ⅰ,ⅱ,ⅲ 知,所有解为

$$(11,1),(49,1),(7k^2,7k),k\in\mathbf{N}^+$$

解法2 将 a,b 用 x,y 表示,现有

此解法属于许以超

$$y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7)=y^2-7x$$

若
$$xy^2+y+7\mid x^2y+x+y$$

则
$$xy^2+y+7\mid y^2-7x$$

注意到 x,y 为正整数,下面分三种情形讨论.

ⅰ $y^2>7x$.此时必须

$$y^2-7x\geqslant xy^2+y+7$$

即
$$(x-1)y^2+7x+y+7\leqslant 0$$

由于 x,y 为正整数,这时无解.

ⅱ $y^2=7x$.于是 $7\mid y$,记 $y=7z$,代入得 $x=7z^2$,因此

$$xy^2+y+7=7^3z^4+7z+7=7(7^2z^4+z+1)$$

$$x^2y+x+y=7^3z^5+7z^2+7z=7z(7^2z^4+z+1)$$

这证明了解为

$$(x,y)=(7z^2,7z),z=1,2,\cdots$$

ⅲ $y^2<7x$. 此时必须

$$7x-y^2\geqslant xy^2+y+7$$

即
$$7x\geqslant(x+1)y^2+y+7$$

当 $y\geqslant 3$ 又推出矛盾,所以只有 $y=1,2$.

设 $y=1$,则 $x+8\mid 7x-1$,而

$$7x-1=7(x+8)-57$$

所以 $x+8\mid 57$. 由

$$57=1\times 57=3\times 19,x+8\geqslant 8$$

可知 $x+8=57$ 或 $x+8=19$,即 $x=49$ 或 $x=11$,将 $(x,y)=(49,1),(11,1)$ 分别代入原式可证它们都是解.

设 $y=2$,则 $4x+9\mid 7x-4$. 由 $4(7x-4)=7(4x+9)-79$,所以必须 $(4x+9)\mid 79$. 但是 79 为素数,又 $4x+9\geqslant 9$,所以只有 $4x+9=79$. 这时正整数解 x 不存在,所以当 $y=2$ 时无解.

至此给出解为

$$(x,y)=(11,1),(49,1),(7z^2,7z),z=1,2,\cdots$$

解法 3 由条件,显然

此解法属于田廷彦

$$ab^2+b+7\mid a^2b^2+ab+b^2$$

而
$$a^2b^2+ab+b^2=a(ab^2+b+7)+b^2-7a$$

故
$$ab^2+b+7\mid b^2-7a$$

下面分三种情形讨论.

ⅰ $b^2-7a>0$. 此时

$$b^2-7a<b^2<ab^2+b+7$$

矛盾.

ⅱ $b^2=7a$. 此时 a,b 应具有 $a=7k^2,b=7k,k\in\mathbf{N}^+$ 的形式. 显然 $(a,b)=(7k^2,7k)$ 满足条件.

ⅲ $b^2-7a<0$. 此时由

$$7a-b^2\geqslant ab^2+b+7$$

可知 $b^2<7$,进而 $b=1$ 或 2. 当 $b=1$ 时,由条件

$$\frac{a^2+a+1}{a+8}=a-7+\frac{57}{a+8}$$

为自然数,可知 $a=11$ 或 49. 得解 $(a,b)=(11,1)$ 或 $(49,1)$;当 $b=2$ 时,由 $\frac{7a-4}{4a+9}(<2)$ 为正整数,可知 $\frac{7a-4}{4a+9}=1$,此时 $a=\frac{13}{3}$,矛盾.

综上,所有解为

$$(a,b)=(11,1),(49,1),(7k^2,7k),k\in\mathbf{N}^+$$

5 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,并设 $\triangle ABC$ 的内切圆与三边 BC,CA,AB 分别相切于点 K,L,M.过点 B 平行于 MK 的直线分别交直线 LM 及 LK 于点 R 和 S.证明:$\angle RIS$ 是锐角.

乌克兰命题

证法1 由 $RS /\!/ MK$,有

$$\angle MBR=\angle KMB,\angle KBS=\angle MKB$$

而 BM 与 BK 是两条切线,则

$$BM=BK,\angle KMB=\angle MKB$$

所以

$$\angle MBR=\angle KBS$$

连结 IB,如图39.3所示,则 $IB\perp RS$.熟知

$$\angle LMK=90^\circ-\frac{\angle C}{2}=\angle CKL=\angle BKS$$

所以

$$\angle BRM=\angle LMK=\angle BKS$$

从而

$$\triangle BMR\backsim\triangle BSK\Rightarrow\frac{BR}{BM}=\frac{BK}{BS}$$

故

$$BM\cdot BK=BR\cdot BS$$

即(r 为内切圆半径)

$$BR\cdot BS=BM^2=IB^2-r^2<IB^2\Rightarrow\angle RIS\text{ 是锐角}$$

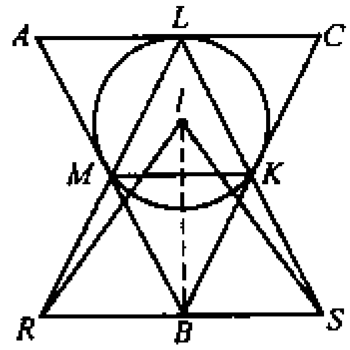


图39.3

证法2 为了证 $\angle RIS$ 是锐角.由余弦定理,只要证

$$RI^2+SI^2-RS^2=2RI\cdot SI\cdot\cos\angle RIS>0$$

为此我们来计算 $RI^2+SI^2-RS^2$.

此证法属于许以超

现有 $MK /\!/ RS$,考虑 $\triangle BMR$ 及 $\triangle BSK$.于是

$$\angle MRB=\angle LMK=\frac{1}{2}(\pi-\angle C)$$

同理

$$\angle RMB=\angle AML=\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$$

而

$$\angle MBR=\pi-\angle MRB-\angle RMB=\frac{1}{2}(\angle C+\angle A)=\frac{1}{2}(\pi-\angle B)$$

同理

$$\angle KSB=\angle LKM=\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$$

$$\angle SKB=\angle LKC=\frac{1}{2}(\pi-\angle C)$$

$$\angle KBS=\frac{1}{2}(\pi-\angle B)$$

由正弦定理,有

$$\frac{BR}{\sin\angle RMB}=\frac{BM}{\sin\angle MRB},\frac{BK}{\sin\angle KSB}=\frac{BS}{\sin\angle BKS}$$

因此
$$\frac{BR}{BM}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{BK}{BS}$$

令 $BI\perp MK$,所以 $BI\perp RS$.又 $MI\perp AB$,所以考虑直角三角形 $\triangle IRB,\triangle ISB,\triangle BIM$ 有

$$IR^2+IS^2-RS^2=(IB^2+RB^2)+(BI^2+BS^2)-(BR+BS)^2=2BI^2-2BR\cdot BS$$

注意到 $BK=BM$,因此 $BR\cdot BS=BM^2$.所以

$$IR^2+IS^2-RS^2=2(BI^2-BM^2)=2IM^2>0$$

所以证明了命题.

证法 3　如图 39.4 所示,连结 BI,MI,KI.

在 $\triangle BKS$ 与 $\triangle MLK$ 中,$\angle LKM=\angle KSB,\angle BKS=\angle LKC=\angle IMK$.于是有 $\triangle BKS\backsim\triangle MLK$,从而 $\frac{BS}{BK}=\frac{LK}{LM}$.

同理可证,$\frac{BR}{BM}=\frac{LM}{LK}$.可知

$$BR\cdot BS=BM\cdot BK$$

又显然 $BI\perp MK,BM=BK$,于是

$$BM\cdot BK=BM^2<BI^2$$

即
$$BR\cdot BS<BI^2$$

这表明,在 BI 内存在点 P,使得

$$BR\cdot BS=BP^2$$

在 $\triangle RPS$ 中,应用射影定理的逆定理,可知 $\angle RPS=90°$,于是点 I 在以 RS 为直径的圆外,从而 $\angle RIS<90°$.

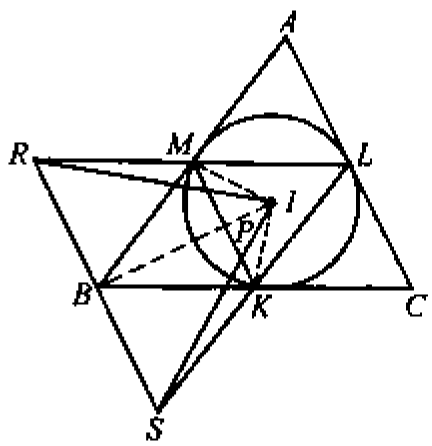


图 39.4

6 设 $\mathbf{N}^+$ 是全部正整数的集合,f 是从 $\mathbf{N}^+$ 映射到本身的函数,且对于 $\mathbf{N}^+$ 中的任何 s 与 t,皆满足 $f(t^2f(s))=s(f(t))^2$.试在所有的函数 f 中,确定 $f(1\ 998)$ 可能达到的最小值.

保加利亚命题

解法 1　对每一个满足题目条件的确定的函数 f.由已知

$$f(t^2f(s))=s(f(t))^2 \qquad ①$$

令 $t=1$,代入得

$$f(f(s))=s(f(1))^2 \qquad ②$$

再令 $s=1$,代入 ① 得

$$f(t^2f(1))=(f(t))^2 \qquad ③$$

现设 $f(1)=k$,则 ②,③ 两式可化为

$$f(f(s))=k^2s \qquad ④$$

$$f(kt^2)=(f(t))^2 \quad ⑤$$

令 $s=1$ 代入 ④,得

$$f(k)=k^2$$

再令 $s=f(k)$ 代入 ①,得

$$f(t^2k^3)=k^2(f(t))^2$$

另一方面,由式 ⑤,得

$$f(t^2k^3)=f(k(kt)^2)=(f(kt))^2$$

比较两式得

$$(f(kt))^2=k^2(f(t))^2\Rightarrow f(kt)=kf(t) \quad ⑥$$

将 ⑥ 代入 ⑤ 得

$$kf(t^2)=(f(t))^2$$

类似有

$$kf(t^4)=(f(t^2))^2$$

$$\vdots$$

$$kf(t^{2^m})=(f(t^{2^{m-1}}))^2$$

将这列式子的第一个平方并与第二个比较得

$$k^3f(t^4)=(f(t))^4$$

再平方并与第三式比较得

$$k^7f(t^8)=(f(t))^8$$

依此类推,最后可得

$$(f(t))^{2^m}=k^{2^m-1}f(t^{2^m}) \quad ⑦$$

其中,m 是任一个正整数.

则 k 的任一个素因子 p,有 $p^\alpha \parallel k$,及 $p^\beta \parallel f(t)$.

由 ⑦ 得

$$\beta\cdot 2^m\geqslant \alpha(2^m-1)$$

即

$$\frac{\beta}{\alpha}\geqslant\frac{2^m-1}{2^m}$$

两边取极限得

$$\frac{\beta}{\alpha}\geqslant\lim_{m\to\infty}\frac{2^m-1}{2^m}=1\Rightarrow\beta\geqslant\alpha$$

由此及 p 的任意性可知 $k\mid f(t)$.

下设 $g(t)=\frac{f(t)}{k}$.则 $g(t)$ 也是 $\mathbf{N}^+\to\mathbf{N}^+$ 的函数.

由 ⑥ 得

$$f(t^2f(s))=f(t^2kg(s))=kf(t^2g(s))=k^2g(t^2g(s))$$

及

$$s(f(t))^2=k^2s(g(t))^2$$

再由 ① 即得

$$g(t^2g(s))=s(g(t))^2 \quad ⑧$$

这表明 g 也是一个满足题目条件的函数,且 $g(1)=1$.从而,前面所得的关于 f 的结果对 g 都适用,且将其中的 k 换为 1.于是,

由④,⑤得

$$g(g(s)) = s \quad ⑨$$

$$g(t^2) = (g(t))^2 \quad ⑩$$

在⑧中用 $g(s)$ 代 s 可得

$$g(t^2 s) = g(s)(g(t))^2 \quad ⑪$$

应用⑩与⑪得

$$(g(ab))^2 = g(a^2b^2) = g(a^2)(g(b))^2 = (g(a)g(b))^2 \Rightarrow$$

$$g(ab) = g(a)g(b) \quad ⑫$$

由⑨可看出 g 是单射,故对所有 $a > 1$ 都有 $g(a) > 1$.再由⑫即知合数对应的函数值仍是合数，从而对素数 p，由 $g(g(p)) = p \Rightarrow g(p)$ 是素数.

这样可知

$$f(1\,998) = kg(1\,998) = kg(2)g(3)^3g(37) \geqslant$$
$$(2^3 \cdot 3 \cdot 5)k = 120k \geqslant 120$$

另一方面,作一个函数 f 如

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 2 \\ f(5) = 37 \\ f(37) = 5 \\ f(p) = p(p\text{ 是其余的素数}) \\ f(n) = f(p_1)^{\alpha_1}f(p_2)^{\alpha_2}\cdots f(p_k)^{\alpha_k} \\ n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}\text{ 是合数 } n \text{ 的素数分解式} \end{cases}$$

容易验证它满足题目条件,且 $f(1\,998) = 120$.从而,$f(1\,998)$ 最小值确是 120.

解法 2 取 $t = 1$,记 $a = f(1) \in \mathbf{N}^+$.有

$$f(f(s)) = a^2 s$$

取 $s = 1$ 有 $\qquad f(at^2) = (f(t))^2$

于是 $\quad (f(s)f(t))^2 = (f(s))^2(f(t))^2 = (f(s))^2 f(at^2) =$

$$f(s^2 f(f(at^2))) = f(s^2a^2(at)^2) =$$
$$f(a(ast)^2) = (f(ast))^2$$

注意到函数值都是正整数,因此有

$$f(s)f(t) = f(ast)$$

取 $t = 1$ 有 $\qquad af(s) = f(as)$

所以 $\qquad f(s)f(t) = f(ast) = af(st)$

下面证明对任意自然数 s,有 $a \mid f(s)$.事实上,我们先用归纳法来证明

$$(f(s))^n = a^{n-1}f(s^n), n = 1,2,\cdots$$

显然,当 $n = 1$,上式成立.设 n 时成立,有

$$(f(s))^{n+1} = f(s)(f(s))^n = a^{n-1}f(s)f(s^n) = a^{n-1}af(ss^n)$$

由归纳法便证明了断言.

今任取正整数 a 的素因子 p,设 $p^e \parallel f(s)$,符号"$\parallel$"表示 $p^e \mid f(s)$,$p^{e+1} \nmid f(s)$.记 $p^f \parallel a$.由 $a^{n-1} \mid (f(s))^n$ 有 $ne \geqslant (n-1)f$.所以

$$e \geqslant f - \frac{f}{n}, n = 1,2,\cdots$$

当 n 充分大时,$\frac{f}{n}$ 充分小.注意到 e,f 为正整数.所以证明了 $e \geqslant f$,记 $a \mid f(s)$.

记 $g(s) = a^{-1}f(s)$.则有下列 6 个结论.

(1) $g(1) = a^{-1}f(1) = 1$.

(2) $g(s)g(t) = a^{-2}f(s)f(t) = a^{-1}f(st) = g(st)$.

(3) $g(as) = a^{-1}f(as) = a^{-1}af(s) = f(s) = ag(s)$.

(4) $g(g(s)) = s$.

事实上,已知 $f(f(s)) = a^2s$,所以 $ag(ag(s)) = a^2s$,由 $g(at) = ag(t)$ 有 $a^2g(g(s)) = a^2s$.这证明了断言.

(5) 当 p 为素数,则 $g(p)$ 也为素数.

事实上,设若 $g(p) = uv$,则 $g(uv) = g(g(p)) = p$,即 $g(u)g(v) = p$.由 p 为素数,所以 $g(u) = 1, g(v) = p$ 或 $g(u) = p, g(v) = 1$.

今若 $g(w) = 1$,则 $g(g(w)) = g(1) = 1$,所以 $w = 1$.至此证明了若 $g(p) = uv$,则 $u = 1$ 或 $v = 1$.即 $g(p)$ 为素数.

(6) 最后证 g 为一一映射.

事实上,由 $g(g(s)) = s$,若 $s \neq t, g(s) = g(t)$,则 $g(g(s)) = g(g(t))$,即 $s = t$.这导出矛盾.所以 g 一一映射.

至此我们知道函数 $g(n)$ 解很多,取出所有素数,任意确定素数对并排成

$$p_1, q_1, p_2, q_2, \cdots$$

则构作 g 如下,即

$$g(p_i) = q_i, g(q_i) = p_i, i = 1,2,\cdots$$

则由任一自然数 n 的惟一素因数分解式

$$n = r_1^{e_1}r_2^{e_2}\cdots r_s^{e_s}$$

其中,$r_1, r_2, \cdots, r_s$ 为不同素数,则

$$g(n) = g(r_1)^{e_1}g(r_2)^{e_2}\cdots g(r_s)^{e_s}$$

所以给出了通解.

今 $1\,998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$.为了使得 $f(1\,998)$ 取所有可能的函数 f

中值最小. 自然的,我们取 $a=1$, $g(2)=3$, $g(3)=2$, $g(37)=5$. 于是

$$f(1\,998)=g(1\,998)=g(2)g(3)^3g(37)=3\cdot 2^3\cdot 5=120$$

即所求值为 120.

解法 3 首先,我们证明条件

此证法属于田廷彦

$$f(t^2f(s))=s(f(t))^2$$

等价于如下两个条件,即

$$\begin{cases}f(f(s))=s(f(1))^2 & ⑬\\ f(st)=\dfrac{f(s)f(t)}{f(1)} & ⑭\end{cases}$$

事实上,由条件 ⑬,⑭ 得出 ① 是显然的;另一方面,在 ① 中,令 $t=1$,就有 $f(f(s))=s(f(1))^2$,为证由 ① 可推出 ⑭,我们在 ① 中,用 $f(s)$ 代 s,并结合 ⑬,就有

$$f(t^2s(f(1))^2)=f(t^2f(f(s)))=f(s)(f(t))^2 \quad ⑮$$

于是 $f(t^2)(f(1))^2=f(t^2(f(1))^2)=$

$$f(t^2\cdot 1\cdot(f(1))^2)=f(1)(f(t))^2$$

亦即有

$$f(t^2)=\frac{(f(t))^2}{f(1)} \quad ⑯$$

当然

$$f(s^2t^2)=\frac{(f(st))^2}{(f(1))^2}$$

并且由 ⑮ 有

$$f(s^2t^2)(f(1))^2=f(s^2t^2(f(1))^2)=f(t^2)(f(s))^2=\frac{(f(t))^2}{f(1)}(f(s))^2$$

结合这两个式子,就有 ⑭ 成立.

其次,我们证明对任意 $t\in\mathbf{N}^*$,有 $f(1)\mid f(t)$.

事实上,由 ⑭,⑯ 结合归纳法可知

$$f(t^n)=\left(\frac{f(t)}{f(1)}\right)^{n-1}f(t)$$

对任意自然数 n 成立. 若 $f(1)\nmid f(t)$,则存在 $f(1)$ 的质因子 p 及自然数 m,使得 $p^m\mid f(1)$,但 $p^m\nmid f(t)$,从而当 $n>m$ 时,将有 $p^{m(n-1)}\nmid(f(t))^n$,这导致 $f(t^n)\notin\mathbf{N}^*$. 矛盾.

如果设 $f(t)=k_tf(1)$,进一步,还可证明,当 $s\neq t$ 时,$k_s\neq k_t$(事实上,若 $k_s=k_t$,则 $s(f(1))^2=f(f(s))=f(f(t))=t(f(1))^2$,从而 $s=t$). 特别地,$s>1$ 时 $k_s>1$.

最后,我们来求 $f(1\,998)$ 的最小值.

由于

$$f(1\,998)=f(2\cdot 3^3\cdot 37)=\frac{f(2)(f(3))^3f(37)}{(f(1))^4}=k_2k_3^3k_{37}f(1)$$

由前所述,k_2,k_3,k_{37} 都大于 1,且两两不同,我们证明

$$f(1\,998) \geqslant 1 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

事实上，只须说明 $f(1\,998) \neq 1 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 4$，这是因为若 $f(1\,998) = 1 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 4$，则 $f(3) = 2, f(1) = 1$，这时，$f(9) = \frac{(f(3))^2}{f(1)} = 4$，于是 k_2 与 k_{37} 均不能等于4.

下面构造 $f: \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}^+$，使得 $f(1\,998) = 120$，从而说明了 $f(1\,998)$ 的最小值为120. 我们构造的函数如下：$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(5) = 37, f(37) = 5, f(p) = p$，其中，$p$ 为不同于2，3，5，37的素数，且对任意正整数 $s, t, f(st) = f(s)f(t)$. 则显然此 f 满足 ⑬ 和 ⑭，从而满足题设条件.

此推广属于肖果能、袁平之

推广 这是一道极值问题，极值的确定依赖于函数 f 的选取，而 f 由函数方程

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2 \tag{①}$$

约束. 因此解决问题的关键在于刻画函数方程 ① 的解的结构(这种刻画实际上给出了 ① 的通解). 而为了求得通解，应该研究解的性质.

一、方程 ① 的解的性质

设 f 是函数方程 ① 的一个解.

(1) 设

$$f^{(1)}(x) = f(x), f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)), n > 1$$

则

$$f^{(n)}(1) = (f(1))^n$$

证明 依定义已有

$$f^{(1)}(1) = f(1)$$

设 $k < n$，已有

$$f^{(k)}(1) = (f(1))^k$$

则在 ① 中取 $t = 1, s = f^{(n-1)}(1)$，可得

$$f^{(n)}(1) = f(f^{(n-1)}(1)) = f(f(f^{(n-2)}(1))) = f^{(n-2)}(1) \cdot (f(1))^2 = (f(1))^{n-2}(f(1))^2 = (f(1))^n$$

(2) $f(f(s)) = (f(1))^2 s (s \in \mathbf{N}^+)$.

证明 在 ① 中取 $t = 1$ 即得.

(3) 当且仅当1有原像时，f 是 $\mathbf{N}^+$ 到 $\mathbf{N}^+$ 的一一对应，此时必有 $f(1) = 1$ 且 $f^{-1} = f$.

证明 如果存在 k 使 $f(k) = 1$，则 $f(f(k)) = f(1)$. 由(2)得 $k(f(1))^2 = f(1)$，故有 $k = 1, f(1) = 1$，而(2)成为

$$f(f(s)) = s$$

于是 f 是 $\mathbf{N}^+$ 到 $\mathbf{N}^+$ 的一一对应且逆映射 $f^{-1} = f$. 充分性得证. 必要性明显.

(4) $f(ab)f(1) = f(a)f(b)(a, b \in \mathbf{N})$.

证明 在①中取 $s=1, t=a$，得

$$f(a^2f(1))=(f(a))^2 \quad ②$$

于是由(2)有

$$f((f(a))^2)=f(f(a^2f(1)))=(f(1))^2a^2f(1)=a^2(f(1))^3 \quad ③$$

因此

$$f(a^2b^2(f(1))^3)=f((ab)^2f(f(f(1))))=f(f(1))(f(ab))^2=(f(1))^2(f(ab))^2 \quad ④$$

$$f(a^2b^2(f(1))^3)=f(a^2f((f(b))^2))=(f(b))^2(f(a))^2 \quad ⑤$$

比较④,⑤,即得(4).

(5) $f(1) \mid f(s)(s\in \mathbf{N}^+)$.

证明 若 $f(1)=1$，则(5)显然成立.

设 $f(1)>1$，p 是 $f(1)$ 的一个质因数，且

$$p^a \parallel f(1), a\in \mathbf{N}^+ \quad ⑥$$

($p^a \parallel M$ 表示 $p^a \mid M$ 而 $p^{a+1}\nmid M$). 记

$$b=\min\{k \mid p^k \mid f(s)，对所有 s\in \mathbf{N}^+\}$$

设 s 为适合 $p^b \parallel f(s)$ 的某个正整数. 由 b 的定义显然有 $p^b \mid f(s^2)$. 又由(4)，对任意 $s\in \mathbf{N}^+$，均有

$$f(s^2)f(1)=(f(s))^2 \quad ⑦$$

因此 $p^{a+b}\mid f(s^2)f(1)$，即 $p^{a+b}\mid (f(s))^2$，但 $p^{2b}\parallel (f(s))^2$，故 $2b\geqslant a+b$，从而 $b\geqslant a$，于是得 $p^a\mid f(s)$，由此可知(5)亦成立.

(6) 若 $f(s)=f(1)t$，则 $f(t)=f(1)s$.

证明 由 $f(s)=f(1)t$ 及(5)，可知 t 为自然数. 由(1)，(2)，(4)得

$$f(f(s))=s(f(1))^2$$

$$f(f(s))=f(f(1)t)=\frac{1}{f(1)}f(f(1))f(t)=f(1)f(t)$$

两式相比较，即得 $f(t)=f(1)s$.

(7) 若 p 为素数且 $f(p)=qf(1)$，则 q 为素数.

证明 设 $q=q_1q_2$，由(6)，(4)，有

$$f(q)=f(1)p$$

$$f(q)=f(q_1q_2)=f(q_1)f(q_2)/f(1)$$

故 $p=\frac{f(q_1)}{f(1)}\cdot\frac{f(q_2)}{f(1)}$，但 p 是素数，故 $\frac{f(q_1)}{f(1)}=1$ 或 $\frac{f(q_2)}{f(1)}=1$，即

$$f(q_1)=f(1)$$

或

$$f(q_2)=f(1)$$

不妨设 $f(q_1)=f(1)$，则由(1)，(2)得

$$f(f(q_1))=q_1(f(1))^2$$

$$f(f(q_1))=f(f(1))=(f(1))^2$$

故 $q_1=1$，由此知 q 必为素数.

二、方程的通解

设 f 是 ① 的任一解.

设 N_1 为全体素数组成的集合,由前面的性质(6)可知,对每个 $p \in N_1$,存在惟一的 $q \in N_1$,使

$$f(p) = f(1)q$$

令

$$q = g(p) \quad ⑧$$

g 是 N_1 到 N_1 的映射,由(7)有

$$f(q) = f(1)p$$

故知 $g(q) = p$,即

$$g(g(p)) = p \quad ⑨$$

因而 g 是 N_1 到 N_1 的一一对应且满足

$$g^{-1} = g$$

由(4),当 p, q 为素数时

$$f(pq)f(1) = f(p)f(q) = f(1)qf(1)p = (f(1))^2 g(p)g(q)$$

故得

$$f(pq) = f(1)g(p)g(q) \quad ⑩$$

若令

$$g(pq) = g(p)g(q) \quad ⑪$$

则由 ⑩,⑪ 得

$$f(pq) = f(1)g(pq) \quad ⑫$$

特别地,要使 ⑫ 对 $p = q = 1$ 成立,必须令

$$g(1) = 1 \quad ⑬$$

一般地,对任意的 $x \in \mathbf{N}^*$,设 x 的标准分解式为 $x = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$,$p_1 \cdots p_r$ 为素数,则令

$$g(x) = (g(p_1))^{a_1}\cdots(g(p_r))^{a_r} \quad ⑭$$

此时将有

$$f(x) = f(1)g(x) \quad ⑮$$

易知 g 是积性函数,即满足

$$g(xy) = g(x)g(y), x, y \in \mathbf{N} \quad ⑯$$

故由(2)及 ⑯ 可得

$$f(f(x)) = (f(1))^2 x$$

$$f(f(x)) = f(f(1)g(x)) = f(1)g(f(1)g(x)) = f(1)g(f(1))g(g(x)) = f(1)g(f(1))x$$

比较两式,可得

$$g(f(1)) = f(1) \quad ⑰$$

故 $f(1)$ 是映射 g 的不动点.

下面的定理刻画了函数方程 ① 的全部解的构成.

定理 1 函数方程 ① 的全体解可按如下的方式构造.

(1) 定义 N_1 到 N_1 的一一对应 g,使 $g^{-1}=g$.

(2) 定义 $g(1)=1$,1 是 g 的一个不动点.

(3) 将 g 延拓为 $\mathbf{N}^+$ 到 $\mathbf{N}^+$ 的映射,对每个 $x\in\mathbf{N}^+$,x 的标准分解式为

$$x=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r},p_1\cdots p_r\text{ 为素数}$$

定义
$$g(x)=(g(p_1))^{a_1}\cdots(g(p_r))^{a_r}$$

(4) 取 $g(x)$ 的一个不动点 $k:g(k)=k$.

(5) 作 $\mathbf{N}^+$ 到 $\mathbf{N}^+$ 的映射 f,即

$$f(x)=kg(x),x\in\mathbf{N}^+ \tag{18}$$

则 f 是方程 ① 的解.

定理 1 的证明 从前面的叙述可知 ① 的解具有定理所述的结构,故必要性成立.现证充分性.

在 ⑱ 中取 $x=1$ 且注意 $g(1)=1$,可知 $f(1)=k$.又由(3)可知在 $\mathbf{N}^+$ 上 g 为积性函数

$$g(ab)=g(a)g(b),a,b\in\mathbf{N}^+$$

由 f 的定义可知

$$kf(ab)=k\cdot kg(ab)=kg(a)kg(b)=f(a)f(b)$$

由此易得
$$f(t)^2=\frac{1}{k}(f(t))^2$$

注意 k 是 g 的不动点,同样可得

$$f(f(s))=kg(kg(s))=kg(k)g(g(s))=k^2s$$

于是可得

$$f(t^2f(s))=\frac{1}{k}f(t^2)f(f(s))=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}(f(t))^2k^2s=s(f(t))^2$$

故 f 确为 ① 的一个解.

三、竞赛题的解

由于 $1\ 998=2\cdot 3^3\cdot 37$,故

$$f(1\ 998)=f(1)g(2)(g(3))^3g(37) \tag{19}$$

为取极小值,可令

$$f(1)=1,g(2)=3,g(3)=2,g(37)=5,g(5)=37 \tag{20}$$

而对 $x\in N_1\setminus\{2,3,5,37\}$,令 $g(x)=x$.

则 g 在 N_1 上定义且满足 $g^{-1}=g$.f 则按定理由 g 定全确定且满足 ①.于是将 ⑳ 代入 ⑲ 即得所求的极小值为

$$f(1\ 998)_{\min}=1\cdot 3\cdot 2^3\cdot 5=120$$

在前面,我们已经给出了函数方程 ① 的通解,因而解答了第 39 届 IMO 的压轴题.本文进一步将上述方程推及一般,研究方程

$$f(t^mf(s))=sdf^n(t) \tag{21}$$

其中,m,n,d 为自然数.显然,当 $m=n=2,d=1$ 时,㉑ 化为 ①.

我们将研究㉑的解的性质,解的存在性,并在解存在时给出通解.

1.通的性质

为了探求方程㉑的解存在的条件并给出通解,我们先讨论方程的解的性质.

设 f 是㉑的任一解.

(1) 下列各式成立:

ⅰ $f(f(1)) = f^n(1)d$;

ⅱ $f(f(f(1))) = f^{n+1}(1)d$;

ⅲ $f(a^m f(1)) = f^n(a)d$.

证明 在㉑中取 $s = t = 1$ 得 ⅰ;取 $t = 1, s = f(1)$ 得 ⅱ;取 $t = a, s = 1$ 得 ⅲ.

(2) $f(ab)f(1) = f(a)f(b)$.

证明 由(1),ⅲ 及(2)得

$$f(f^n(a)d) = f(f(a^m f(1))) = a^m f(1)f^n(1)d = a^m f^{n+1}(1)d \quad ㉒$$

于是可知

$$f(a^m b^m f^{n+1}(1)d) = f(f(f^n(ab)d)) = f^n(ab)df^n(1)d \quad ㉓$$

$$f(a^m b^m f^{n+1}(1)d) = f(a^m f(f^n(b)d)) = f^n(b)df^n(a)d \quad ㉔$$

两式相比较,即得(2).

由(2)及数学归纳法,易得

推论 对任意 $a \in \mathbf{N}^+, k \geqslant 2$,有

$$f^k(a) = f(a^k)f^{k-1}(1) \quad ㉕$$

有了性质(1),(2),几乎逐字地重复一中的(5),(6),(7),可得下面的性质(3),(4),(5).

(3) $f(1) \mid f(s), s \in \mathbf{N}^+$.

(4) 若 $f(a) = bf(1)$,则 $f(b) = adf(1)(a, b \in \mathbf{N}^+)$.

(5) 若 p 为素数且 $f(p) = f(1)q$,则 q 为素数.

2.解的存在性

下面的定理给出方程㉑的解存在时参数 m, n, d 应满足的充要条件.

定理 2 方程㉑的解存在的充要条件是 $d = 1$ 且 $m = n$.

定理 2 的证明 先证明必要性.

设㉑有解 f,任取 $a \in \mathbf{N}^+$,设 $f(a) = bf(1)$. 由性质(4),$f(b) = adf(1)$,再一次运用性质(4),得

$$f(ad) = bdf(1) \quad ㉖$$

另一方面,由性质(2)可得

$$f(ad) = \frac{f(a)f(d)}{f(1)} = \frac{bf(1)f(d)}{f(1)} = bf(d) \quad ㉗$$

比较㉖与㉗,得

$$f(d) = df(1) \quad ㉘$$

于是由性质(4)又有

$$f(d)=ddf(1)=d^2f(1) \qquad ㉙$$

比较㉘与㉙,即得 $d=1$.

在㉑取 $d=1,s=1$,得

$$f(a^mf(1))=f^n(a) \qquad ㉚$$

另一方面,由性质(2)得(注意 $d=1$)

$$f(a^mf(1))f^m(1)=f^mf(f(1))=f^m(a)f^n(1) \qquad ㉛$$

比较㉚与㉛,得

$$f^n(a)f^m(1)=f^m(a)f^n(1) \qquad ㉜$$

令 $f(a)=qf(1)$ 代入,得

$$q^nf^{m+n}(1)=q^mf^{m+n}(1) \qquad ㉝$$

但 $f(t)\equiv c$(常数)显然不是㉑的解,故可设 $q\neq 1$,因而得到 $m=n$.

又当 $d=1,m=n=2$ 时,在文一中我们已给出㉗的全部解;当 $m=n$ 时,在一般情形下㉗的解将在下一段中全部构造,而定理的充分性亦由此得出.

3.方程的通解

设 $m=n,d=1$.

当 $m=n=2$ 时,文一已构造了㉗的全部解.

当 $n\neq 2$ 时,重复文一中有关部分,同样可知解 f 有以下表现,即

$$f(x)=f(1)g(x) \qquad ㉞$$

其中,g 是全体素数的集合 N_1 到其自身的一个一一对应,满足 $g^{-1}=g$;而对每个 $x=p_1^{\alpha_1}p_r^{\alpha_r}\in \mathbf{N}^+$($p_1,\cdots,p_r$ 为素数),$g(x)$ 由下式定义,即

$$g(x)=(g(p_1))^{\alpha_1}\cdots(g(p_r))^{\alpha_r} \qquad ㉟$$

进一步,我们证明下面的引理.

引理 当 $n\neq 2$ 时,对于㉑的解 f 必有 $f(1)=1$.

引理的证明 由 $f(f(1))=f^n(1)$ 可知

$$f(f(f(1)))=f(f^n(1))=\frac{f^n(f(1))}{(f(1))^{n-1}}=\frac{f^{n^2}(1)}{f^{n-1}(1)}=f(f(1))^{n^2-n+1} \qquad ㊱$$

但又有

$$f(f(f(1)))=f^{n+1}(1) \qquad ㊲$$

比较㊱与㊲得

$$f^{n^2-n+1}(1)=f^{n+1}(1) \qquad ㊳$$

故

$$n^2-2n=0 \text{ 或 } f(1)=1 \qquad ㊴$$

即

$$n = 2 \text{ 或 } f(1) = 1 \quad ㊵$$

但 $n \neq 2$,故必有 $f(1) = 1$.

此时,由 ㉞ 得 $g(1) = 1$,于是,㉑ 的全部解由下面的定理刻画.

定理 3 当 $m = n, d = 1$ 时,㉑ 有解,且

当 $m = n = 2, d = 1$ 时,全部解由文一给出;

当 $d = 1, m = n \neq 2$ 时,㉑ 的解可按如下的方式构造.

(1) 在全体素数的集合 N_1 上定义 N_1 到 N_1 的一一对应 f,使 $f(1) = 1, f^{-1} = f$.

(2) 将 f 延拓到自然数的集合 $\mathbf{N}$ 上:对每个 $x \in \mathbf{N}^+$,x 的标准分解式为 $x = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$($p_1,\cdots,p_r$ 为素数),定义

$$f(x) = (f(p_1))^{\alpha_1}\cdots(f(p_r))^{\alpha_r} \quad ㊶$$

则 $f(x)$ 是 ㉑ 的解,且 ㊶ 给出了 ㉑ 的全部解.

定理 3 的证明 只须证 ㊶ 满足 ㉑. 易知由 ㊶ 定义的 $f(x)$ 是积性函数,即满足

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad ㊷$$

注意到 $f = f^{-1}$,故对任意 s,均有 $f(f(s)) = s$,于是可验证 f 满足方程 ㉑,即

$$f(t^n f(s)) = f(t^n)f(f(s)) = sf^n(t)$$



日月潭

第 40 届国际数学奥林匹克

罗马尼亚，1999

1 确定平面上所有至少包含三个点的有限点集 S，它们满足下述条件：对于 S 中任意两个互不相同的点 A 和 B，线段 AB 的垂直平分线是 S 的一个对称轴.

爱沙尼亚命题

解 设 G 为 S 的重心. 对 S 中任意两点 A,B，记 r_{AB} 为 S 关于线段 AB 的垂直平分线的对称映射. 因为 $r_{AB}(S) = S$，所以 $r_{AB}(G) = G$，这说明 S 中每个点到 G 的距离都相等，因而 S 中的点全在一个圆周上，它们构成一个凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n(n \geqslant 3)$.

因为 S 的对称映射 $r_{A_1A_3}$ 把以 A_1A_3 为边界的两个半平面分别映成它们自己，所以有 $r_{A_1A_3}(A_2) = A_2$，即得 $A_1A_2 = A_2A_3$.

同理可证

$$A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = \cdots = A_nA_1$$

这说明 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个正 n 边形.

反之易验证，正 $n(n \geqslant 3)$ 边形的顶点集合满足题目要求. 因此，S 为正多边形的顶点集合.

2 设 n 是一个固定的整数，$n \geqslant 2$.

(1) 确定最小常数 c，使得不等式

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j(x_i^2 + x_j^2) \leqslant c\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i\right)^4$$

对所有的非负实数 $x_1,\cdots,x_n \geqslant 0$ 都成立；

(2) 对于这个常数 c，确定等号成立的充要条件.

波兰命题

解法 1 由于不等式是齐次对称的，我们可以设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. 这时只须讨论

$$F(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i<j} x_ix_j(x_i^2 + x_j^2)$$

的最大值.

假设 $x_1,\cdots,x_n$ 中最后一个非零数为 $x_{k+1}(k \geqslant 2)$. 将

$$x = (x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},0,\cdots,0)$$

调整为 $$x' = (x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},0,\cdots,0)$$
相应的函数值

$$\begin{aligned}F(x') - F(x) &= x_kx_{k+1}(3(x_k + x_{k-1})\sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2) = \\ &x_kx_{k+1}(3(x_k + x_{k+1})(1 - x_k - x_{k+1}) - x_k^2 - x_{k+1}^2) = \\ &x_kx_{k+1}((x_k + x_{k+1})(3 - 4(x_k + x_{k+1})) + 2x_kx_{k+1})\end{aligned}$$

因为 $$1 \geqslant x_1 + x_k + x_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$$

所以 $$\frac{2}{3} \geqslant x_k + x_{k+1}$$

因此 $$F(x') - F(x) > 0$$

换言之,将 x 调整为 x' 时,函数值 F 严格增加.

对于任意 $x = (x_1,\cdots,x_n)$,经过若干次调整,最终可得

$$\begin{aligned}F(x) &\leqslant F(a,b,0,\cdots,0) = ab(a^2 + b^2) = \\ &\frac{1}{2}(2ab)(1 - 2ab) \leqslant \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\cdots,0\right)\end{aligned}$$

可见所求之常数 c 等于$\frac{1}{8}$.等号成立的充要条件为两个 x_i 相等(可以为 0),而其余的 x_j 均等于 0.

解法 2　符号 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} f(x_i,x_j)$ 表示对所有下标满足 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 的项$f(x_i,x_j)$求和,下文中简记为$\sum f(x_i,x_j)$.

(1) 当非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为 0 时,记

$$x = \frac{\sum x_ix_j}{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2},y = \frac{\sum x_ix_jx_k(x_i + x_j + x_k)}{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^4}$$

$$\begin{aligned}因为\sum x_ix_j(x_i^2 + x_j^2) &= \sum x_ix_j\left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - 2\sum x_ix_j - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x_k^2\right) = \\ &\sum x_ix_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - 2\left(\sum x_ix_j\right)^2 - \\ &\sum x_ix_jx_k(x_i + x_j + x_k)\Rightarrow \\ &c \geqslant - 2x^2 + x - y\end{aligned}$$

因为 $-2x^2 + x - y \leqslant \frac{1}{8}$,其符号成立的充分必要条件是 $x = \frac{1}{4}$ 且 $y = 0$.所以 $c \geqslant \frac{1}{8}$,$c_{\min} = \frac{1}{8}$,当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$时也适合.

(2) 当 $c = \frac{1}{8}$ 时,$x = \frac{1}{4}$ 且 $y = 0$ 的充分必要条件是

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4\sum x_ix_j$$

且 $$\sum x_ix_jx_k(x_i + x_j + x_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2\sum x_ix_j$$

且 $$\sum x_ix_jx_k = 0$$

因为 $\sum x_ix_jx_k = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中任意3项之积为0,即其中最多有两项 x_i, x_j 不为0,此时

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2\sum x_ix_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 = 2x_ix_j \Leftrightarrow x_i = x_j$$

因此,$x = \frac{1}{4}$ 且 $y = 0$ 的充分必要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有两项相等(可以为0),其余全为0.

3 设 n 是一个固定的正偶数.考虑一块 $n \times n$ 的正方板,它被分成 n^2 个单位正方格.板上两个不同的正方格如果有一条公共边,就称它们为相邻的.

将板上 N 个单位正方格作上标记,使得板上的任意正方格(作上标记的或者没有作上标记的)都与至少一个作上标记的正方格相邻.

确定 N 的最小值.

白俄罗斯命题

解 设 $n = 2k$.首先将正方板黑白相间地涂成像国际象棋棋盘那样.设 $f(n)$ 为所求的 N 的最小值,$f_w(n)$ 为必须作上标记的白格子的最小数目,使得任一黑格子都有一个作上标记的白格子与之相邻.同样地,定义 $f_b(n)$ 为必须作上标记的黑格子的最小数目,使得任一白格子都有一个作上标记的黑格子与之相邻.由于 n 为偶数,"棋盘"是对称的.故有

$$f_w(n) = f_b(n)$$
$$f(n) = f_w(n) + f_b(n)$$

为方便起见,将"棋盘"按照最长的黑格子对角线水平放置,则各行黑格子的数目分别为 $2, 4, \cdots, 2k, \cdots, 4, 2$.

在含有 $4i-2$ 个黑格子的那行下面,将奇数位置的白格子作上标记.当该行在对角线上方时,共有 $2i$ 个白格子作上了标记,如图40.1所示;而当该行在对角线下方时,共有 $2i-1$ 个白格子作上了标记,如图40.2所示.因而作上了标记的白格子总个数为

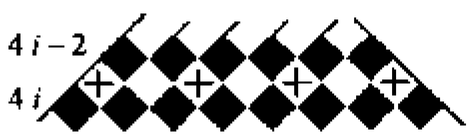


图 40.1

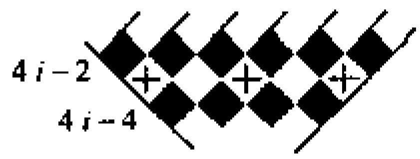


图 40.2

$$2 + 4 + \cdots + k + \cdots + 3 + 1 = \frac{k(k+1)}{2}$$

易见这时每个黑格子都与一个作上标记的白格子相邻,故得

$$f_w(n) \leqslant \frac{k(k+1)}{2}$$

考虑这 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个作上标记的白格子. 它们中的任意两个没有相邻的公共黑格子, 所以, 至少还需要将 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个黑格子作上标记, 以保证这些白格子中的每一个都有一个作上标记的黑格子与之相邻. 从而

$$f_b(n) \geqslant \frac{k(k+1)}{2}$$

故
$$f_w(n) = f_b(n) = \frac{k(k+1)}{2}$$

因此
$$f(n) = k(k+1)$$

4 确定所有的正整数对 (n,p), 满足 p 是一个素数, $n \leqslant 2p$, 且 $(p-1)^n+1$ 能够被 n^{p-1} 整除.

中国台湾命题

解 显然, $(1,p)$ 和 $(2,2)$ 满足题意, 故下面考虑 $n \geqslant 2, p \geqslant 3$ 的情形.

因为 $(p-1)^n+1$ 是奇数, 所以 n 也是奇数, 从而 $n<2p$. 记 q 为 n 的最小素因子, 则 $q \mid (p-1)^n+1$, 知 $(p-1)^n \equiv -1 \pmod q$, 且 $(q,p-1)=1$. 由 q 的选取知 $(n,p-1)=1$, 于是存在整数 u,v, 使得

$$un+v(q-1)=1$$

根据费马小定理

$$p-1 \equiv (p-1)^{un}(p-1)^{v(q-1)} \equiv (-1)^u 1^v \pmod q$$

因为 u 必为奇数, 所以 $p-1 \equiv -1 \pmod q$. 这说明 $q \mid p$, 进而有 $q=p$. 故证得 $n=p$.

于是, 我们得到

$$p^{p-1} \mid (p-1)^p+1 =$$
$$p^2\left(p^{p-2}-\binom{p}{1}p^{p-3}+\cdots+\binom{p}{p-3}p-\binom{p}{p-2}+1\right)$$

在上式的外括号中, 除最后一项外, 均可被 p 整除. 这说明 $p-1 \leqslant 2$, 即得 $p=3$.

综上所述, 所有的解为 $(2,2)$, $(3,3)$ 和 $(1,p)$, 其中 p 为任意素数.

5 两个圆 Γ_1 和 Γ_2 被包含在圆 Γ 内, 且分别与圆 Γ 相切于两个不同的点 M 和 N. Γ_1 经过 Γ_2 的圆心, 经过 Γ_1 和 Γ_2 的两个交点的直线与 Γ 相交于点 A 和 B, 直线 MA 和 MB 分别与 Γ_1 相交于点 C 和 D.

证明: CD 与 Γ_2 相切.

俄罗斯命题

证法 1 先证明一个引理.

引理 已知圆 Γ_1 被包含在圆 Γ 内且与圆 Γ 相切于点 U. 圆 Γ 的一条弦 PQ 与 Γ_1 相切于点 V. 设 W 为 Γ 上不包含点 U 的弧 $\overparen{PQ}$ 的中点,则 U,V,W 三点共线,且有 $WU\cdot WV=WP^2$.

引理的证明 如图 40.3 所示,以点 U 为位似中心,将圆 Γ_1 变为圆 Γ 的位似变换把 PQ 变成 Γ 的一条平行于 PQ 的切线,就是经过点 W 的切线. 因此, U,V,W 三点共线.

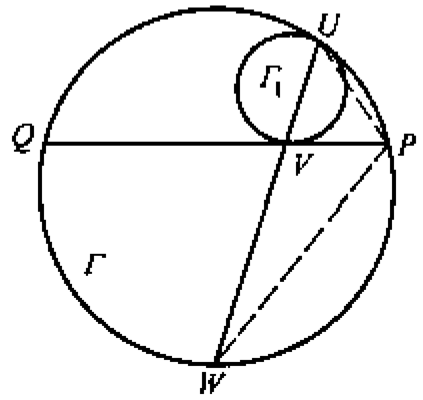


图 40.3

又因 $\angle QPW=\angle WUP$, 故 $\triangle UWP\backsim\triangle PWV$. 于是 $WU\cdot WV=WP^2$. 证毕.

如图 40.4 所示,设 O_1,O_2 分别为圆 Γ_1,Γ_2 的圆心, t_1 和 t_2 为它们的两条公切线. 设 α,β 分别为圆 Γ 上如同引理那样被 t_1,t_2 截出的弧.

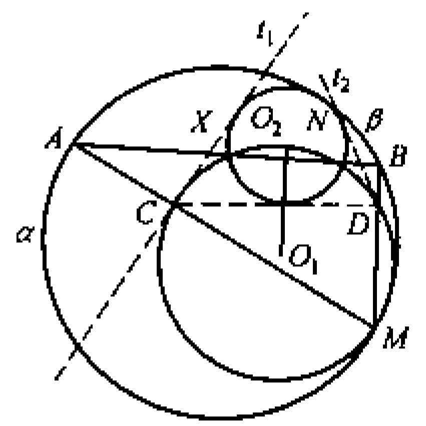


图 40.4

根据引理,弧 α,β 的中点关于圆 Γ_1,Γ_2 的幂相等,所以它们落在 Γ_1,Γ_2 的根轴上. 这说明点 A 和 B 分别是弧 α 和 β 的中点. 又由引理可知 C,D 分别为 t_1 和 t_2 在圆 Γ_1 上的切点.

令 H 是以 M 为位似中心,将圆 Γ_1 变成圆 Γ 的位似变换,则 H 把 CD 变成 AB. 于是 $AB\parallel CD$. 这说明 $CD\perp O_1O_2$ 且 O_2 是圆 Γ_1 上某一段 CD 弧的中点.

记 X 为 t_1 与圆 Γ_1 的切点,则

$$\angle XCO_2=\frac{1}{2}\angle CO_1O_2=\angle DCO_2$$

因此 O_2 在 $\angle XCD$ 的角平分线上,进而证得 CD 与圆 Γ_2 相切.

证法 2 如图 40.5 所示,设 O_1,O_2 分别为圆 Γ_1,Γ_2 的圆心,圆 Γ_1 与 Γ_2 交于 G,H, l_1 和 l_2 分别为切于 M,N 的两条外公切线, l_3 为切于 B 的圆 Γ 的切线并交 l_2 和 l_1 于 P,Q 两点. 连结 BN 交圆 Γ_2 于 E,连结 MN,DE,O_1O_2,O_2E.

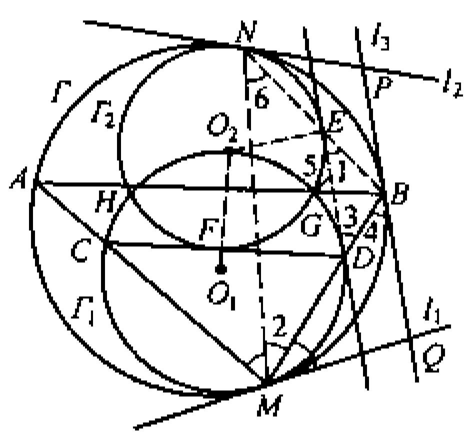


图 40.5

由 $\angle 4=\angle A=\angle QMB=\angle MCD$ 得, $CD\parallel AB$,因此 $\angle 5=\angle EDC$,但 $O_1O_2\perp AB$,则 $O_1O_2\perp CD$ 于 F, O_2 为 $\overparen{CD}$ 的中点,于是 $\angle O_2CD=\angle O_2DC$.

对于圆 Γ_1 和圆 Γ_2 有

$$BG\cdot BH=BD\cdot BM=BE\cdot BN$$

即 $\frac{BE}{BM}=\frac{BD}{BN}$,而 $\angle DBE=\angle NBM$,因此 $\triangle BDE\backsim\triangle BNM$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 6$. 但 $\angle 6=\angle A$,于是 $\angle 3=\angle 4$, $PQ\parallel DE$,所以 $\angle PBA=\angle 5=\angle AMB$,即 $\angle EDC=\angle AMB$,故 DE 为圆 Γ_2 的切线, D 为切点.

同理可证 $\angle PNB=\angle NGE$,所以 DE 切圆 Γ_2 于 E.

对于圆 Γ_1 有

$$\angle EDO_2=\frac{1}{2}\angle DO_1O_2=\angle O_2CD=\angle O_2DC$$

即 DO_2 平分 $\angle EDC$,因此 $O_2E=O_2F$.故 CD 与圆 Γ_2 相切.

证法 3　如图 40.6 所示,设 O,O_1,O_2 分别为圆 Γ,Γ_1,Γ_2 的圆心,圆 Γ_1 和 Γ_2 相交于 G,H 两点;连结 MN,OM,ON,BN 交圆 O_2 于 E,连结 O_2E,O_1O_2;过 O 作圆 O 的直径 $A'B$,过 O_1 作圆 O_1 的直径 $C'D$,则 A',C',M 三点共线.

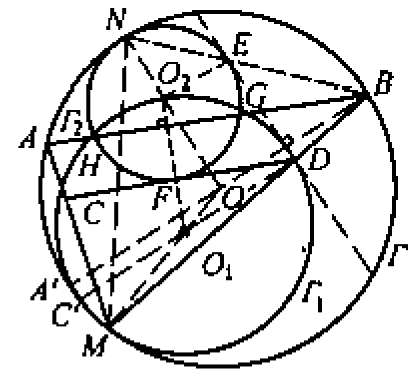


图 40.6

易知 O,O_1,M 和 O,O_2,N 分别共线,则由 $\angle O_1DM=\angle O_1MD=\angle OMB=\angle OBM$ 可得 $C'D\parallel A'B$,于是 $\angle MC'D=\angle A'$,而 $\angle MC'D=\angle MCD$,$\angle A'=\angle A$,所以 $\angle MCD=\angle A$,$CD\parallel AB$;但 $O_1O_2\perp AB$,则 $O_1O_2\perp CD$ 于 F,O_2 为 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点,即 $\angle O_2CD=\angle O_2DC$.

由

$$\angle O_2EN=\angle O_2NE=\angle ONB=\angle OBN$$

可得 $O_2E\parallel A'B$,所以 $O_2E\parallel A'B\parallel C'D$.

因为

$$BE\cdot BN=BG\cdot BH=BD\cdot BM$$

所以 M,N,E,D 四点共圆,于是 $\angle BDE=\angle BNM$.

由外心性质知

$$\angle BNM=\frac{1}{2}\angle BOM=\frac{1}{2}(180^\circ-2\angle OBM)=90^\circ-\angle OBM$$

即

$$\angle BDE+\angle OBM=90^\circ$$

所以 $A'B\perp DE$,$O_2E\perp DE$,$C'D\perp DE$,故 DE 为圆 O_1 及圆 O_2 的公切线.下同证法 1.

证法 4　如图 40.7 所示,设圆 Γ,Γ_1,Γ_2 的半径分别为 R,R_1,R_2,圆心分别为 O,O_1,O_2,连结 ON,OM,则 O,O_1,M 和 O,O_2,N 三点共线,于是

此证法属于吴长明、胡根宝

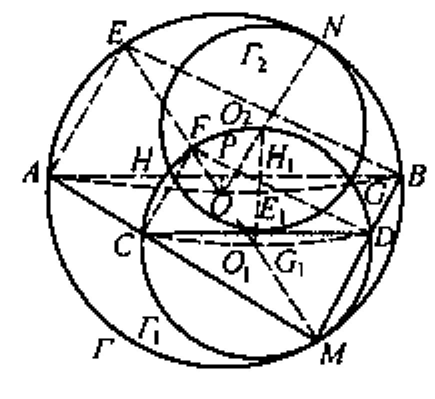


图 40.7

$$O_1O=R-R_1,O_2O=R-R_2$$

作圆 O 的直径 ME 交圆 O_1 于 F,连 AE,CF,BE,DF,O_1O_2,则 $CF\parallel AE,DF\parallel BE,\frac{MC}{MA}=\frac{MF}{ME}=\frac{2R_1}{2R}=\frac{R_1}{R},\frac{MD}{MB}=\frac{MF}{ME}=\frac{R_1}{R}$

即 $\frac{MC}{MA}=\frac{MD}{MB}$.于是 $CD\parallel AB$.但 $O_1O_2\perp AB$,因此

$$O_1O_2\perp CD,\frac{CD}{AB}=\frac{MC}{MA}=\frac{R_1}{R}$$

过 O 作 $OP\perp AB$ 于 P,$OE_1\perp O_1O_2$ 于 E_1,连结 O_1C,O_1D,

OA, OB.设 O_1O_2 交 CD 于 G_1,交 AB 于 H_1,则四边形 OE_1H_1P 为矩形,因此

$$OP = E_1H_1 = O_1O_2 - O_1E_1 - O_2H_1$$

由

$$\frac{O_1C}{OA} = \frac{O_1D}{OB} = \frac{R_1}{R} = \frac{CD}{AB}$$

得

$$\triangle O_1CD \backsim \triangle OAB$$

于是

$$\frac{O_1G_1}{OP} = \frac{CD}{AB} = \frac{R_1}{R}$$

所以

$$O_1G_1 = \frac{R_1}{R}(R_1 - O_1E_1 - O_2H_1) \qquad ①$$

在圆 O_1 中由勾股定理及相交弦定理得

$$HH_1^2 = O_2H^2 - O_2H_1^2 = O_2H_1(2R_1 - O_2H_1)$$

即

$$O_2H_1 = \frac{R_2^2}{2R_1} \qquad ②$$

在 Rt$\triangle OO_2E_1$ 和 Rt$\triangle OO_1E_1$ 中,由

$$(R - R_2)^2 - O_2E_1^2 = (R - R_1)^2 - O_1E_1^2, O_2E_1 + O_1E_1 = R_1$$

可得

$$O_1E_1 = \frac{2R_1^2 - R_2^2 - 2R(R_1 - R_2)}{2R_1} \qquad ③$$

将②,③代入得

$$O_1G_1 = \frac{R_1}{R}\left(R_1 - \frac{R_2^2}{2R_1} - \frac{2R_1^2 - R_2^2 - 2R(R_1 - R_2)}{2R_1}\right) = \frac{R_1}{R}\cdot\frac{2R(R_1 - R_2)}{2R_1} = R_1 - R_2$$

所以

$$O_2G_1 = R_1 - (R_1 - R_2) = R_2$$

故 CD 为圆 O_2 的切线.

6 确定所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,其中 $\mathbf{R}$ 是实数集,使得对任意 $x,y\in\mathbf{R}$,恒有

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

成立.

日本命题

解 记 $A = \mathrm{Im}f$ 为函数 f 的象集合,$c = f(0)$.对于 $x = y = 0$,可得

$$f(-c) = f(c) + c - 1$$

所以 $c \neq 0$.取 $x = f(y)$,得

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \qquad ①$$

对任意 $x \in A$ 成立.取 $y = 0$,得

$$\{f(x-c) - f(x) \mid x \in \mathbf{R}\} = \{cx + f(c) - 1 \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$

因为 $c \neq 0$,由此可知,对任意 $x \in \mathbf{R}$,存在 $y_1, y_2 \in A$,使得 $x = y_1 - y_2$.根据式 ①,有

$$f(x) = f(y_1 - y_2) = f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 =$$
$$\frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 =$$
$$c - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2} \qquad ②$$

比较 ①,② 两式可得 $c = 1$.

从而,对任意 $x \in \mathbf{R}$ 有

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

反之,易验证 $1 - \frac{x^2}{2}$ 满足题意.故所求的函数为

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$



蒂米什瓦拉风光

第 41 届国际数学奥林匹克

韩国,2000

1 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N.设 l 是圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的两条公切线中距离 M 较近的那条公切线. l 与圆 Γ_1 相切于点 A,与圆 Γ_2 相切于点 B.设经过点 M 且与 l 平行的直线与圆 Γ_1 还相交于点 C,与圆 Γ_2 还相交于点 D.直线 CA 和 DB 相交于点 E,直线 AN 和 CD 相交于点 P,直线 BN 和 CD 相交于点 Q.证明:$EP = EQ$.

俄罗斯命题

证法 1 如图 41.1 所示,令 K 为 MN 和 AB 的交点.根据圆幂定理

$$AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$$

换言之,K 是 AB 的中点.因为 $PQ \parallel AB$,所以 M 是 PQ 的中点.故只须证明 $EM \perp PQ$.

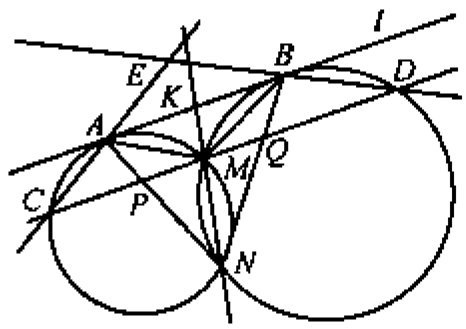


图 41.1

因为 $CD \parallel AB$,所以点 A 是圆 Γ_1 的弧 CM 的中点,点 B 是圆 Γ_2 的弧 DM 的中点.于是,$\triangle ACM$ 与 $\triangle BDM$ 都是等腰三角形.从而

$$\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$$
$$\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$$

可推出 $EM \perp AB$.

再由 $PQ \parallel AB$,即证 $EM \perp PQ$.

证法 2 如图41.2所示,连结 MA,MB,ME,延长 NM 交 AB 于 F.

此证法属于张伟军

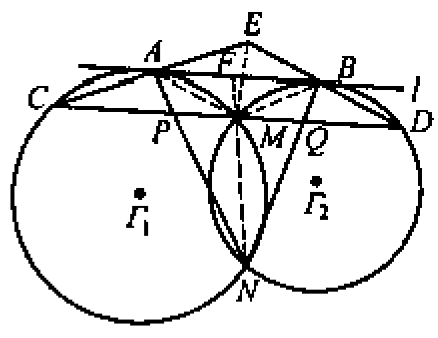


图 41.2

因为 l 是圆 Γ_1,圆 Γ_2 的公切线,又 $CD \parallel l$,所以

$$\angle EAB = \angle C = \angle MAB, \angle EBA = \angle D = \angle MBA$$

所以 $\triangle EAB \cong \triangle MAB$,所以 $MA = AE$.

由 $\angle AMC = \angle MAB = \angle C$ 得 $MA = AC$,所以 $EM \perp CD$.

因为 $FA^2 = FM \cdot FN = FB^2$,所以 $FA = FB$.

由 $PQ \parallel AB$ 易得 $\frac{MP}{FA} = \frac{MQ}{FB}$,所以 $MP = MQ$.

所以 $PE = QE$.

注　当 l 是距离 M 较远的那条公切线时，结论同样成立，证明方法类似.

2 设 a,b,c 是正实数，且满足 $abc=1$. 证明

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1$$

美国命题

证法 1　令

$$a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$$

其中，x,y,z 为正实数. 则原不等式变为

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leqslant xyz$$

记　$u=x-y+z,v=y-z+x,w=z-x+y$

因为这三个数中的任意两个之和都是正数，所以它们之中最多只有一个是负数.

如果恰有一个是负数，则 $uvw\leqslant 0<xyz$. 不等式得证.

如果这三个数都大于 0，则由算术 - 几何平均不等式可得

$$\sqrt{uv}=\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)}\leqslant$$
$$\frac{1}{2}((x-y+z)+(y-z+x))=x$$

同理　$\sqrt{vw}\leqslant y,\sqrt{wu}\leqslant z$

于是，$uvw\leqslant xyz$. 不等式得证.

证法 2　由 $abc=1$，得

此证法属于张伟军

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})=$$
$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+ab)(\frac{1}{ab}-1+\frac{1}{a})=$$
$$(a-1+\frac{1}{b})b(a+1-\frac{1}{b})\frac{1}{a}(-a+1+\frac{1}{b})=$$
$$\frac{1}{a\cdot 1\cdot \frac{1}{b}}(a-1+\frac{1}{b})(a+1-\frac{1}{b})(-a+1+\frac{1}{b})$$

令

$$a-1+\frac{1}{b}=2y,a+1-\frac{1}{b}=2z,-a+1+\frac{1}{b}=2x$$

则　$a=y+z>0,1=z+x>0,\frac{1}{b}=x+y>0$

显然 x,y,z 中至多有一个不大于 0.

i 若 x,y,z 中恰有一个不大于 0，则 $xyz\leqslant 0$，结论显然成立.

ii 若 $x>0,y>0,z>0$，则原不等式左边等于

$$\frac{8xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \leqslant \frac{8xyz}{2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{xz}\cdot 2\sqrt{xy}} = 1$$

当且仅当 $x = y = z$，即 $a = b = c = 1$ 时等号成立.

注 若记 $a = u, \frac{1}{b} = v, 1 = \lambda$，则该题结果等价于

$$(u+v-\lambda)(u-v+\lambda)(-u+v+\lambda) \leqslant uv\lambda$$

此为 1983 年瑞士数学奥林匹克题.

证法 3 由题设条件易知正实数 a,b,c 中有两个不小于 1，另一个不大于 1；或者有两个不大于 1，另一个不小于 1. 此时在 $a-1+\frac{1}{b}, b-1+\frac{1}{c}, c-1+\frac{1}{a}$ 中至多有一个负值.

此证法属于段智毅、秦立

当 $a-1+\frac{1}{b}, b-1+\frac{1}{c}, c-1+\frac{1}{a}$ 中有一个负值时，原不等式显然成立，下面只要证明它们均为正值的情形.

因为 $abc = 1$，所以

$$a-1+\frac{1}{b} = a-1+ac$$

即
$$a-1+\frac{1}{b} = a(1-\frac{1}{a}+c)$$

同理
$$b-1+\frac{1}{c} = b(1-\frac{1}{b}+a)$$

$$c-1+\frac{1}{a} = c(1-\frac{1}{c}+b)$$

于是应用
$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, x,y \in \mathbf{R}$$

得

$$(a-1+\frac{1}{b})(c-1+\frac{1}{a}) = a(1-\frac{1}{a}+c)(c-1+\frac{1}{a}) \leqslant a\left(\frac{(1-\frac{1}{a}+c)+(c-1+\frac{1}{a})}{2}\right)^2 = ac^2$$

即
$$(a-1+\frac{1}{b})(c-1+\frac{1}{a}) \leqslant ac^2$$

同理
$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c}) \leqslant ba^2$$

$$(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a}) \leqslant cb^2$$

将上面三式两边相乘，得

$$(a-1+\frac{1}{b})^2(b-1+\frac{1}{c})^2(c-1+\frac{1}{a})^2 \leqslant (abc)^3 = 1$$

即
$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a}) \leqslant 1$$

综上，原不等式得证.

需要指出的是，本题的等价问题是：若正实数 a,b,c 满足 $abc=1$，求证

$$\left(1+a-\frac{1}{b}\right)\left(1+b-\frac{1}{c}\right)\left(1+c-\frac{1}{a}\right)\leqslant 1$$

白俄罗斯命题

3 设 $n\geqslant 2$ 为正整数. 开始时，在一条直线上有 n 只跳蚤，且它们不全在同一点，对任意给定的一个正实数 λ，可以定义如下的一种移动：

(1) 选取任意两只跳蚤，设它们分别位于点 A 和 B，且 A 位于 B 的左边；

(2) 令位于点 A 的跳蚤跳到该直线上位于点 B 右边的点 C，使得 $\frac{BC}{AB}=\lambda$.

试确定所有可能的正实数 λ，使得对于直线上任意给定的点 M 以及这 n 只跳蚤的任意初始位置，总能够经过有限多个移动之后令所有的跳蚤都位于 M 的右边.

解 要使跳蚤尽可能远地跳向右边，一个合理的策略是在每一个移动中都选取最左边的跳蚤所处的位置作为点 A，最右边的跳蚤所处的位置作为点 B. 按照这一策略，假设在 k 次移动之后，这些跳蚤之间距离的最大值为 d_k，而任意两只相邻跳蚤之间距离的最小值为 δ_k. 显然有

$$d_k\geqslant(n-1)\delta_k$$

经过第 $k+1$ 次移动，会产生一个新的两只相邻跳蚤之间的距离 λd_k. 如果这是新的最小值，则有 $\delta_{k+1}=\lambda d_k$；如果它不是最小值，则显然有 $\delta_{k+1}\geqslant\delta_k$. 无论哪种情形，总有

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\geqslant\min\left\{1,\frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\}\geqslant\min\{1,(n-1)\lambda\}$$

因此，只要 $\lambda\geqslant\frac{1}{n-1}$，就有 $\delta_{k+1}\geqslant\delta_k$ 对任意 k 都成立. 这意味着任意两只相邻跳蚤之间距离的最小值不会减小. 故每次移动之后，最左边的跳蚤所处的位置都以不小于某个正的常数的步伐向右平移. 最终，所有的跳蚤都可以跳到任意给定的点 M 的右边.

下面证明：如果 $\lambda<\frac{1}{n-1}$，则对任意初始位置都存在某个点 M，使得这些跳蚤无法跳到点 M 的右边.

将这些跳蚤的位置表示成实数，考虑任意的一系列移动. 令 s_k 为第 k 次移动之后，表示跳蚤所在位置的所有实数之和，再令

w_k 为这些实数中最大的一个(即最右边的跳蚤的位置).显然有 $s_k \leqslant nw_k$.我们要证明序列 $\{w_k\}$ 有界.

在第 $k+1$ 次移动时,一只跳蚤从点 A 跳过点 B 落在点 C,分别用实数 a,b,c 表示这三个点.则 $s_{k+1}=s_k+c-a$.根据移动的定义

$$c-b=\lambda(b-a)$$

进而得到

$$\lambda(c-a)=(1+\lambda)(c-b)$$

于是

$$s_{k+1}-s_k=c-a=\frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$$

如果 $c>w_k$,则刚跳过来的这只跳蚤占据了新的最右边位置 $w_{k+1}=c$.再由 $b\leqslant w_k$ 可得

$$s_{k+1}-s_k=\frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)\geqslant\frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1}-w_k)$$

如果 $c\leqslant w_k$,则有

$$w_{k+1}-w_k=0,s_{k+1}-s_k=c-a>0$$

故上式仍然成立.

考虑下列数列

$$z_k=\frac{1+\lambda}{\lambda}w_k-s_k,k=0,1,2,\cdots$$

则有 $z_{k+1}-z_k\leqslant 0$,即该数列是不升的.

因此,对所有的 k 总有 $z_k\leqslant z_0$.

假设 $\lambda<\frac{1}{n-1}$,则 $1+\lambda>n\lambda$.可以把 z_k 写成

$$z_k=(n+\mu)w_k-s_k$$

其中

$$\mu=\frac{1+\lambda}{\lambda}-n>0$$

于是得到不等式

$$z_k=\mu w_k+(nw_k-s_k)\geqslant\mu w_k$$

故对于所有的 k,总有 $w_k\leqslant\frac{z_0}{\mu}$.这意味着最右边跳蚤的位置永远不会超过一个常数,这个常数与 n,λ 和这些跳蚤的初始位置有关,而与如何移动无关.最终得到结论:所求 λ 的可能值为所有不小于 $\frac{1}{n-1}$ 的实数.

匈牙利命题

4 一位魔术师有100张卡片,分别写有数字1到100.他把这100张卡片放入三个盒子里,一个盒子是红色的,一个是白色的,一个是蓝色的,每个盒子里至少都放入了一张卡片.

一位观众从三个盒子中挑出两个,再从这两个盒子里各选取一张卡片,然后宣布这两张卡片上的数字之和.知道这个和之后,魔术师便能够指出哪一个是没有从中选取卡片的盒子.

问共有多少种放卡片的方法,使得这个魔术总能够成功?(两种方法被认为是不同的,如果至少有一张卡片被放入不同颜色的盒子)

解 共有12种不同的方法.考虑1到100之间的整数,为简便起见,将整数 i 所放入的盒子的颜色定义为该整数的颜色.用 r 代表红色,w 代表白色,b 代表蓝色.

(1) 存在某个 i,使得 $i,i+1,i+2$ 的颜色互不相同,例如,分别为 r,w,b.因为 $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$,所以 $i+3$ 的颜色既不能是 $i+1$ 的颜色 w,也不能是 $i+2$ 的颜色 b,只能是 r.可见只要三个相邻的数字有互不相同的颜色,就能够确定下一个数字的颜色.进一步地,这三个数字的颜色模式必定反复出现:r,w,b 后面一定是 r,然后又是 $w,b,\cdots$ 依此类推.同理可得上述过程对于相反方向也成立:r,w,b 的前面一定是 $b,\cdots$ 依此类推.

因此,只须确定1,2,3的颜色.而这有6种不同的方法,这6种方法都能够使魔术成功,因为它们的和 $r+w,w+b,b+r$ 给出模3的互不相同的余数.

(2) 不存在三个连续的数字,其颜色互不相同.假设1是红色的,令 i 为最小的不是红色的数字,不妨假设 i 为白色的,再设 k 为最小的蓝色数字,则由假设必有 $i+1<k$.

如果 $k<100$,因为

$$i+k=(i-1)+(k+1)$$

所以 $k+1$ 一定要是红色的.但又由于

$$i+(k+1)=(i+1)+k$$

所以 $i+1$ 一定要是蓝色的,与 k 是最小蓝色数字相矛盾.故得 k 必须等于100.换言之,只有100是蓝色的.

我们再来证明只有1是红色的.不然的话,设存在 $t>1$ 是红色的,则由 $t+99=(t-1)+100$ 推出 $t-1$ 是蓝色的,与只有100是蓝色的相矛盾.

于是,这些数字的颜色必须是 $r,w,w,\cdots,w,w,b$.而这种方

法确实可行:

如果被选取的两张卡片上的数字之和小于等于 100,则没有从中选取卡片的盒子一定是蓝色的;

如果数字之和等于 101,则没有从中选取卡片的盒子一定是白色的;

如果数字之和大于 101,则没有从中选取卡片的盒子一定是红色的.

最后,共有 6 种按照上述样子排列颜色的方法.

故答案为 12.

5 确定是否存在满足下列条件的正整数 n:

n 恰好能够被 2 000 个互不相同的素数整除,且 2^n+1 能够被 n 整除.

俄罗斯命题

解 存在.我们用归纳法来证明一个更一般的命题:

对每一个自然数 k 都存在自然数 $n=n(k)$,满足 $n\mid 2+1$, $3\mid n$,且 n 恰好能够被 k 个互不相同的素数整除.

当 $k=1$ 时,$n(1)=3$ 即可使命题成立.

假设对于 $k\geqslant 1$ 存在满足要求的 $n(k)=3^l t$,其中 $l\geqslant 1$ 且 3 不能整除 t.于是 $n=n(k)$ 必为奇数,可得

$$3\mid 2^{2n}-2^n+1$$

利用恒等式

$$2^{3n}+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$$

可知

$$3n\mid 2^{3n}+1$$

根据下面的引理,存在一个奇素数 p 满足 $p\mid 2^{3n}+1$,但 p 不能整除 2^n+1.于是,自然数

$$n(k+1)=3pn(k)$$

即满足命题对于 $k+1$ 的要求.归纳法完成.

引理 对于每一个整数 $a>2$,存在一个素数 p 满足 $p\mid a^3+1$,但 p 不能整除 $a+1$.

引理的证明 假设对某个 $a>2$ 引理不成立.则 a^2-a+1 的每一个素因子都要整除 $a+1$.而恒等式

$$a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3$$

说明能够整除 a^2-a+1 的惟一素数是 3.换言之,a^2-a+1 是 3 的方幂.因为 $a+1$ 是 3 的倍数,所以 $a-2$ 也是 3 的倍数.于是 a^2-a+1 能够被 3 整除,但不能被 9 整除.故得 a^2-a+1 恰等于 3.另一方面,由 $a>2$ 知 $a^2-a+1>3$.这个矛盾完成了引理的证明.

6 设 AH_1, BH_2, CH_3 是锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线. $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 T_1, T_2, T_3. 设直线 l_1, l_2, l_3 分别是直线 H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 关于直线 T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 的对称直线. 证明: l_1, l_2, l_3 所确定的三角形, 其顶点都在 $\triangle ABC$ 的内切圆上.

俄罗斯命题

证法 1 令 M_1 为 T_1 关于 $\angle A$ 的角平分线的对称点, M_2 和 M_3 分别为 T_2 和 T_3 关于 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的角平分线的对称点. 显然 M_1, M_2, M_3 在 $\triangle ABC$ 的内切圆周上. 只须证明它们恰好是题目中所求证的三角形的三个顶点.

由对称性, 只须证明 H_2H_3 关于直线 T_2T_3 的对称直线 l_1 经过 M_2 即可.

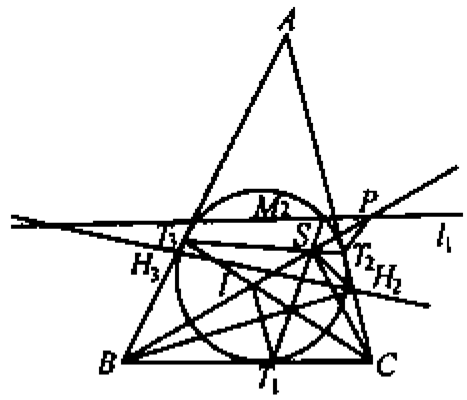


图 41.3

如图 41.3 所示, 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心. 注意 T_2 和 H_2 总在 BI 的同一侧, 且 T_2 比 H_2 距离 BI 更近. 我们只考虑点 C 也在 BI 同一侧的情形(如果点 C 和 T_2, H_2 分别位于 BI 的两侧, 证明需要稍加改动).

设 $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$.

引理 H_2 关于 T_2T_3 的镜像位于直线 BI 上.

引理的证明 过 H_2 作直线 l 与 T_2T_3 垂直. 记 P 为 l 与 BI 的交点, S 为 BI 与 T_2T_3 的交点. 则 S 既在线段 BP 上, 也在线段 T_2T_3 上. 只须证明

$$\angle PSH_2 = 2\angle PST_2$$

首先, 我们有 $\angle PST_2 = \angle BST_3$. 又由外角定理知

$$\angle PST_2 = \angle AT_3S - \angle T_3BS = (90^\circ - \alpha) - \beta = \gamma$$

再由关于 BI 的对称性知

$$\angle BST_1 = \angle BST_3 = \gamma$$

因为

$$\angle BT_1S = 90^\circ + \alpha > 90^\circ$$

所以, 点 C 和点 S 在 IT_1 的同一侧.

由 $\angle IST_1 = \angle ICT_1 = \gamma$ 可得 S, I, T_1, C 四点共圆, 于是

$$\angle ISC = \angle IT_1C = 90^\circ$$

因为 $\angle BH_2C = 90^\circ$. 所以, B, C, H_2, S 四点共圆. 这意味着

$$\angle PSH_2 = \angle C = 2\gamma = 2\angle PST_2$$

引理得证.

注意到在引理的证明中, 因为 B, C, H_2, S 四点共圆以及关于 T_2T_3 的对称性, 可以得到

$$\angle BPT_2 = \angle SH_2T_2 = \beta$$

又由于 M_2 是 T_2 关于 BI 的对称像, 有

$$\angle BPM_2 = \angle BPT_2 = \beta = \angle CBP$$

因此，$PM_2 \parallel BC$.

要证明 M_2 位于 l_1 上，只须证 l_1 也平行于 BC.

假设 $\beta \neq \gamma$. 设直线 BC 与 H_2H_3 和 T_2T_3 分别相交于点 D 和点 E. 注意到点 D 和点 E 位于直线 BC 上线段 BC 的同一侧，易证

$$\angle BDH_3 = 2|\beta - \gamma|, \angle BET_3 = |\beta - \gamma|$$

故得 $l_1 \parallel BC$.

此证法属于许静、孔令恩

证法2　如图41.4所示，设直线 T_2T_3，H_2H_3 交于 P，直线 H_2H_1，T_2T_1 交于 Q，直线 l_1，l_3 交于 M_2，l_1 交 AB 于 R，l_3 交 BC 于 S.

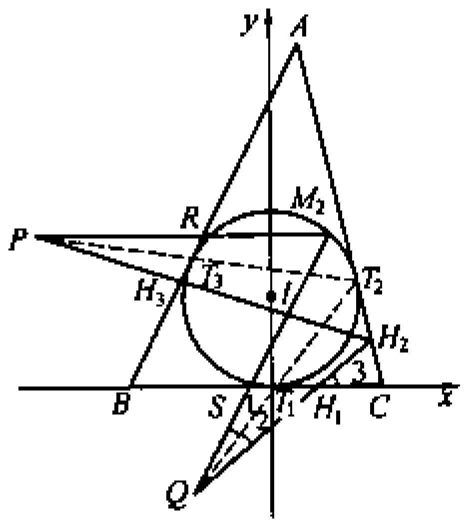


图41.4

$\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 分别为 a，b，c. 外接圆和内切圆半径分别为 R，r，内心为 I. 并建立如图41.4所示的直角坐标系.

因为

$$\angle M_2SC = \angle 1 + \angle ST_1Q = \angle 2 + \angle T_2T_1C =$$
$$(\angle T_2T_1C - \angle 3) + \angle T_2T_1C = 2\angle T_2T_1C - \angle A =$$
$$(180^\circ - \angle C) - \angle A = \angle B$$

所以 $M_2S \parallel AB$，同理 $M_2R \parallel BC$.

$$T_1C = \frac{r \cdot \cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = 4R \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$H_1C = b \cdot \cos C = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$$

所以 $T_1H_1 = T_1C - H_1C =$

$$4R \cdot \sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2} \cdot \cos C\right) =$$
$$4R \cdot \sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A+C}{2} \cdot \cos C\right) =$$
$$4R \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \sin\frac{C-B}{2} = \frac{r \cdot \sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

由三角形角平分线性质，有

$$\frac{ST_1}{T_1H_1} = \frac{SQ}{QH_1} = \frac{\sin\angle QH_1S}{\sin\angle QSH_1} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

所以　$$ST_1 = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot T_1H_1 = \frac{2r \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{C-B}{2}}{\sin B}$$

同理 $T_3H_3 = \dfrac{r \cdot \sin\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$，$RT_3 = \dfrac{2r \cdot \cos\frac{C}{2} \cdot \sin\frac{B-A}{2}}{\sin B}$

所以 $BR = BT_3 + RT_3 = \dfrac{r \cdot \cos\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}} + \dfrac{2r \cdot \cos\dfrac{C}{2} \cdot \sin\dfrac{B-A}{2}}{\sin B} =$

$$\frac{2r}{\sin B}\left(\cos^2\frac{B}{2} + \sin\frac{B+A}{2} \cdot \sin\frac{B-A}{2}\right) =$$

$$\frac{2r}{\sin B}\cos^2\frac{A}{2}$$

则知 $S\left(-\dfrac{2r \cdot \cos\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{C-B}{2}}{\sin B},0\right)$，$R\left(0,2r \cdot \cos^2\dfrac{A}{2}\right)$，则直线 M_2S 和直线 M_2P 的方程联立

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sin B}{\cos B}\left(x + \dfrac{2r \cdot \cos\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{C-B}{2}}{\sin B}\right) \\ y = 2r \cdot \cos^2\dfrac{A}{2} \end{cases}$$

解得 $M_2\left(r \cdot \sin A, 2r \cdot \cos^2\dfrac{A}{2}\right)$. 则有

$$M_2I^2 = (r \cdot \sin A)^2 + \left(2r \cdot \cos^2\frac{A}{2} - r\right)^2 = r^2$$

这表明 M_2 在圆 I 上.

同理可知其他，则知原命题成立. 证毕.



景富宫

第 42 届国际数学奥林匹克

美国,2001

1 设锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O,从 A 作 BC 的高,垂足为 P,且 $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30°$.证明

$$\angle CAB + \angle COP < 90°$$

韩国命题

证法 1 令 $\alpha = \angle CAB, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle BCA, \delta = \angle COP$.

设 K, Q 为点 A, P 关于 BC 的垂直平分线的对称点,R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.则

$$OA = OB = OC = OK = R$$

由于 $KQPA$ 为矩形,则

$$QP = KA$$

$$\angle AOK = \angle AOB - \angle KOB = \angle AOB - \angle AOC = 2\gamma - 2\beta \geqslant 60°$$

由此及 $OA = OK = R$,推出

$$KA \geqslant R, QP \geqslant R$$

利用三角不等式

$$OP + R = OQ + OC > QC = QP + PC \geqslant R + PC$$

因此,$OP > PC$.

在 $\triangle COP$ 中,$\angle PCO > \delta$.由

$$\alpha = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - 2\angle PCO) = 90° - \angle PCO$$

得

$$\alpha + \delta < 90°$$

证法 2 如图 42.1 所示,延长 CO, AO, AP 分别交圆 O 于 D, E, F,连结 EF, BD.则

此证法属于魏维

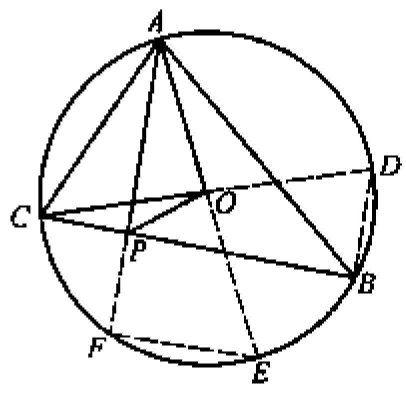


图 42.1

$$\angle E = \angle CAP + \angle ABC = 90° - \angle ACB + \angle ABP$$

故

$$\angle OAP = 90° - \angle E = \angle ACB - \angle ABP$$

设圆 O 的半径为 R,因为

$$CP = 2R \cdot \sin B \cdot \cos C, AP = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$$

所以 $OP^2 = AP^2 + OA^2 - 2OA \cdot AP \cdot \cos \angle OAP =$

$4R^2 \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C + R^2 -$

$4R^2 \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos(C - B) =$

$$4R^2(\sin^2 B\cdot\sin^2 C+\frac{1}{4}-$$
$$\sin^2 B\cdot\sin^2 C-\sin B\cdot\cos B\cdot\sin C\cdot\cos C)=$$
$$4R^2\left(\frac{1}{4}-\sin B\cdot\cos B\cdot\sin C\cdot\cos C\right)$$

所以 $OP^2-CP^2=4R^2\left(\frac{1}{4}-\sin B\cdot\cos C\cdot\sin(B+C)\right)=$

$$4R^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2 A+\frac{1}{2}\sin A\cdot\sin(C-B)\right)$$

因为 $\angle C-\angle B\geqslant 30^\circ$，且 $\angle C$，$\angle B$ 都为锐角，所以，上式大于等于

$$4R^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin^2 A+\frac{1}{4}\sin A\right)=R^2(2\sin A+1)(1-\sin A)>0$$

所以 $$OP^2>CP^2\Rightarrow OP>CP$$

有 $$\angle COP<\angle OCP$$

故 $$\angle COP+\angle CAB<\angle OCP+\angle D=90^\circ$$

证法3 如图42.2所示，据题意有

此证法属于陈雨

$$\alpha+\beta,\beta+\gamma,\alpha+\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

且

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2} \qquad ①$$

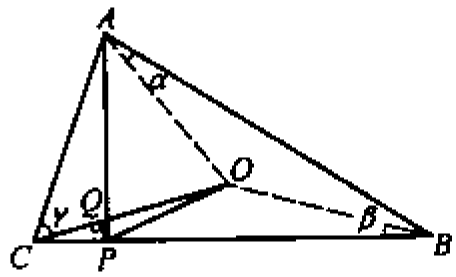


图42.2

因为 $$\angle BCA\geqslant\angle ABC+30^\circ$$

所以

$$\beta+\gamma\geqslant\alpha+\beta+30^\circ\Rightarrow\gamma-\alpha\geqslant\frac{\pi}{6} \qquad ②$$

注意到

$$\angle CAB+\angle OCB=\frac{1}{2}\angle COB+\frac{1}{2}(\angle OCB+\angle OBC)=\frac{\pi}{2}$$

要证 $\angle CAB+\angle COP<\frac{\pi}{2}$，仅须证 $\angle COP<\angle OCP$（作 $PQ\perp OC$ 于 Q）$\Leftarrow PC<PO\Leftarrow CQ<OQ\Leftarrow CQ<\frac{1}{2}CO$.

设 $\triangle ABC$ 外接圆圆 O 半径为 R，则有

$$AC=2R\cdot\sin(\alpha+\beta)$$
$$PC=AC\cdot\cos(\beta+\gamma)=2R\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\beta+\gamma)$$
$$QC=PC\cdot\cos\beta=2R\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\beta+\gamma)\cdot\cos\beta=$$
$$2R(\sin(\alpha+\beta+\gamma+\beta)+\sin(\alpha-\gamma))\cos\beta=$$
$$R(\cos\beta-\sin(\gamma-\alpha))\cos\beta$$

由式①，②可知，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，有 $\cos\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$．则

$$QC \leqslant R\left(\cos\beta - \sin\frac{\pi}{6}\right)\cos\beta = R\left(\left(\cos\beta - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4^2}\right) <$$
$$R\left(\frac{3^2}{4^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}OC$$

证法 4　如图 42.3 所示，过点 O 作 BC 的垂线，垂足为 D. 因为

此证法属于刘文光

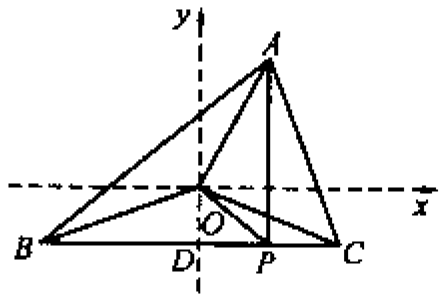


图 42.3

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle DOC$$

所以 $$\frac{\pi}{2} - \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle DOC = \angle OCD$$

则只须证 $$\angle COP < \angle OCD \Leftarrow PC < OP$$

以 O 作原点，OD 所在直线为 y 轴，以过点 O 且平行于 BC 的直线为 x 轴建立直角坐标系.

设 $\angle AOx = \alpha$，$\angle xOC = \beta$，且 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$，其外接圆半径为 R. 有

$$P(R\cdot\cos\alpha, -R\cdot\sin\beta), C(R\cdot\cos\beta, -R\cdot\sin\beta)$$

则 $$|PC| = R(\cos\beta - \cos\alpha), |PO| = R\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\beta}$$

所以 $$|PC|^2 - |PO|^2 = R^2(2\cos^2\beta - 2\cos\beta\cdot\cos\alpha - 1)$$

因为

$$\angle ABO = \frac{\alpha - \beta}{2}, \angle ACO = \frac{\pi - \alpha - \beta}{2}$$

且 $$\angle ACB - \angle ABC = \angle ACO - \angle ABO \geqslant \frac{\pi}{6}$$

所以 $$\frac{\pi - \alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \geqslant \frac{\pi}{6}$$

即 $\alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$. 所以

$$-\cos\alpha \leqslant -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

则 $$|PC|^2 - |PO|^2 \leqslant R^2(2\cos^2\beta - \cos\beta - 1) = R^2(2\cos\beta + 1)(\cos\beta - 1)$$

因为 $$0 < \cos\beta < 1$$

所以 $$2\cos\beta + 1 > 0, \cos\beta - 1 < 0$$

故 $$|PC|^2 - |PO|^2 < 0$$

即 $$|PC| < |PO|$$

证法 5　如图 42.4 所示，作 $OD \perp BC$ 于 D 及 A 关于 OD 的对称点 A'，则 A' 在 $\triangle ABC$ 外接圆上. 记 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则

$$\angle ACA' = \angle BCA - \angle BCA' = \angle BCA - \angle ABC \geqslant 30^\circ$$
$$DP = AA'/2 = R\cdot\sin\angle ACA' \geqslant R\cdot\sin 30^\circ = R/2$$

因为

$$DC < R, PC = DC - DP$$

所以 $PC < R/2$，即 $DP > PC$．又 $OP > DP$，所以 $OP > PC$，所以

$$\angle POC < \angle PCO$$

$$\angle CAB + \angle COP = \angle DOC + \angle COP < \angle DOC + \angle PCO = 90^\circ$$

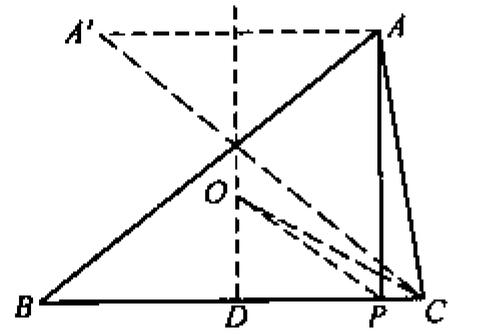


图 42.4

2 对所有正实数 a, b, c，证明

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

韩国命题

证法 1 原不等式可转化为

此证法属于陈雨

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ac}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ab}{c^2}}} \geqslant 1$$

令 $\alpha=\frac{bc}{a^2}, \beta=\frac{ac}{b^2}, \gamma=\frac{ab}{c^2}$．显然有 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$，且 $\alpha\beta\gamma=1$．命题转化为证

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\beta}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\gamma}} \geqslant 1$$

$$\Leftarrow \sqrt{(1+8\alpha)(1+8\beta)}+\sqrt{(1+8\beta)(1+8\gamma)}+\sqrt{(1+8\alpha)(1+8\gamma)} \geqslant \sqrt{(1+8\alpha)(1+8\beta)(1+8\gamma)}$$

令右式为 x，两边平方有

$$\Leftarrow 1+8(\alpha+\beta)+64\alpha\beta+1+8(\beta+\gamma)+64\beta\gamma+1+8(\alpha+\gamma)+64\alpha\gamma+2(\sqrt{1+8\alpha}+\sqrt{1+8\beta}+\sqrt{1+8\gamma})x \geqslant 1+8(\alpha+\beta+\gamma)+8^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+8^3\alpha\beta\gamma$$

$$\Leftarrow 8(\alpha+\beta+\gamma)+2(\sqrt{1+8\alpha}+\sqrt{1+8\beta}+\sqrt{1+8\gamma})x \geqslant 8^3-2 \quad ①$$

注意到

$$x^2=1+8(\alpha+\beta+\gamma)+8^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+8^3 \geqslant 1+8\cdot 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+8^2\cdot 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+8^3=729 \Rightarrow x \geqslant 27$$

式 ① 左边大于等于

$$8(\alpha+\beta+\gamma)+2\cdot 3x\sqrt[3]{\sqrt{1+8\alpha}\sqrt{1+8\beta}\sqrt{1+8\gamma}}=$$

$$8(\alpha+\beta+\gamma)+6x^{\frac{4}{3}} \geqslant 8\cdot 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+6\cdot 27^{\frac{4}{3}}=$$

$$8\cdot 3+6\cdot 81=8^3-2=\text{右边}$$

此证法属于刘胜飞

证法 2　用反证法.

假设存在某一组正数 a_0,b_0,c_0,使

$$\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+8b_0c_0}}+\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2+8a_0c_0}}+\frac{c_0}{\sqrt{c_0^2+8a_0b_0}}<1$$

令　$x=\dfrac{a_0}{\sqrt{a_0^2+8b_0c_0}},y=\dfrac{b_0}{\sqrt{b_0^2+8a_0c_0}},z=\dfrac{c_0}{\sqrt{c_0^2+8a_0b_0}}$

则　$\dfrac{x^2}{1-x^2}=\dfrac{a_0^2}{8b_0c_0},\dfrac{y^2}{1-y^2}\geqslant\dfrac{b_0^2}{8a_0c_0},\dfrac{z^2}{1-z^2}=\dfrac{c_0^2}{8a_0b_0}$

故

$$\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}=\frac{1}{8^3} \qquad ②$$

由 $x+y+z<1$,有

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}<\frac{x}{y+z}\cdot\frac{y}{x+z}\cdot\frac{z}{x+y}\leqslant$$
$$\frac{x}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xz}}\cdot\frac{z}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{8} \qquad ③$$

又由 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在$(0,1)$内图形是双曲线上一段凹弧,$f(x)$ 在$(0,1)$内是凹函数,由琴生不等式,有

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\leqslant 3\cdot\frac{\frac{x+y+z}{3}}{1+\frac{x+y+z}{3}}=$$
$$3\cdot\frac{1}{\frac{3}{x+y+z}+1}<$$
$$3\times\frac{1}{\frac{3}{1}+1}=\frac{3}{4}(x+y+z<1\text{ 可得})$$

故

$$\frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\cdot\frac{z}{1+z}\leqslant\left(\frac{\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}}{3}\right)^3<\frac{1}{4^3} \qquad ④$$

由 ②,③ 可得

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\cdot\frac{z}{1+z}<\frac{1}{8^3}$$

即　$$\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}<\frac{1}{8^3}$$

与式 ② 矛盾.从而原不等式成立.

此证法属于许建超

证法 3　引理(权方和不等式)　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+;b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}^+$.当 $\alpha\geqslant 0$ 或 $\alpha\leqslant -1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\geqslant\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^{\alpha+1}}{(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i)^{\alpha}}$$

由此,原不等式左边为

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\sum\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+8abc}}=\sum\frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}\geqslant$$

$$\frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{((\sum a^3)+24abc)^{\frac{1}{2}}} \quad ⑤$$

故原不等式左边大于等于 1,就只须式⑤的右边大于等于 1 即可.

$$\Leftrightarrow(\sum a)^3\geqslant(\sum a^3)+24abc\Leftrightarrow$$

$$\sum a^3+3\sum(a^2b+ab^2)+6abc\geqslant$$

$$\sum a^3+24abc\Leftrightarrow\sum(a^2b+ab^2)\geqslant 6abc$$

因为

$$\sum(a^2b+ab^2)\geqslant 6\sqrt[6]{\prod a^2b\prod ab^2}=6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=6abc$$

所以原不等式成立.

注 其中,$\sum$,$\prod$ 表示循环求和,循环求积.

证法 4 记

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}},z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$

则
$$x,y,z\in\mathbf{R}^+,x^2=\frac{a^2}{a^2+8bc}$$

即
$$\frac{1}{x^2}-1=\frac{8bc}{a^2}$$

类似地
$$\frac{1}{y^2}-1=\frac{8ac}{b^2},\frac{1}{z^2}-1=\frac{8ab}{c^2}$$

于是
$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=512$$

另一方面,若 $x+y+z<1$,则 $0<x<1,0<y<1,0<z<1$ 及

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{x^2y^2z^2}>$$

$$\frac{((x+y+z)^2-x^2)((x+y+z)^2-y^2)((x+y+z)^2-z^2)}{x^2y^2z^2}=$$

$$\frac{(y+z)(2x+y+z)(x+z)(2y+x+z)(x+y)(x+y+2z)}{x^2y^2z^2}\geqslant$$

$$\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot 2\sqrt{xz}\cdot 4\sqrt[4]{y^2xz}\cdot 2\sqrt{xy}\cdot 4\sqrt[4]{xyz^2}}{x^2y^2z^2}=$$

$$\frac{512x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=512$$

矛盾.

故 $x+y+z\geqslant 1$,即

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$$

推广

1. 一个引理

先叙述一个引理,以备引用.

引理 1　设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$,$m>0$ 或 $m<-1$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geqslant\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^{m+1}}{(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i)^m}$$

其中,等号成立当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

该引理中的不等式通常称为权方和不等式,是一个常用的不等式,此处不给出其证明.

2. 试题的一种简证

为了证明试题中的不等式,今证明它的等价形式

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+8abc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b^3+8abc}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c^3+8abc}}\geqslant 1 \qquad ①$$

由引理可知,① 的左端大于等于

$$\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+c^3+24abc)^{\frac{1}{2}}}$$

因此,只须证明

$$(a+b+c)^3\geqslant a^3+b^3+c^3+24abc \qquad ②$$

但　$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$

因此,只须证明

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\geqslant 6abc \qquad ③$$

因为易知

$$b^2a+c^2a\geqslant 2abc,c^2b+a^2b\geqslant 2abc,a^2c+b^2c\geqslant 2abc$$

将以上 3 个不等式相加就得出不等式 ③,从而 ② 成立,① 于是也成立,所以原不等式得证.

3. 试题的一种推广

试题给出的是关于3个正数 a,b,c 的不等式. 今给出关于4个正数 a,b,c,d 的一种推广形式，即

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+15bcd}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b^3+15cda}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c^3+15dab}}+\frac{d^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{d^3+15abc}}\geqslant 1$$

利用引理可以证明上述推广不等式成立，事实上，由引理知只须证明

此证法属于徐彦明

$$(a+b+c+d)^3\geqslant a^3+b^3+c^3+d^3+15abc+15bcd+15cda+15dab$$

但 $$(a+b+c+d)^3=\sum a^3+3\sum a^2b+6\sum abc$$

故只须证明 $\sum a^2b\geqslant 3\sum abc$ 即可，其中

$$\sum a^2b=a^2b+a^2c+a^2d+b^2a+b^2c+b^2d+c^2a+c^2b+c^2d+d^2a+d^2b+d^2c$$

$$\sum abc=abc+bcd+cda+dab$$

因为易得

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\geqslant 6abc$$
$$b^2c+b^2d+c^2b+c^2d+d^2b+d^2c\geqslant 6bcd$$
$$c^2d+c^2a+d^2c+d^2a+a^2c+a^2b\geqslant 6cda$$
$$d^2a+d^2b+a^2d+a^2b+b^2d+b^2c\geqslant 6dab$$

将以上4式相加之后除以2，就得出不等式

$$\sum a^2b\geqslant 3\sum abc$$

因此，关于4个正数 a,b,c,d 的推广不等式成立.

关于 $n(n\geqslant 2)$ 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，试题的一种推广形式可以写为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{a_i^{n-1}+\frac{(n^2-1)a_1a_2\cdots a_n}{a_i}}}\geqslant 1$$

特别地，当 $n=2$ 时，记 $a_1=a,a_2=b$，就得出不等式

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\geqslant 1$$

这个不等式容易直接证明.

其等价命题为：若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $xyz=1$，则

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\geqslant 1$$

为叙述方便，以其等价命题为基础可作如下推广.

定理1 若 $x_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,p)$，$\prod_{i=1}^{p}x_i=1$，$p,n\in\mathbf{N}^+$，

$\lambda \geqslant p^n - 1$,求证

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\lambda x_i}} \geqslant \frac{p}{\sqrt[n]{1+\lambda}} \qquad ④$$

定理 1 的证明 为叙述简便,先说明以下记号及性质,令

$$S = \prod_{i=1}^{p}(1+\lambda x_i)^{\frac{1}{n}}, t_i = S/(1+\lambda x_i)^{\frac{1}{n}}, i = 1,2,\cdots,p$$

$$R = (\sum_{i=1}^{p} t_i)^n - (\sum_{i=1}^{p} t_i^n)$$

则

$$\sum_{i=1}^{p} t_i^n = p + \lambda(p-1)(\sum_{i=1}^{p} x_i) + \lambda^2(p-2)(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} x_i x_j) + \cdots + \lambda^{p-1}(\sum_{1\leqslant i<j<\cdots<r\leqslant p} x_i x_j \cdots x_r) \qquad ⑤$$

$$S^n = 1 + \lambda(\sum_{i=1}^{p} x_i) + \lambda^2(\sum_{1\leqslant i<j<p} x_i x_j) + \cdots + \lambda^{p-1}(\sum_{1\leqslant i<j<\cdots<r\leqslant p} x_i x_j \cdots x_r) + \lambda^p \qquad ⑥$$

利用均值不等式可得

$$S^n \geqslant 1 + \lambda C_p^1 + \lambda^2 C_p^2 + \cdots + \lambda^{p-1} C_p^{p-1} + \lambda^p = (1+\lambda)^p \qquad ⑦$$

(式 ⑦ 利用了式 ⑨ 后的说明)

对于 R 按 t_i 展开后,把系数不等于 1 的所有项全都等价地写成系数为 1 的若干项之和,共 $p^n - p$ 项,每项次数为 n,所有 $p^n - p$ 项之积的次数为$n(p^n - p)$,各 t_i 的次数相等,所以积中各 t_i 的次数均为 $n(p^{n-1} - 1)$,利用 $p^n - p$ 元均值不等式,有

$$R \geqslant (p^n - p)(t_1 t_2 \cdots t_p)^{\frac{n(p^{n-1}-1)}{p^n - p}} = (p^n - p)(\prod_{i=1}^{p}(1+\lambda x_i))^{\frac{p-1}{p}}(\text{利用 ⑦}) \geqslant (p^n - p)(1+\lambda)^{p-1} \qquad ⑧$$

对 ④ 左边通分后,去分母,再两边 n 次方,再交叉相乘去右边的分母,则

$$④ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} t_i \geqslant \frac{p}{\sqrt[n]{1+\lambda}} S \Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{p} t_i)^n \geqslant \frac{p^n}{1+\lambda} S^n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} t_i^n + R \geqslant \frac{p^n}{1+\lambda} S^n \Leftrightarrow (1+\lambda)\sum_{i=1}^{p} t_i^n + (1+\lambda)R \geqslant p^n S^n \overset{\text{由⑤,⑥}}{\Leftrightarrow}$$

$$((1+\lambda)p - p^n) + ((1+\lambda)\lambda(p-1) - \lambda p^n)(\sum_{i=1}^{p} x_i) + ((1+\lambda)\lambda^2(p-2) - \lambda^2 p^n)(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} x_i x_j) + \cdots + ((1+\lambda)p^{n-1} - \lambda^{p-1} p^n)(\sum_{1\leqslant i<j<\cdots<r\leqslant p} x_i x_j \cdots x_r) - \lambda^p p^n + (1+\lambda)R \geqslant 0 \qquad ⑨$$

因为 $\lambda \geqslant p^n-1$，式⑨中各外括号内非负，又若 $x_i, x_j, \cdots, x_r$ 表示 $m(1 \leqslant m \leqslant p)$ 个数相乘，则 $\sum\limits_{1 \leqslant i<j<\cdots<r \leqslant p} x_i x_j \cdots x_r$ 表示 C_p^m 项的和，利用 C_p^m 元均值不等式有

$$\sum_{1 \leqslant i<j<\cdots<r \leqslant p} x_i x_j \cdots x_r \geqslant C_p^m$$

所以式⑨的左边大于等于

$$\begin{aligned}
&((1+\lambda)p-p^n)+((1+\lambda)\lambda(p-1)-\lambda p^n)C_p^1+\\
&((1+\lambda)\lambda^2(p-2)-\lambda^2 p^n)C_p^2+\cdots+\\
&((1+\lambda)\lambda^{p-1}-\lambda^{p-1}p^n)C_p^{p-1}-\\
&\lambda^p p^n+(1+\lambda)R
\end{aligned} \tag{10}$$

又利用式⑧，考虑到

$$(p-i)C_p^i=pC_{p-1}^i, 1 \leqslant i \leqslant p-1$$

所以

$$\begin{aligned}
⑩ \geqslant\ &(1+\lambda)p+(1+\lambda)\lambda(p-1)C_p^1+(1+\lambda)\lambda^2(p-2)C_p^2+\cdots+\\
&(1+\lambda)\lambda^{p-1}C_p^{p-1}-p^n(1+\lambda)^p+(1+\lambda)(p^n-p)(1+\lambda)^{p-1}=\\
&(1+\lambda)(p+\lambda pC_{p-1}^1+\lambda^2 pC_{p-1}^2+\cdots+\lambda^{p-1}pC_{p-1}^{p-1})+\\
&(p^n-p)(1+\lambda)^p-p^n(1+\lambda)^p=\\
&p(1+\lambda)^p+(p^n-p)(1+\lambda)^p-p^n(1+\lambda)^p=0
\end{aligned}$$

综合以上，易知定理 1 成立.

定理 2 若 $x_i \in \mathbf{R}^+ (i=1,2,\cdots,p)$，$\prod\limits_{i=1}^{p} x_i=1, p, n \in \mathbf{N}^+$，求证：(1) $\lambda=p^n-1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1+\lambda x_i}} \geqslant 1$；

(2) $\lambda \in (0, p^n-1)$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1+\lambda x_i}}>1$.

定理 2 的简略证明 记号同定理 1 的有关记号，注意 $\lambda \in (0, p^n-1]$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\lambda x_i}} \geqslant 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} t_i^n+R \geqslant S^n \Leftrightarrow &(p-1)+\lambda(p-2)(\sum_{i=1}^{p} x_i)+\\
&\lambda^2(p-3)(\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant p} x_i x_j)+\cdots+\\
&\lambda^{p-2}(\sum_{1 \leqslant i<j<\cdots<r \leqslant p} x_i x_j \cdots x_r)-\lambda^p+R \geqslant 0
\end{aligned} \tag{11}$$

利用⑧，则

$$\begin{aligned}
⑪ \Leftrightarrow\ &(p-1)+\lambda(p-2)C_p^1+\lambda^2(p-3)C_p^2+\cdots+\\
&\lambda^{p-2}C_p^{p-2}-\lambda^p+(p^n-p)(1+\lambda)^{p-1}=\\
&(p^n-1-\lambda)(1+\lambda)^{p-1} \geqslant 0
\end{aligned}$$

易知定理 2 成立.

龚浩生、宋庆将其推广为

定理3 若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+,\lambda\geqslant 8$,则

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \qquad ⑫$$

定理3的证明 令 $x=\frac{bc}{a^2},y=\frac{ca}{b^2},z=\frac{ab}{c^2}$,则 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz=1$.

于是,不等式⑫等价于

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda y}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda z}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}\Leftrightarrow \qquad ⑬$$

$$\sqrt{1+\lambda}(\sqrt{(1+\lambda y)(1+\lambda z)}+\sqrt{(1+\lambda z)(1+\lambda x)}+$$
$$\sqrt{(1+\lambda x)(1+\lambda y)})\geqslant 3\sqrt{(1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z)}\Leftrightarrow$$
$$(1+\lambda)(3+2\lambda(x+y+z)+\lambda^2(yz+zx+xy)+$$
$$2\sqrt{(1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z)}(\sqrt{1+\lambda x}+\sqrt{1+\lambda y}+\sqrt{1+\lambda z}))\geqslant$$
$$9(1+\lambda(x+y+z)+\lambda^2(yz+zx+xy)+\lambda^3)\Leftrightarrow$$
$$(2\lambda^2-7\lambda)(x+y+z)+(\lambda^3-8\lambda^2)\cdot$$
$$(yz+zx+xy)+2(1+\lambda)\sqrt{(1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z)}\cdot$$
$$(\sqrt{1+\lambda x}+\sqrt{1+\lambda y}+\sqrt{1+\lambda z})\geqslant 9\lambda^3-3\lambda+6 \qquad ⑭$$

因为

$$(1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z)=$$
$$1+\lambda(x+y+z)+\lambda^2(yz+zx+xy)+\lambda^3\geqslant$$
$$1+3\lambda\sqrt[3]{xyz}+3\lambda^2\sqrt[3]{(xyz)^2}+\lambda^3=1+3\lambda+3\lambda^2+\lambda^3=(1+\lambda)^3$$

所以式⑭左端大于等于

$$3(2\lambda^2-7\lambda)+3(\lambda^3-8\lambda^2)+6(1+\lambda)\cdot$$
$$((1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z))^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\geqslant$$
$$3\lambda^3-18\lambda^2-21\lambda+6(1+\lambda)((1+\lambda)^3)^{\frac{2}{3}}=9\lambda^3-3\lambda+6$$

故不等式⑭成立,从而不等式⑫成立.

对不等式⑬,作代换:$x\to\frac{y}{x},y\to\frac{z}{y},z\to\frac{x}{z},\lambda\to\frac{1}{\lambda}$,便可得到

推论 若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+,0<\lambda\leqslant\frac{1}{8}$,则

$$\sqrt{\frac{x}{\lambda x+y}}+\sqrt{\frac{y}{\lambda y+z}}+\sqrt{\frac{z}{\lambda z+x}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \qquad ⑮$$

值得指出的是:$0<\lambda<8$ 时,不等式⑫不成立.事实上,如果 $0<\lambda<8$,则

$$3>\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}>1$$

于是,可令 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}=1+\varepsilon,0<\varepsilon<2$

并且 $x = y = \frac{4-\varepsilon^2}{\lambda\varepsilon^2}, z = \frac{1}{xy} = (\frac{\lambda\varepsilon^2}{4-\varepsilon^2})^2$

可得 $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda y}} = \frac{1}{2}\varepsilon$

所以
$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda y}} + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda z}} =$$
$$\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda z}} < 1 + \varepsilon = \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

故不等式 ⑬ 不成立，从而不等式 ⑫ 不成立.

周金峰、谷焕春进一步把分母的 $\frac{1}{2}$ 次幂推广为 α 次幂($0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 或 $\alpha = 1$).

引理 2　设 $a > 0, b > 0, \alpha = 1$ 或 $\alpha \geqslant 2$，则
$$a^\alpha + b^\alpha \leqslant (a+b)^\alpha - (2^\alpha - 2)a^{\frac{\alpha}{2}}b^{\frac{\alpha}{2}} \quad ⑯$$

引理 2 的证明　不妨设 $a \neq b$，当 $\alpha = 1$ 或 $\alpha = 2$ 时结论显然成立. 下设 $\alpha > 2$. 式 ⑯ 两边同除以 $a^{\frac{\alpha}{2}}b^{\frac{\alpha}{2}}$，再记 $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$，则式 ⑯ 可化为
$$x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha} \leqslant (x + \frac{1}{x})^\alpha - (2^\alpha - 2)$$
所以只要证明
$$f(x) = (x + \frac{1}{x})^\alpha - (x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha}) - (2^\alpha - 2) \geqslant 0, x > 0, x \neq 1$$
不妨设 $0 < x < 1$. 不难算得
$$f'(x) = \frac{\alpha(x^2+1)^{\alpha-1}}{x^{\alpha+1}}((1-x^{2\alpha})(1+x^2)^{1-\alpha} - (1-x^2))$$

函数
$$\varphi(t) = (1-t^\alpha)(1+t)^{1-\alpha} - (1-t)$$
在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 中
$$\varphi''(t) = \alpha(1-\alpha)t^{\alpha-2}(1+t)^{-1-\alpha}(1-t^{2-\alpha}) < 0$$

$\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上严格下凸，又 $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$，所以当 $0 < t < 1$ 时，$\varphi(t) < 0$. 于是在 $(0,1)$ 中，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上严格递减，当 $0 < x < 1$ 时，$f(x) > f(1) = 0$.

引理 3　设 n 为正整数，$x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1$，若 $\alpha = 1$ 或 $\alpha \geqslant 2$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^{\alpha}}-1\right)\geqslant\left(\left(\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right)^{\alpha}-1\right)^{n}$$

引理 3 的证明 当 $n=1$ 时结论显然成立. 设 $x_1>0,x_2>0,s=x_1+x_2\leqslant 1$. 根据引理 2 和基本不等式得

$$\left(\frac{1}{x_1^{\alpha}}-1\right)\left(\frac{1}{x_2^{\alpha}}-1\right)=\frac{1}{x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}}(1-(x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha})+x_1^{\alpha}x_2^{\alpha})\geqslant$$

$$\frac{1}{x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}}(1-(x_1+x_2)^{\alpha}+(2^{\alpha}-2)x_1^{\frac{\alpha}{2}}x_2^{\frac{\alpha}{2}}+x_1^{\alpha}x_2^{\alpha})=$$

$$\frac{1-s^{\alpha}}{(x_1x_2)^{\alpha}}+\frac{2^{\alpha}-2}{(x_1x_2)^{\frac{\alpha}{2}}}+1\geqslant$$

$$(1-s^{\alpha})\left(\frac{2}{s}\right)^{2\alpha}+(2^{\alpha}-2)\left(\frac{2}{s}\right)^{\alpha}+1\geqslant\left(\left(\frac{2}{s}\right)^{\alpha}-1\right)^{2}$$

即 $n=2$ 时结论成立.

假设 $n=k\geqslant 2$ 时结论成立. 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,k+1)$, $s=\sum\limits_{i=1}^{k+1}x_i\leqslant 1$. 不妨设 $x_i=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k+1}\{x_i\}$, 注意到

$$\frac{k-1}{k+1}s+x_1\leqslant\frac{k-1}{k+1}s+\frac{s}{k+1}=\frac{k}{k+1}s<1$$

$$\frac{1}{k}\left(\frac{k-1}{k+1}s+x_1\right)+\frac{1}{k}(s-x_1)=\frac{2}{k+1}s<1$$

根据归纳法假设和 $n=2$ 时的结论

$$\left(\left(\frac{k+1}{s}\right)^{\alpha}-1\right)^{k-1}\prod_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{x_i^{\alpha}}-1\right)=$$

$$\left(\left(\frac{k+1}{s}\right)^{\alpha}-1\right)^{k-1}\left(\frac{1}{x_1^{\alpha}}-1\right)\prod_{i=2}^{k+1}\left(\frac{1}{x_i^{\alpha}}-1\right)\geqslant$$

$$\left(\left(\frac{k}{\frac{k-1}{k+1}s+x_1}\right)^{\alpha}-1\right)^{k}\left(\left(\frac{k}{s-x_1}\right)^{\alpha}-1\right)^{k}=$$

$$\left(\left(\left(\frac{k}{\frac{k-1}{k+1}s+x_1}\right)^{\alpha}-1\right)\left(\left(\frac{k}{s-x_1}\right)^{\alpha}-1\right)\right)^{k}\geqslant$$

$$\left(\left(\left(\frac{k+1}{s}\right)^{\alpha}-1\right)^{2}\right)^{k}=\left(\left(\frac{k+1}{s}\right)^{\alpha}-1\right)^{2k}$$

得

$$\prod_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{x_i^{\alpha}}-1\right)\geqslant\left(\left(\frac{k+1}{s}\right)^{\alpha}-1\right)^{k+1}$$

即 $n=k+1$ 时结论也成立.

由上所证并根据数学归纳法, 对一切正整数 n 结论都成立.

定理 4 设 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $\alpha=1,x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant n^{\frac{1}{\alpha}}-1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+x_i)^{\alpha}}\geqslant\frac{n}{(1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^{\alpha}}$$

定理4的证明 记 $g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$. 设 $y_i=\dfrac{1}{(1+x_i)^{\alpha}}$, 则

$$\frac{1}{y_i^{\frac{1}{\alpha}}}-1=x_i, i=1,2,\cdots,n$$

所以

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i^{\frac{1}{\alpha}}}-1\right)=x_1x_2\cdots x_n=g^n \qquad ⑰$$

注意到 $g\geqslant n^{\frac{1}{\alpha}}-1$, 所以如果结论不成立, 则

$$\sum_{i=1}^{n}y_i<\frac{n}{(1+g)^{\alpha}}\leqslant 1$$

$$\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}y_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1>g$$

根据引理3, 就有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i^{\frac{1}{\alpha}}}-1\right)\geqslant\left(\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}y_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right)^n>g^n$$

这与式⑰矛盾.

3 21个女孩和21个男孩参加一次数学竞赛.

(1) 每一个参赛者至多解出了6道题;

(2) 对于每一个女孩和每一个男孩, 至少有一道题被这一对孩子都解出.

证明: 有一道题, 至少有3个女孩和至少有3个男孩都解出.

德国命题

证明 假设每道题被至多2个男孩或至多2个女孩解出.

设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 为所有至多2个女孩解出的题目的集合.

$B=\{A_{k+1},A_{k+2},\cdots,A_{k+m}\}$ 为不在 A 中出现且至多2个男孩解出的题目的集合.

21个男孩分别记为 $p_1,p_2,\cdots,p_{21}$, 21个女孩分别记为 $q_1,q_2,\cdots,q_{21}$, 另设共有 x_j 个选手解出 A_j, $1\leqslant j\leqslant k+m$. 由已知, 有

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+m}\leqslant 6\cdot 42=252$$

不妨设每个题目至少被1个男孩和1个女孩解出, 从而

$$x_j\geqslant 2, 1\leqslant j\leqslant k+m$$

将解出同一个题目的 p_i, q_j 为一个组合, 由已知, 共有 21^2 个组合.

对 A_j 而言，至多有

$$\max\{(x_j-1)\cdot 1,(x_j-2)\cdot 2\}\leqslant 2x_j-3$$

个组合同时解出 A_j. 所以

$$21^2\leqslant(2x_1-3)+(2x_2-3)+\cdots+(2x_{k+m}-3)=$$
$$2(x_1+x_2+\cdots+x_{k+m})-3k\leqslant$$
$$2\cdot 6\cdot 42-3(k+m)$$

从而

$$k+m\leqslant 21 \quad ①$$

另一方面，对任意 p_j，在 A 中至多做出 6 道题，故至多有 $2\cdot 6=12$ 个女孩与 p_j 各同时解出了 A 中某个题. 所以，至少有 $21-12=9$ 个女孩与 p_j 各同时解出了 B 中某个题，即 p_j 必解出了 B 中某个题. 而 B 中某个题至多被 2 个男孩解出，从而 $21\leqslant 2m$，即 $m\geqslant 11$.

同理，$k\geqslant 11$. 于是

$$m+k\geqslant 22$$

此与 ① 矛盾. 故命题成立.

4 设 n 为奇数，且大于 1，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为给定的整数，对于 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 个排列中的每一个排列 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，记 $S(a)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_ia_i$. 证明：有两个排列 b 和 c，$b\neq c$，使得 $S(b)-S(c)$ 能被 $n!$ 整除.

加拿大命题

证明 假设对任意两个不同的 b 和 c，均有

$$S(b)-S(c)\not\equiv 0(\bmod n!)$$

则当 a 取遍所有 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 个排列时，$S(a)$ 遍历模 $n!$ 的一个完全剩余类，且每个剩余类恰经过一次. 所以

$$\sum_a S(a)\equiv 1+2+\cdots+n!=\frac{n!}{2}(n!+1)(\bmod n!) \quad ①$$

其中，$\sum\limits_a$ 表示对 a 取遍 $n!$ 个排列求和.

另一方面

$$\sum_a S(a)=\sum_a\sum_{i=1}^{n}k_ia_i=\sum_{i=1}^{n}k_i\sum_a a_i=\frac{n!(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i \quad ②$$

由于 n 为大于 1 的奇数，则由 ① 有

$$\sum_a S(a)\equiv\frac{n!}{2}(\bmod n!)$$

由 ② 有

$$\sum_a S(a)\equiv 0(\bmod n!)$$

矛盾. 故命题成立.

5 在 $\triangle ABC$ 中，AP 平分 $\angle BAC$，交 BC 于 P，BQ 平分 $\angle ABC$，交 CA 于 Q. 已知 $\angle BAC=60°$ 且 $AB+BP=AQ+QB$. 问 $\triangle ABC$ 各角的度数的可能值是多少?

以色列命题

解法 1 设 $A=\angle BAC$，$B=\angle ABC$，$C=\angle ACB$.

在 AQ 的延长线上作 E，使 $QB=QE$，连结 BE 交直线 AP 于 F，在 AB 的延长线上作 D，使得 $BD=BP$. 则

$$\angle BDP=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle ABQ$$

所以，$BQ \parallel DP$. 于是

$$AB+BP=AQ+QB$$

等价于

$$AD=AE \quad ①$$

下面对点 E 是否与点 C 重合分别讨论.

ⅰ $C=E$. 我们有 $BQ=QC$. 所以 $\angle QBC=\angle QCB$，于是

$$B=2\angle QBC=2\angle QCB=2C$$

又因
$$B+C=180°-A=120°$$

所以
$$B=80°, C=40°$$

此时
$$\angle BDP=\frac{1}{2}\angle ABC=40°=\angle ACP$$

$$\angle DAP=\angle PAC, AP=PA$$

所以，$\triangle APD \cong \triangle APC$，故 $AD=AC$，由 ① 知

$$AB+BP=AQ+QB$$

故 $B=80°$，$C=40°$，$A=60°$ 为解.

ⅱ $C\neq E$. 若 $AB+BP=AQ+QB$，则 $AD=AE$，又 PA 平分 $\angle DAE$，故 D，E 关于直线 AP 对称. 从而，有

$$\angle ADF=\angle AEB=\angle QBE \quad ②$$

而

$$\angle BDP=\angle ABQ=\angle QBC \quad ③$$

于是，$\angle PDF=\angle PBF$，所以，B，D，F，P 四点共圆，从而

$$\angle BDF=\angle BPA \quad ④$$

由式 ②，有

$$\angle BDF=\angle AEF=\frac{1}{2}\angle AQB=\frac{1}{2}\left(\frac{B}{2}+C\right)$$

$$\angle APB=\frac{A}{2}+C=30°+C$$

由式 ④ 得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{B}{2}+C\right)=30°+C$$

所以 $$\frac{B}{4}=30^\circ+\frac{C}{2}$$
因为 $$B+C=120^\circ$$
所以 $$30^\circ-\frac{C}{4}=30^\circ+\frac{C}{2}$$
从而与 $C=0^\circ$ 矛盾.

于是,此时 $\triangle ABC$ 不存在.

综合 ⅰ,ⅱ 知,所求可能值为
$$B=80^\circ,C=40^\circ,A=60^\circ$$

解法 2 延长 AB 至 B' 使 $BB'=BP$,在射线 QC 上取 C',使 $QC'=QB$,如图 42.5 或图 42.6 所示.

此解法属于杨肖

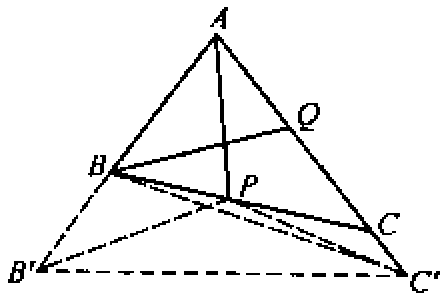


图 42.5

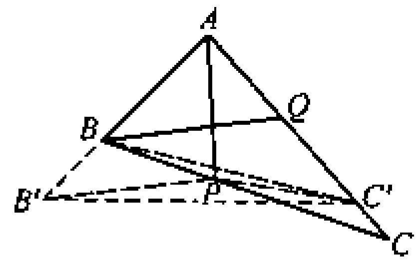


图 42.6

若 C,C' 不重合,则连 $B'C',B'P,C'P,BC'$.因为
$$AB+BP=AQ+QB$$
所以 $$AB+BB'=AQ+QC'$$
即 $$AB'=AC'$$

因为 $\angle B'AC'=60^\circ$,所以 $\triangle AB'C'$ 为正三角形.

因为 AP 平分 $\angle B'AC'$,所以 AP 为 $\triangle AB'C'$ 的对称轴.所以
$$\angle AB'P=\angle AC'P,B'P=C'P$$

因为
$$\angle ABC=\angle ABQ+\angle CBQ=\angle BB'P+\angle BPB'$$
$$\angle ABQ=\angle CBQ,\angle BB'P=\angle BPB'$$
所以 $$\angle QBC=\angle BB'P=\angle QC'P=\alpha$$

因为 $BQ=QC'$,有 $\angle QBC'=\angle QC'B=\beta$ 所以
$$\angle PBC'=\angle PC'B=\alpha-\beta \text{ 或 } \beta-\alpha$$
所以 $$BP=C'P=B'P=BB'$$
则 $$\angle BB'P=60^\circ,\angle ABC=120^\circ$$

因为 $\angle BAC=60^\circ$,矛盾,所以 C,C' 重合.

同理,可得 $B'P=CP$,如图 42.7 所示.则 $\angle PB'C=\angle PCB'$.

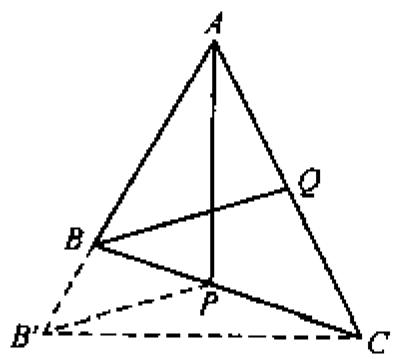


图 42.7

因为
$$\angle BPB'=\angle BB'P=\angle PB'C+\angle PCB'=\gamma$$
所以 $$\angle PB'C=\frac{\gamma}{2}$$
$$\gamma+\frac{\gamma}{2}=60^\circ,\gamma=40^\circ$$
$$\angle ABC=2\gamma=80^\circ$$

解法 3 在 $\triangle ABQ$ 中,由正弦定理知

此解法属于刘文光

$$\frac{AQ}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{AB}{\sin\left(\frac{B}{2}+60^\circ\right)}=\frac{BQ}{\sin 60^\circ}$$

故 $$AQ=\frac{AB\cdot\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{B}{2}+60^\circ\right)},BQ=\frac{AB\cdot\sin 60^\circ}{\sin\left(\frac{B}{2}+60^\circ\right)}$$

同理 $$BP=\frac{AB\cdot\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ+B)}$$

又因为

$$AB+BP=AQ+BQ,\angle B+\angle C=120^\circ,0^\circ<\angle B<120^\circ$$

所以 $$1+\frac{\sin 30^\circ}{\sin(B+30^\circ)}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{B}{2}+60^\circ\right)}+\frac{\sin 60^\circ}{\sin\left(\frac{B}{2}+60^\circ\right)}$$

于是 $$1+\frac{\sin 30^\circ}{\sin(B+30^\circ)}=\frac{\cos\left(\frac{B}{4}-30^\circ\right)}{\cos\left(\frac{B}{4}+30^\circ\right)}$$

所以 $$\frac{\sin 30^\circ}{\sin(B+30^\circ)}=\frac{\sin\frac{B}{4}}{\cos\left(\frac{B}{4}+30^\circ\right)}$$

所以

$$\sin 30^\circ\cdot\cos\left(\frac{B}{4}+30^\circ\right)=\sin\frac{B}{4}\cdot\sin(B+30^\circ)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)-\cos\left(\frac{5B}{4}+30^\circ\right)\right)$$

则 $$\cos\left(\frac{B}{4}+30^\circ\right)+\cos\left(\frac{5B}{4}+30^\circ\right)=\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)$$

所以

$$2\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)\cdot\cos\frac{B}{2}=\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right) \quad ⑤$$

当 $\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)=0$ 时,式⑤成立.则 $\frac{3\angle B}{4}+30^\circ=90^\circ$,故 $\angle B=80^\circ$.

当 $\cos\left(\frac{3B}{4}+30^\circ\right)\neq 0$ 时,由式⑤知,$\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$.则 $\angle B=120^\circ$,与题意不符.

综上所述,$\triangle ABC$ 的内角为

$$\angle BAC=60^\circ,\angle ABC=80^\circ,\angle ACB=40^\circ$$

解法 4 记 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A,B,C,则在 $\triangle ABQ$ 中,有

$$\frac{AQ}{\sin(B/2)}=\frac{BQ}{\sin 60^\circ}=\frac{AB}{\sin(180^\circ-60^\circ-B/2)}$$

所以 $$AQ=\frac{AB\cdot\sin(B/2)}{\sin(60^\circ+B/2)}$$

$$BQ = \frac{\sqrt{3}AB}{2\sin(60° + B/2)}$$

在 $\triangle ABC$ 中，有

$$\frac{BP}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin(180° - 30° - B)}$$

所以
$$BP = \frac{AB}{2\sin(30° + B)}$$

代入
$$AB + BP = AQ + BQ$$

得
$$1 + \frac{1}{2\sin(30° + B)} = \frac{\sin(B/2)}{\sin(60° + B/2)} + \frac{\sqrt{3}}{2\sin(60° + B/2)}$$

所以
$$(2\sin(30° + B) + 1)\sin(60° + B/2) = (2\sin(B/2) + \sqrt{3})\sin(30° + B)$$

即
$$2\sin(30° + B)(\sin(60° + B/2) - \sin(B/2)) + \sin(60° + B/2) - \sqrt{3}\sin(30° + B) = 0$$

因为上式左边等于

$$2\sin(30° + B) \cdot \cos(30° + B/2) + \sin(60° + B/2) - \sqrt{3}\sin(30° + B) =$$
$$\sin(60° + 3B/2) + \sin(B/2) + \sin(60° + B/2) - \sqrt{3}\sin(30° + B) = \sin(60° + 3B/2) +$$
$$\sqrt{3}\sin(30° + B/2) - \sqrt{3}\sin(30° + B) =$$
$$2\sin(30° + 3B/4) \cdot \cos(30° + 3B/4) - 2\sqrt{3}\cos(30° + 3B/4) \cdot \sin(B/4) =$$
$$2\cos(30° + 3B/4)(\sin(30° + 3B/4) - \sqrt{3}\sin(B/4))$$

$$\sin(30° + 3B/4) - \sqrt{3}\sin(B/4) =$$
$$\frac{1}{2}\cos\frac{3B}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{3B}{4} - \sqrt{3}\sin\frac{B}{4} =$$
$$\frac{1}{2}\cos\frac{3B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(3\sin\frac{B}{4} - \sin^3\frac{B}{4}\right) - \sqrt{3}\sin\frac{B}{4} =$$
$$\frac{1}{2}\cos\frac{3B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{B}{4}\left(1 - \sin^2\frac{B}{4}\right)$$

因为 $0 < B < 120°$，所以 $0 < 3B/4 < 90°$。所以

$$\sin(30° + 3B/4) - \sqrt{3}\sin(B/4) > 0$$

所以
$$\cos(30° + 3B/4) = 0$$

所以
$$30° + 3B/4 = 90°, B = 80°$$

所以 $\triangle ABC$ 的各角只有一种值 $A = 60°, B = 80°, C = 40°$.

解法 5 设 $\triangle ABC$ 的三内角分别为 A, B, C，令 $A = 2\theta$（作更一般的探讨），$B = 2\alpha$.

此解法属于傅爱平、龚浩生

在 $\triangle ABP$ 中，$\angle BAP = \theta$，$\angle ABP = 2\alpha$，$\angle APB = 180° - (2\alpha + \theta)$，由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin(2\alpha+\theta)}=\frac{BP}{\sin\theta}=\frac{AP}{\sin 2\alpha}$$

所以 $$AB+BP=\frac{\sin(2\alpha+\theta)+\sin\theta}{\sin 2\alpha}AP$$

在 $\triangle ABQ$ 中，$\angle BAQ=2\theta$，$\angle ABQ=\alpha$，$\angle AQB=180^\circ-(\alpha+2\theta)$，由正弦定理得

$$\frac{AQ}{\sin\alpha}=\frac{QB}{\sin 2\theta}=\frac{AB}{\sin(\alpha+2\theta)}$$

所以 $$AQ+QB=\frac{\sin\alpha+\sin 2\theta}{\sin(\alpha+2\theta)}AB$$

因为 $$AB+BP=AQ+QB \qquad ⑥$$

所以 $$\frac{\sin(2\alpha+\theta)+\sin\theta}{\sin 2\alpha}AP=\frac{\sin\alpha+\sin 2\theta}{\sin(\alpha+2\theta)}AB$$

所以

$$\frac{2\sin(\alpha+\theta)\cdot\cos\alpha}{\sin 2\alpha}\sin 2\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha+2\theta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-2\theta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+2\theta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+2\theta}{2}}\sin(2\alpha+\theta)$$

所以

$$2\sin(\alpha+\theta)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha+2\theta}{2}=\cos\frac{\alpha-2\theta}{2}\cdot\sin(2\alpha+\theta)$$

即 $$\sin(\alpha+\theta)\left(\cos\frac{3\alpha+2\theta}{2}+\cos\frac{\alpha-2\theta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha-2\theta}{2}\cdot\sin(2\alpha+\theta)$$

所以 $$\sin(\alpha+\theta)\cdot\cos\frac{3\alpha+2\theta}{2}+\cos\frac{\alpha-2\theta}{2}\cdot(\sin(\alpha+\theta)-\sin(2\alpha+\theta))=0$$

即

$$0=\sin(\alpha+\theta)\cdot\cos\frac{3\alpha+2\theta}{2}+\cos\frac{\alpha-2\theta}{2}\cdot 2\cos\frac{3\alpha+2\theta}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{3\alpha+2\theta}{2}\left(\sin(\alpha+\theta)-2\cos\frac{\alpha-2\theta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$\cos\frac{3\alpha+2\theta}{2}(\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)-\sin\theta)=$$
$$\cos\frac{3\alpha+2\theta}{2}(2\cos\alpha\cdot\sin\theta-\sin\theta)$$

因为 θ 为锐角，所以 $\sin\theta\neq 0$，所以

$$\cos\frac{3\alpha+2\theta}{2}(2\cos\alpha-1)=0 \qquad ⑦$$

因为 $A=2\theta=60^\circ$，所以 $B=2\alpha<120^\circ$，$\alpha<60^\circ$，故

$$\cos\alpha>\frac{1}{2},2\cos\alpha-1>0$$

所以由式 ⑦ 得 $$\cos\frac{3\alpha+60^\circ}{2}=0$$

显然 $0° < 3\alpha + 60° < 240°$

所以 $3\alpha + 60° = 180°$

所以 $B = 2\alpha = 80°, C = 40°$

推广 易知,当 $A = 2\theta > 60°$ 时,有 $2\cos\alpha - 1 > 0$,由式⑦得

$$\cos\frac{3\alpha + 2\theta}{2} = 0$$

显然 $0° < 3\alpha + 2\theta < 360°$

所以 $3\alpha + 2\theta = 180° = A + B + C = 2\theta + 2\alpha + C$

所以 $C = \alpha$,从而 $B = 2C$.

当 $A = 2\theta < 60°$ 时,则由式⑦得

$$\cos\frac{3\alpha + 2\theta}{2} = 0$$

或 $2\cos\alpha - 1 = 0$

于是 $B = 2C$

或 $B = 2\alpha = 120°, C = 60° - A$

故我们可得如下一般结论.

命题 1 AP, BQ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,$AB + BP = AQ + QB$.

(1) 若 $\angle BAC \geqslant 60°$,则 $\angle ABC = 2\angle ACB$;

(2) 若 $\angle BAC < 60°$,则 $\angle ABC = 2\angle ACB$,或 $\angle ABC = 120°$.

又显然,从式②开始往上到式①每步都可逆,故还可得如下两个有趣的命题.

命题 2 AP, BQ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,若 $\angle ABC = 120°$,则

$$AB + BP = AQ + QB$$

命题 3 AP, BQ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,若 $\angle ABC = 2\angle ACB$,则

$$AB + BP = AQ + QB$$

解法 6 如图 42.8 所示,在 AB 的延长线上取点 D,使得 $BD = BP$;在 AQ 的延长线上取点 E,使得 $QE = QB$.连结 PD,PE,则

此解法属于傅善林

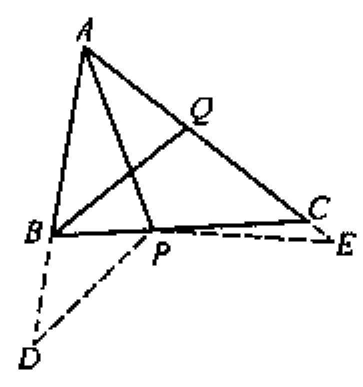


图 42.8

$$AD = AB + BP = AQ + QB = AE$$

且 $\triangle ADP \cong \triangle AEP$

故 $\angle AEP = \angle ADP = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle QBC$

即 $\angle QEP = \angle QBP$

下面的证明中要用到如下的引理.

引理 等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，平面内一点 P 满足 $\angle ABP = \angle ACP$，则点 P 在 BC 的垂直平分线上或在线段 BC 内.（证明略）

在等腰 $\triangle QBE$ 中，由引理可知，点 P 在 BE 的垂直平分线上或在线段 BE 内.

(1) 若点 P 在 BE 的垂直平分线上，则 $PB = PE$. 所以

$$PD = PE = PB = BD$$

故 $\triangle PBD$ 是等边三角形.

从而，$\angle ABC = 120°$，与 $\angle BAC = 60°$ 矛盾.

(2) 若点 P 在线段 BE 内，则 C, E 重合. 易得 $\angle ABC = 80°$，$\angle ACB = 40°$.

综合(1)，(2) 知，所求的可能值为

$$\angle ABC = 80°, \angle ACB = 40°, \angle BAC = 60°$$

从此题的推理过程不难得出更一般的结论：

在 $\triangle ABC$ 中，AP 平分 $\angle BAC$，交 BC 于点 P，BQ 平分 $\angle ABC$，交 CA 于点 Q，$AB + BP = AQ + QB$. 记 $\angle BAC = \alpha$.

(1) 若 $\alpha \in [60°, 180°)$，则

$$\angle ABC = 2\angle ACB = \frac{2}{3}(180° - \alpha)$$

(2) 若 $\alpha \in (0°, 60°)$，则

$$\angle ABC = 2\angle ACB = \frac{2}{3}(180° - \alpha)$$

或
$$\angle ABC = 120°, \angle ACB = 60° - \alpha$$

6 设 a, b, c, d 为整数，$a > b > c > d > 0$，且

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

证明：$ab + cd$ 不是素数.

保加利亚命题

证明 用反证法，若 $p = ab + cd$ 为素数，由于

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c) = (b + d)^2 - (a - c)^2$$

则
$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + d^2 + bd$$

将 $a = \frac{p - cd}{b}$ 代入上式，得

$$\frac{(p - cd)^2}{b^2} - \frac{p - cd}{b}c + c^2 = b^2 + d^2 + bd$$

即
$$p(p - 2cd - bc) = (b^2 - c^2)(b^2 + d^2 + bd)$$

因为
$$p = ab + cd > ab > b^2 > b^2 - c^2 > 0$$

所以
$$(p, b^2 - c^2) = 1$$

于是
$$p \mid b^2 + d^2 + bd$$

但 $$p = ab + cd > b^2 + d^2$$

从而 $$2p > 2(b^2 + d^2) > (b + d)^2 > b^2 + d^2 + bd$$

所以 $$p = b^2 + d^2 + bd$$

于是 $$ab + cd = b^2 + d^2 + bd$$

即 $$d(c - d) = b(b + d - a)$$

由于 $b > c > d$，则

$$b > c - d > 0$$

这样$(b,d) > 1$，意味着$(b,d) \mid p$，p 不是素数.矛盾.

故命题成立.



白宫

第 43 届国际数学奥林匹克

英国,2002

哥伦比亚命题

1 设 n 为任意给定的正整数,T 为平面上所有满足 $x+y<n$,x,y 为非负整数的点 (x,y) 所组成的集合,T 中每一点 (x,y) 均被染上红色或蓝色,满足:若 (x,y) 是红色,则 T 中所有满足 $x'\leqslant x,y'\leqslant y$ 的点 (x',y') 均为红色,如果 n 个蓝点的横坐标各不相同,则称这 n 个蓝点所组成的集合为一个 X - 集;如果 n 个蓝点纵坐标各不相同,则称这 n 个蓝点所组成的集合为一个 Y - 集.证明:X - 集的个数和 Y - 集的个数一样多.

证法 1　设红点个数为 m,X - 集数目为 t,Y - 集数目为 s.对 $m,0\leqslant m\leqslant\frac{n(n+1)}{2}$,进行归纳证明.

(1) 当 $m=0$ 时,由乘法原理,$s=t=n!$,命题成立.

(2) 假设 $m=k\left(0\leqslant k<\frac{n(n+1)}{2}\right)$ 时命题成立.

(3) 对于 $m=k+1$,设点 $P(x_0,y_0)$ 是使 x_0+y_0 最大的红点之一.那么,将 P 改为蓝点.由于不存在其他红点 (x,y),$x\geqslant x_0$,$y\geqslant y_0$,因此,这仍然是一个满足条件的集合,记为 T'.对它类似地定义 t',s'.

对于 T',设它在 $x=i(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 列上的蓝点有 a_i 个,在 $y=j(0\leqslant j\leqslant n-1)$ 行上的蓝点有 b_j 个.那么

$$t'=\prod_{i=0}^{n-1}a_i,s'=\prod_{j=0}^{n-1}b_j$$

由归纳假设,有 $t'=s'$,即

$$\prod_{i=0}^{n-1}a_i=\prod_{j=0}^{n-1}b_j$$

对于改变前的集合 T,有

$$t=\Big(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq x_0}}^{n-1}a_i\Big)(a_{x_0}-1),s=\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq y_0}}^{n-1}b_j\Big)(b_{y_0}-1)$$

在 $x=x_0$ 列上,纵坐标大于等于 y_0 的 T 中的点有 $n-x_0-y_0$ 个,所以,$a_{x_0}=n-x_0-y_0$.同理,$b_{y_0}=n-x_0-y_0$.故 $a_{x_0}=b_{y_0}$,

于是

$$\left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq x_0}}^{n-1} a_i\right)(a_{x_0}-1)=\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq y_0}}^{n-1} b_j\right)(b_{y_0}-1)$$

即 $t=s$. 故对 $m=k+1$ 时，命题也成立.

因此，对一切 $0\leqslant m\leqslant\frac{n(n+1)}{2}$，命题成立.

证法 2 对 $0\leqslant i\leqslant n-1$，记直线 $x=i$ 上的蓝点个数为 a_i，直线 $y=i$ 上的蓝点个数为 b_i，根据乘法原理，X - 集的个数为 $a_0a_1a_2\cdots a_{n-1}$，Y - 集的个数为 $b_0b_1b_2\cdots b_{n-1}$.

我们对 n 归纳证明

$$T_n=\{(x,y)\mid x+y<n,x,y\in\mathbf{Z}^+\}$$

的符合本题条件的任一染色方案(以下简称合格的染色)所给出的无序数组 $A=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 与 $B=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$ 相同，从而 $a_1a_2\cdots a_{n-1}=b_1b_2\cdots b_{n-1}$.

$n=1$ 时 $T_1=\{(0,0)\}$，所以 $A=B=(0)$ 或 (1).

设 $n=k$ 时结论成立，令 T_{k+1} 的任一合格染色方案给出的数组为 $A=(a_0,a_1,\cdots,a_{k-1},a_k)$ 和 $B=(b_0,b_1,\cdots,b_{k-1},b_k)$，去掉 T_{k+1} 中底行(即直线 $y=0$)上的 k 个点，余下的点可看成 T_k 的一种合格染色，设它给出的数组为 A',B'. 显然，$B'=(b_1,b_2,\cdots,b_k)$. 当 $b_0=0$ 时，直线 $y=0$ 上没有蓝点，所以 $a_k=0$，且 $A'=(a_0,a_1,\cdots,a_{k-1})$. 当 $1\leqslant b_0\leqslant k$ 时，由合格条件，直线 $y=0$ 上的 b_0 个蓝点靠右边($k-b_0$ 个红点靠左边)，而且每个蓝点的上方全是蓝点. 因此，数组 A 的末尾 b_0 个元素为 $b_0,b_0-1,\cdots,1$，从而

$$A'=(a_0,a_1,\cdots,a_{k-b_0},b_0-1,\cdots,1)$$

总之，A',B' 分别由 A,B 去掉同一个数 b_0 得到. 由归纳假设，$A'=B'$，从而 $A=B$. 证毕.

2 BC 为圆 Γ 的直径，Γ 的圆心为 O，A 为 Γ 上的一点，$0°<\angle AOB<120°$，D 是弧 AB(不含 C 的弧)的中点，过 O 平行于 DA 的直线交 AC 于 I，OA 的垂直平分线交 Γ 于 E,F. 证明：I 是 $\triangle CEF$ 的内心.

韩国命题

证法 1 如图 43.1 所示，由题设 A 为 $\widehat{EAF}$ 的中点，于是，CA 为 $\angle ECF$ 的平分线. 又由于

$$OA=OC,\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle OAC$$

则 $OD /\!/ IA$.而 $AD /\!/ IO$,因此,$ADOI$ 为平行四边形.

又 $OEAF$ 为菱形,有

$$AI = OD = OE = AF$$

所以 $\angle IFE = \angle IFA - \angle EFA = \angle AIF - \angle ECA = \angle AIF - \angle ICF = \angle IFC$

即 IF 为 $\angle EFC$ 的平分线.故 I 是 $\triangle CEF$ 的内心.

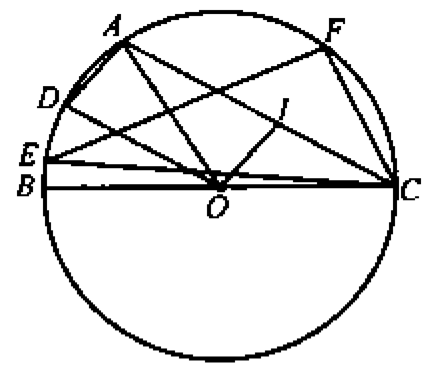


图 43.1

注　条件 $\angle AOB < 120°$ 保证点 I 在 $\triangle CEF$ 的内部.

此证法属于林常

证法 2　半径 OA 垂直于弦 EF,所以 OA 平分 EF 及 $\overset{\frown}{EF}$,有

$$\angle ECA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AF} = \angle ACF$$

即 CJ 平分 $\angle ECF$.

因为 D 为 $\overset{\frown}{AB}$ 中点及 $OA = OC$,所以

$$\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle OAC$$

又因为 $AD /\!/ OJ$,所以 $\angle OAD = \angle AOJ$,故 $\triangle AOD \cong \triangle OAJ$,$AD = OJ$,$AJOD$ 为平行四边形,DJ 与 OA 互相平分,但 OA 与 EF 也互相平分,所以 DJ 与 EF 亦互相平分,$EJFD$ 也是平行四边形,$EJ /\!/ DF$.

$$\angle JEF = \angle EFD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AD})$$

$$\angle CEF = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CBF} = \frac{1}{2}(180° + \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AF})$$

因为 OA 与 EF 互相垂直平分,所以 $AEOF$ 为菱形,$AE = AF = OF$,所以 $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF} = 60°$,代入上式得

$$\angle CEF = \frac{1}{2}(120° + 2\overset{\frown}{AD}) = 2\angle JEF$$

所以 EJ 平分 $\angle CEF$.因此,J 是 $\triangle CEF$ 的内心.

注　当 $120° < \angle AOB < 180°$ 时,类似可证 J 是 $\triangle CEF$ 的旁切圆心.

此证法属于程华

证法 3　连结 AE,OE,JE,由题设弦 EF 垂直平分半径 OA,故

$$\angle ECJ = \angle FCJ, AE = OE = AF$$

因为 D 为弦 AB 的中点,所以 $\angle DOB = \angle ACB$,即 $AC /\!/ OD$,从而四边形 $AJOD$ 为平行四边形.所以

$$AJ = OD = OE = AE$$

$$\angle AEJ = \angle AJE, \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF} = 60°$$

因为 $\angle AEJ = \angle AEF + \angle FEJ = 30° + \angle FEJ$

$\angle AJE = \angle ACE + \angle CEJ = 30° + \angle CEJ$

所以 $\angle FEJ = \angle CEJ$，所以 J 为 $\triangle CEF$ 的内心.

证法 4 如图 43.2 所示，过 E 作 $EN \parallel CF$. 由 D 是弧 AB 的中点，知 $AC \parallel OD$，从而四边形 $AJOD$ 是平行四边形，所以 D, J 关于 OA 的中点 M 对称. 由 EF 垂直平分半径 OA 知 OA 垂直平分 EF，所以直线 EN, CF 关于点 M 对称，从而 J 到 EF 的距离等于 D 到 EF 的距离，J 到 CF 的距离等于 D 到 EN 的距离.

此证法属于程华

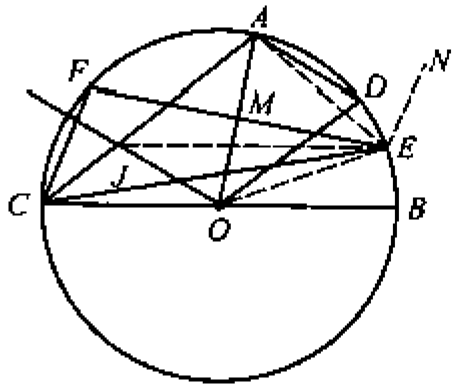


图 43.2

又由 EF 垂直平分半径 OA 知弧 AF，弧 AE 均等于 $60°$，设 $\angle AOB = 2\theta$，则

$$\angle DEF = 30° + \theta/2$$

$$\angle CFE = 90° + \theta - 30° = 60° + \theta$$

又 $$\angle NEF = \angle CFE$$

CF 的方程为

$$\frac{y}{x+1} = \frac{\sin(2\theta + 60°)}{\cos(2\theta + 60°) + 1}$$

$$\frac{y}{x+1} = \frac{\sin(\theta + 30°)}{\cos(\theta + 30°)}$$

即 $$x \cdot \sin(\theta + 30°) - y \cdot \cos(\theta + 30°) + \sin(\theta + 30°) = 0$$

设 J 到 EF, CF 的距离分别为 d_1, d_2，则

$$d_1 = |(\cos 2\theta - \cos\theta)\cos 2\theta + (\sin 2\theta - \sin\theta)\sin 2\theta - 1/2| = |1/2 - \cos\theta|$$

$$\begin{aligned} d_2 &= |(\cos 2\theta - \cos\theta)\sin(\theta + 30°) - (\sin 2\theta - \sin\theta)\cos(\theta + 30°) + \sin(\theta + 30°)| = \\ &|\sin((\theta + 30°) - 2\theta) + \sin(\theta - (\theta + 30°)) + \sin(\theta + 30°)| = |\sin(\theta + 30°) - \sin(\theta - 30°) - 1/2| = \\ &|\cos\theta - 1/2| \end{aligned}$$

所以 $d_1 = d_2$，即 FJ 为 $\angle CFE$ 平分线.

因为 $OA \perp EF$，所以 $\angle ACE = \angle ACF$. 所以 J 为 $\triangle CEF$ 的内心，所以 $\angle NEF = 60° + \theta$. 所以 DE 为 $\angle NEF$ 的平分线.

从而 D 到 EN 与 EF 的距离相等，即 J 到 CF 与 EF 的距离也相等.

又因为 $\angle FCJ = \angle ECJ$，所以 J 为 $\triangle CEJ$ 的内心.

证法 5 如图 43.3 所示，建立直角坐标系，依题意可设 $A(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$，$D(\cos\theta, \sin\theta)$，$F(\cos(2\theta + 60°), \sin(2\theta + 60°))$

由 D 是弧 AB 的中点，知 $AC \parallel OD$. 所以

$$k_{OJ}=k_{DA}=\frac{\sin 2\theta-\sin\theta}{\cos 2\theta-\cos\theta}$$

$$k_{AC}=k_{OD}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

直线 OJ 的方程为

$$y=\frac{\sin 2\theta-\sin\theta}{\sin 2\theta-\cos\theta}x \quad ①$$

直线 AC 的方程为

$$y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x+1) \quad ②$$

联立 ①,② 解得 J 的坐标为

$$x=\cos 2\theta-\cos\theta, y=\sin 2\theta-\sin\theta$$

因为

$$k_{EF}=-\frac{1}{k_{OA}}=-\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

所以直线 EF 的方程为

$$\frac{y-(\sin 2\theta)/2}{x-(\cos 2\theta)/2}=-\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

即

$$x\cdot\cos 2\theta+y\cdot\sin 2\theta-1/2=0$$

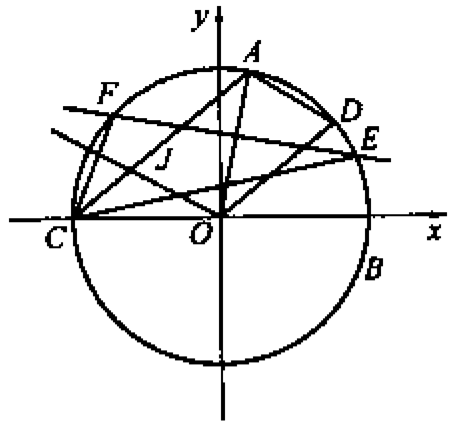


图 43.3

3 找出所有的正整数对 $m,n\geqslant 3$,使得存在无穷多个正整数 a,有 $\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$ 为整数.

罗马尼亚命题

解法 1 假设 (m,n) 为所求,显然有 $n<m$.

(1) 首先有 $g(x)=x^n+x^2-1$ 整除 $f(x)=x^m+x-1$.

实际上,由于 $g(x)$ 为本原多项式及除法定理,有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$$

其中

$$\deg(r(x))<\deg(g(x))$$

余项 $\frac{r(x)}{g(x)}$ 当 $x\to\infty$ 时,趋于零.但另一方面,对无穷多个整数 a,它为整数.于是,有无穷多个整数 a,使得 $\frac{r(a)}{g(a)}=0$,得出 $r\equiv 0$.

(2) 多项式 $f(x),g(x)$ 在 $(0,1)$ 中有惟一根.

由于 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 中为增函数,且值域为 $[-1,1]$,从而,在 $(0,1)$ 中有惟一实根.又由于 $g(x)$ 整除 $f(x)$,所以,它们有相同的根,并记为 α.

(3) 利用 α,证明 $m<2n$.

易得 $\alpha>\beta,\beta=0.618\cdots$ 为 $h(x)=x^2+x-1$ 的正根.因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,且

$$f(\beta) < h(\beta) = 0 = f(\alpha)$$

另一方面,若 $m \geqslant 2n$,则

$$1 - \alpha = \alpha^m \leqslant (\alpha^n)^2 = (1 - \alpha^2)^2$$

从而 $$\alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 1) \geqslant 0$$

有 $\alpha \leqslant \beta$.矛盾.

(4) 对 $m < 2n$,有惟一解 $(m,n) = (5,3)$.

假设有解,考虑 $a = 2$,并记

$$d = g(2) = 2^n + 3$$

由(1)得 $$-2^m \equiv 1 \pmod d$$

令 $$m = n + k, 1 \leqslant k < n$$

则 $$-2^m \equiv (d - 2^n)2^k \equiv 3 \cdot 2^k \pmod d$$

这表明,当 $1 \leqslant k \leqslant n - 2$ 时,$-2^m \not\equiv 1 \pmod d$.

当 $k = n - 1$,即 $m = 2n - 1$ 时,对 -2^m 模 d 的最小正余数为

$$3 \cdot 2^{n-1} - d = 2^{n-1} - 3$$

只有当 $n = 3$ 时,取值为 1.因此,$m = 5$.

最后

$$a^5 + a - 1 = (a^3 + a^2 - 1)(a^2 - a + 1)$$

表明 $(m,n) = (5,3)$ 为一个解.

故 $(m,n) = (5,3)$ 为惟一解.

解法 2 由 $a^m + a - 1 \geqslant a^n + a^2 - 1, a \in \mathbf{Z}^+$,可得 $m > n$. 此解法属于林常

根据综合除法,可求得整系数多项式 $q(x), r(x)$ $(\deg r(x) < n)$,使

$$\frac{x^m + x - 1}{x^n + x^2 - 1} = q(x) + \frac{r(x)}{x^n + x^2 - 1}$$

由已知条件,存在无穷多个正整数 a,使 $\frac{r(a)}{a^n + a^2 - 1} \in \mathbf{Z}$,故必 $r(x) = 0$.所以

$$x^m + x - 1 = (x^n + x^2 - 1)q(x)$$

令 $q(x) = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i$,比较两边系数得到 $a_0 = 1, a_1 = -1, 2 \leqslant i \leqslant n - 1$ 时

$$-a_i + a_{i-2} = 0$$

所以 $a_i = a_{i-2}$,故

$$a_i = (-1)^i, 0 \leqslant i \leqslant n - 1$$

当 $n \leqslant i \leqslant m - 1$ 时

$$-a_i + a_{i-2} + a_{i-n} = 0$$

所以 $$a_i = a_{i-2} + a_{i-n}$$

由于 $a_{m-n}=1$,而 $m-n+1\leqslant j\leqslant m-1$ 时 $a_j=0$,故这个 n 阶递推列应当出现接连的 n 项为

$$a_i=1,a_{i+1}=a_{i+2}=\cdots=a_{i+n-1}=0$$

反过来,如果出现这样的接连 n 项,那么 $m=n+i$ 和 n 就是一组解.

当 n 为偶数时,利用 $a_i=a_{i-2}+a_{i-n}(i\geqslant n)$ 归纳可证所有 $a_{2i}>0,a_{2i+1}<0$,不出现为 0 的项,故此时无解.

当 $n=2k+1$ 时,写出数列的前 $2n+1$ 项,即

$a_0=1,a_1=-1,a_2=1,a_3=-1,\cdots,a_{n-3}=1,a_{n-2}=-1,a_{n-1}=1,a_n=0,a_{n+1}=0,a_{n+2}=1,a_{n+3}=-1,\cdots,a_{2n-3}=k-1,a_{2n-2}=-(k-1),a_{2n-1}=k,a_{2n}=-(k-1)$

令 $s_i=a_i+a_{i+1}$ 有

$s_0=s_1=\cdots=s_{n-2}=0,s_{n-1}=1,s_n=0,s_{n+1}=1,s_{n+2}=0,s_{n+3}=1,\cdots,s_{2n-3}=0,s_{2n-2}=s_{2n-1}=1$

由于 s_i 亦满足 $s_i=s_{i-2}+s_{i-n}(i\geqslant n)$,故归纳可证.当 $i\geqslant 2n-2$ 时恒有 $s_i>0$,从而 $i\geqslant 2n-2$ 时不会出现接连两项同时为 0,于是整个数列中出现接连若干项(至少两项)同时为 0 的只有一处

$$a_n=a_{n+1}=0$$

所以 $\quad n-1=2,n=3,m=n-1+n=5$

故满足本题要求的正整数对只有一组:$m=5,n=3$.此时

$$\frac{a^5+a-1}{a^3+a^2-1}=a^2-a+1$$

4 设 n 为大于 1 的整数,全部正因数为 $d_1,d_2,\cdots,d_k$,其中 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$,记

$$D=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k$$

(1) 证明:$D<n^2$;

(2) 确定所有的 n,使得 D 能整除 n^2.

罗马尼亚命题

解 (1) 注意到,若 d 为 n 的因子,则 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的因子.于是

$$D=\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1}d_id_{i+1}=n^2\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1}\frac{1}{d_id_{i+1}}\leqslant$$
$$n^2\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1}\left(\frac{1}{d_i}-\frac{1}{d_{i+1}}\right)<\frac{n^2}{d_1}=n^2$$

故问题(1)成立.

(2) 设 p 为 n 的最小素因子.则

$$d_2=p,d_{k-1}=\frac{n}{p},d_k=n$$

若 $n=p$,则 $\qquad k=2, D=p, D \mid n^2$

若 n 为合数,则 $\qquad k>2, D>d_{k-1}d_k=\frac{n^2}{p}$

如果 $D \mid n^2$,则 $\frac{n^2}{D}$ 为 n^2 的因子.但

$$1<\frac{n^2}{D}<p$$

由于 p 为 n^2 的最小素因子,上式不能成立.故若 $D \mid n^2$,则 n 为素数.

5 找出所有从实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 f,使得对所有 $x,y,z,t \in \mathbf{R}$,有

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz)$$

印度命题

解法 1 假设对所有 $x,y,z,t \in \mathbf{R}$

$$f(xy-zt)+f(xt+yz)=(f(x)+f(z))(f(y)+f(t)) \quad ①$$

令 $x=y=z=0$,则

$$2f(0)=2f(0)(f(0)+f(t))$$

特别地,$2f(0)=4f^2(0)$,所以 $f(0)=0$ 或 $f(0)=\frac{1}{2}$.

若 $f(0)=\frac{1}{2}$,则 $f(0)+f(t)=1$,得到

$$f(x)=\frac{1}{2}$$

若 $f(0)=0$,在 ① 中令 $z=t=0$,则

$$f(xy)=f(x)f(y)$$

特别地,$f(1)=f^2(1)$,所以 $f(1)=0$ 或 $f(1)=1$,若 $f(1)=0$,则

$$f(x)=f(x)f(1)=0, x \in \mathbf{R}$$

于是,假设 $f(0)=0, f(1)=1$.令 $x=0, y=t=1$,式 ① 给出

$$f(-z)+f(z)=2f(z)$$

即对 $z \in \mathbf{R}, f(-z)=f(z)$,$f(x)$ 为偶函数.

由于 $f(x^2)=f^2(x) \geqslant 0$ 及 $f(x)$ 为偶函数,则对 $y \in \mathbf{R}$,有

$$f(y) \geqslant 0$$

在式 ① 中令 $t=x, z=y$,则

$$f(x^2+y^2)=(f(x)+f(y))^2$$

即

$$f(x^2+y^2) \geqslant f^2(x)=f(x^2)$$

因此,对 $u \geqslant v \geqslant 0, f(u) \geqslant f(v)$,对 $x \in \mathbf{R}^+$,$f(x)$ 为增函数.

在式 ① 中,令 $y=z=t=1$,则

$$f(x-1)+f(x+1)=2(f(x)+1)$$

可用归纳法证明 $f(n)=n^2$,对非负整数 n 成立.

由于 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(n)=n^2$ 对所有整数成立．由 $f(xy)=f(x)f(y)$，可得 $f(a)=a^2$，对所有有理数成立．

假设对某个正数 x，$f(x)\neq x^2$．若 $f(x)<x^2$，取有理数 a，$x>a>\sqrt{f(x)}$，则 $f(a)=a^2>f(x)$．由 $f(x)$ 的增加性，有 $f(a)\leqslant f(x)$，矛盾．

对 $f(x)>x^2$，可类似证明．

于是，$f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}^+$．

由于 $f(x)$ 为偶函数，所以，$f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$．

经检验，$f(x)=0$，$x\in\mathbf{R}$；$f(x)=\frac{1}{2}$，$x\in\mathbf{R}$；$f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$ 均满足条件．故它们为所求的解．

解法 2　取 $y=t=0$，$z=x$，得到

$$4f(0)f(x)=2f(0)$$

此解法属于林常

(1) 若 $f(0)\neq 0$，则 $f(x)=1/2(x\in\mathbf{R})$，显然这是一个解．

(2) 若 $f(0)=0$，取 $z=t=0$，得到 $f(xy)=f(x)f(y)$．如果有 $x_0\neq 0$ 使 $f(x_0)=0$，则

$$f(x)=f(x_0\frac{x}{x_0})=f(x_0)f(\frac{x}{x_0})=0,x\in\mathbf{R}$$

显然这也是一个解．

(3) $f(0)=0$ 且 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$．取 $x=y=0$ 得

$$f(-zt)=f(z)f(t)=f(zt)$$

所以

$$\forall x\in\mathbf{R},f(-x)=f(x)$$

上式中令 $z=t=1$，得 $f(1)=f(1)^2$，因为 $f(1)\neq 0$，所以 $f(1)=1$．

当 $x>0$ 时

$$f(x)=f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})=f(\sqrt{x})f(\sqrt{x})>0$$

取

$$z=y,t=x,f(x^2+y^2)=(f(x)+f(y))^2$$

令 $\sqrt{f(x)}=g(x)$，则

$$g(0)=0,g(1)=1,g(-x)=g(x),g(xy)=g(x)g(y)$$

$x\neq 0$ 时，$g(x)>0$，而且

$$g(x^2+y^2)=g^2(x)+g^2(y)=g(x^2)+g(y^2)$$

也就是 $\forall x,y\geqslant 0$ 有

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

由此归纳可得 $\forall x\in\mathbf{R}^+,n\in\mathbf{Z}^+,g(nx)=ng(x)$．由此分别取 $x=1,x=\frac{1}{n},x=\frac{1}{m}$，依次得到

$$g(n)=n,g(\frac{1}{n})=\frac{1}{n},g(\frac{n}{m})=\frac{n}{m}$$

即 $\forall x \in \mathbf{Q}^+$ 有 $g(x) = x$.

$\forall x > y > 0, g(x) = g(y + x - y) = g(y) + g(x - y) > g(y)$

g 在 $\mathbf{R}^+$ 上严格递增,对任意 $x \in \mathbf{R}^+$,可找到递增的有理数序列 $\{r_i\}$ 以 x 为极限,由 $x > r_i$ 得到 $g(x) > g(r_i) = r_i$,取极限得 $g(x) \geqslant x$,再取递减的有理数序列以 x 为极限,同理可得 $g(x) \leqslant x$,所以 $g(x) = x (x \in \mathbf{R}^+)$.所以

$$f(x) = g^2(x) = x^2, x \geqslant 0$$

再由偶性得到 $x < 0$ 时

$$f(x) = f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

所以
$$f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$$

由恒等式

$$(x^2 + z^2)(y^2 + t^2) = (xy - zt)^2 + (xt + yz)^2$$

可知 $f(x) = x^2$ 是本题的解.

因此,满足本题条件的 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 函数共有三个:$f(x) = 1/2$, $f(x) = 0$ 和 $f(x) = x^2$.

6 设 $n \geqslant 3$ 为整数,$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \cdots, \Gamma_n$ 为平面上半径为 1 的圆,圆心分别为 $O_1, O_2, O_3, \cdots, O_n$.假设任一直线至多和两个圆相交或相切,证明

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{O_iO_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}$$

乌克兰命题

证法 1 如图 43.4 所示,对圆 $\Gamma_i, \Gamma_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n$,过圆心 O_i 作 Γ_j 的两条切线,将平面分为 4 部分.将 Γ_i 上与 Γ_j 在同一部分的弧以及这段弧相对的另一段弧染色.

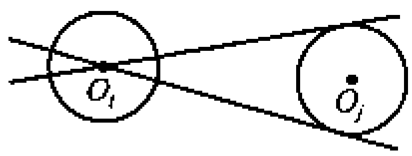


图 43.4

同样地,对 Γ_j 也有相同长度的两段弧被染色.

由于过 O_i 的直线至多过其他的一个圆,因此,Γ_i 上的每个点至多被染色一次(不考虑多个圆的点).

下面考虑,Γ_i 与 Γ_j 之间染色的弧的总长度.

如图 43.5 所示,设 O_iP 为 Γ_j 的一条切线,与 Γ_j 切于 P,线段 O_iO_j 与 Γ_i 交于 Q,射线 O_iP 与 Γ_i 交于 N, $QM \perp O_iP$ 于 M.则

$$\triangle O_iQM \backsim \triangle O_iO_jP$$

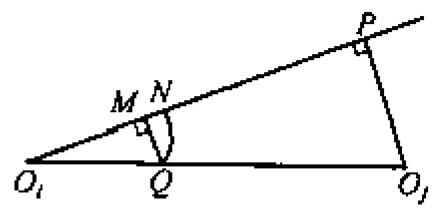


图 43.5

又 $O_iQ = O_jP = 1$,所以,$\frac{MQ}{O_iQ} = \frac{PO_j}{O_iO_j}$,即 $MQ = \frac{1}{O_iO_j}$,则 $\widehat{NQ} \geqslant MQ = \frac{1}{O_iO_j}$.

由对称性,Γ_i, Γ_j 相互之间染色的弧的总长度为 $8\widehat{NQ} \geqslant \frac{8}{O_iO_j}$.因此,对这 n 个圆,两两之间染色的弧的总长度大于等于

$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{8}{O_iO_j}$. 然而这些圆的周长之和为 $2n\pi$.

如图 43.6 所示，考虑 $O_1,O_2,\cdots,O_n$ 这 n 个点的凸包多边形 $O_{k_1}O_{k_2}\cdots O_{k_r}$ 以及 Γ_{k_i} 在 $\angle O_{k_{i-1}}O_{k_i}O_{k_{i+1}}$ 外角部分的弧. 此多边形外角和为 2π，因此，这些弧的总长为 4π.

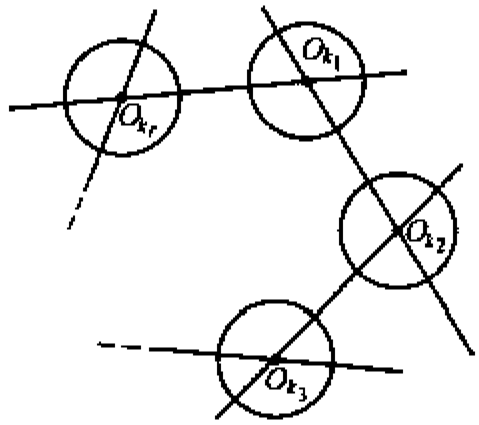


图 43.6

下面证明，每一段弧至多有一半被染色.

如图 43.7 所示，任取多边形上相邻的三个顶点，不妨设依次为 O_1,O_2,O_3. 连 O_1O_2 并延长与 Γ_2 交于 A，线段 O_2O_3 与 Γ_2 交于 B. 设 l_1 为 Γ_1,Γ_3 距 Γ_2 较近的一条外公切线，并过 O_2 作 $l_2 /\!/ l_1$，l_2 与 $\overset{\frown}{AB}$ 交于 C，过 O_2 作 O_2D 与 Γ_3 相切于 D，且 D 与 C 在 O_2O_3 同侧(O_2D 经过$\overset{\frown}{AB}$).

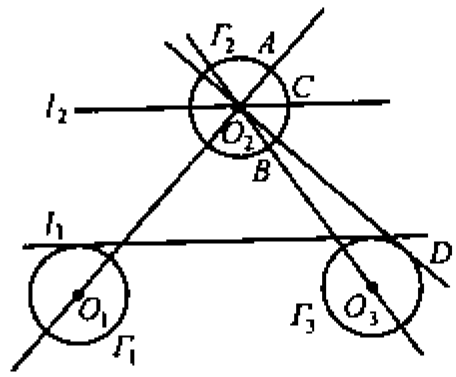


图 43.7

因为 l_1 不与 Γ_2 相交，Γ_2,Γ_3 在 l_1 两侧，Γ_2 半径为 1，则 l_1 到 l_2 的距离大于等于 1. 所以 D 到 l_2 的距离大于等于 1.

又因 $DO_3=1$，则 D 到 O_2O_3 的距离小于等于 1.

因为 D 在 $\angle O_3O_2C$ 中，所以 $\angle DO_2O_3\leqslant\angle DO_2C$.

因此，$\overset{\frown}{BC}$ 上被染色的部分长度小于等于$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$. 同样，$\overset{\frown}{AC}$ 上被染色的长度小于等于$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$. 于是，$\overset{\frown}{AB}$ 上至多有一半被染色. 对其他这样的弧也有同样的结论. 凸包多边形所有外角部分内至少有长为 2π 的弧未被染色，因此，染色的弧长总和小于等于 $2n\pi-2\pi$. 从而

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{8}{O_iO_j}\leqslant 2n\pi-2\pi$$

故

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{O_iO_j}\leqslant\frac{(n-1)\pi}{4}$$

证法 2 由题目条件，每两个圆无公共点，特别地，$i\neq j$ 时，点 O_i 在圆Γ_j外，由 O_i 引Γ_j的两条切线夹成一个对顶角区域，记这个夹角为 α_{ij}(由于各圆相等，$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$). 如图 43.8 所示，有

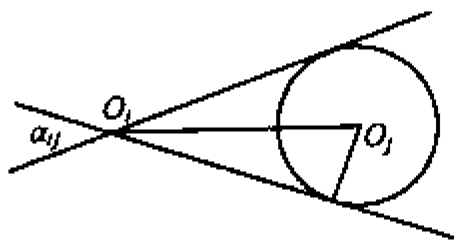


图 43.8

$$\frac{1}{O_iO_j}=\sin\frac{\alpha_{ij}}{2}<\frac{\alpha_{ij}}{2}$$

取定 i，对 $n-1$ 个 j 求和，即

$$S_i=\sum_{j\neq i}\frac{1}{O_iO_j}<\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\alpha_{ij}=\frac{1}{2}A_i$$

(A_i 是 O_i 对另外 $n-1$ 个圆张角的和). 由题给条件，O_i 处的 $n-1$ 个对顶角区域除公共顶点 O_i 外两两无公共点，故

$$2A_i<2\pi,A_i<\pi$$

设 n 个点 $O_1,O_2,\cdots,O_n$ 的凸包为凸 k 边形(由于 O_i 每三点不

共线,所以 $k \geqslant 3$).考虑这个 k 边形的三个相邻顶点 O_k, O_i, O_l, Γ_i 与 Γ_l 的两条内公切线交于 O_iO_l 的中点 M_{il},记内公切线与 O_iO_l 之夹角为 β_{il},则

$$\sin \beta_{il} = \frac{1}{\frac{1}{2}O_iO_l} = 2\sin\frac{\alpha_{il}}{2} > \sin \alpha_{il}$$

因为 $\beta_{il} < \frac{\pi}{2}$,所以 $\beta_{il} > \alpha_{il}$.同理 $\beta_{ik} > \alpha_{ik}$.

由题目条件,点 M_{ik} 在 Γ_i 与 Γ_l 的两条内公切线所夹的对顶角区域外,如图 43.9 所示,故

$$\beta_{ik} + \beta_{il} < \angle O_iM_{ik}M_{il} + \angle O_iM_{il}M_{ik} = \pi - \varphi_i$$

其中,φ_i 为 k 边形在 O_i 处的内角.

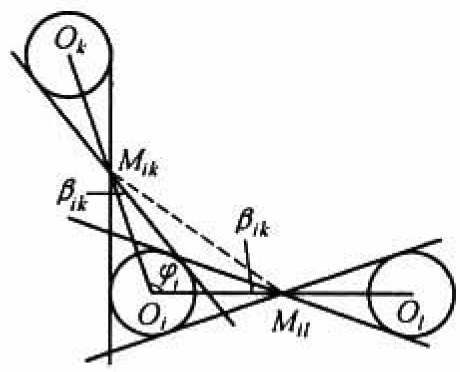


图 43.9

由于其他点 O_j 都在 $\angle O_kO_iO_l$ 内,故对于 k 边形的顶点 O_i 有

$$A_i < \varphi_i + (\alpha_{ik} + \alpha_{il})/2 < \varphi_i + \frac{1}{2}(\beta_{ik} + \beta_{il}) < \frac{\pi + \varphi_i}{2}$$

最后,将所有 n 个 S_i 求和,注意到每个 $\frac{1}{O_iO_j}$ 在 S_i 和 S_j 中各出现一次,对于凸包 k 边形内的每个 O_i 有 $A_i < \pi$,每个顶点 O_i 有 $A_i < \frac{\pi + \varphi_i}{2}$,而且 k 个 φ_i 之和为 $(k-2)\pi$,得到

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{O_iO_j} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} S_i < \frac{1}{4}\left((n-k)\pi + \frac{k\pi + (k-2)\pi}{2}\right) = \frac{(n-1)\pi}{4}$$



剑桥大学国王学院

故 $$2ab^2 - b^3 + 1 > 0, a > \frac{b}{2} - \frac{1}{2b^2}$$

因此 $a \geqslant \frac{b}{2}$. 由此结合 $k \geqslant 1$，即

$$a^2 \geqslant b^2(2a - b) + 1$$

可知 $$a^2 > b^2(2a - b) \geqslant 0$$

所以

$$a > b \text{ 或 } 2a = b \qquad ①$$

现设 a_1, a_2 为关于 a 的方程（k, b 固定）

$$a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0 \qquad ②$$

的两个解，且其中之一是一个整数. 则由 $a_1 + a_2 = 2kb^2$ 可知另一个解也是整数. 不妨设 $a_1 \geqslant a_2$，则 $a_1 \geqslant kb^2 > 0$，进一步，由 $a_1a_2 = k(b^3 - 1)$，得

$$0 \leqslant a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leqslant \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b$$

利用 ① 可知 $a_2 = 0$ 或者 $a_2 = \frac{b}{2}$（此时 b 为偶数）.

若 $a_2 = 0$，则 $b^3 - 1 = 0$，因此 $a_1 = 2k, b = 1$.

若 $a_2 = \frac{b}{2}$，则 $k = \frac{b^2}{4}, a_1 = \frac{b^4}{2} - \frac{b}{2}$.

综上可知，只能是 $(a, b) = (2l, 1), (l, 2l)$ 或者 $(8l^4 - l, 2l)$. 其中，l 为正整数. 直接验证，可知上述形式的 (a, b) 都符合题意.

解法 2 当 $b = 1$ 时，由条件知 a 为偶数.

当 $b > 1$ 时，我们记

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k$$

则关于 a 的一元二次方程 ② 有正整数解，从而关于 a 的判别式为完全平方数. 即

$$\Delta = 4k^2b^4 - 4k(b^3 - 1)$$

是完全平方数.

注意到，当 $b \geqslant 2$ 时，我们有

$$(2kb^2 - b - 1)^2 < \Delta < (2kb^2 - b + 1)^2 \qquad ③$$

上述式子可以这样来证明，即

$$\begin{aligned}\Delta - (2kb^2 - b - 1)^2 &= 4kb^2 - b^2 - 2b + 4k - 1 = \\ &(4k - 1)(b^2 + 1) - 2b \geqslant \\ &2(4k - 1)b - 2b > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2kb^2 - b + 1)^2 - \Delta &= 4kb^2 - 4k - (b - 1)^2 = \\ &4k(b^2 - 1) - (b - 1)^2 > \\ &(4k - 1)(b^2 - 1) > 0\end{aligned}$$

所以，式 ③ 成立.

利用 Δ 为完全平方数及式③,可知

$$\Delta = 4k^2b^4 - 4k(b^3 - 1) = (2kb^2 - b)^2$$

于是,$4k = b^2$,进而 b 为偶数,设 $b = 2l$,则 $k = l^2$.利用②可求得 $a = l$ 或 $8l^4 - l$.

综上,满足条件的 $(a,b) = (2l,1),(l,2l)$ 或 $(8l^4 - l,2l)$,其中 l 为正整数.直接验证,可知它们符合要求.

3 给定一个凸六边形,其任意两条对边具有如下性质:它们的中点之间的距离等于它们的长度和的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍.证明:该六边形的所有内角相等(一个凸六边形 $ABCDEF$ 有 3 组对边:AB 和 DE,BC 和 EF,CD 和 FA).

波兰命题

证法 1 先证一个引理.

引理 $\triangle PQR$ 中,$\angle QPR \geq 60°$,L 为 QR 的中点.则 $PL \leq \frac{\sqrt{3}}{2}QR$,等号当且仅当 $\triangle PQR$ 为正三角形时取到.

引理的证明 设 S 为平面上一点,使得 P 与 S 在 QR 的同侧,而 $\triangle QRS$ 为正三角形.则由于 $\angle QPR \geq 60°$,故 P 在 $\triangle QRS$ 的外接圆的内部(包括边界).而 $\triangle QRS$ 的外接圆落在以 L 为圆心,$\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ 为半径的圆内.所以引理获证.

回到原题.

如图 44.1 所示,三条主对角线形成一个三角形(或退化为一点),从中可选出两条,它们的夹角大于等于 $60°$.不妨设 AD 与 BE 的夹角大于等于 $60°$,即有 $\angle APB \geq 60°$,其中 P 为 AD 与 BE 的交点.利用引理的结论,可知

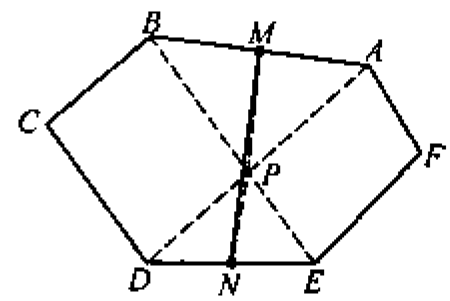


图 44.1

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq PM + PN \geq MN$$

其中,M,N 分别为 AB 和 DE 的中点.上述不等式只能都取等号.于是,由引理知 $\triangle ABP$ 和 $\triangle DEP$ 都是正三角形.

此时,CF 与 AD,BE 中某一条线的夹角大于等于 $60°$,不妨设 $\angle AQF \geq 60°$,其中 Q 为 AD 和 CF 的交点.同上类似讨论,可知 $\triangle AQF$ 和 $\triangle CQD$ 都是正三角形.从而 $\angle BRC = 60°$,其中 R 为 BE 和 CF 的交点.再次利用引理,可知 $\triangle BCR$ 和 $\triangle EFR$ 都是正三角形.这样就完成了我们的证明.

证法 2 如图 44.2 所示,设 $ABCDEF$ 为给定的凸六边形,记 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$,$\cdots$,$\boldsymbol{f} = \overrightarrow{FA}$.并设 M,N 分别为 AB 和 DE 的中点.则

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{d}$$

$$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f}-\boldsymbol{e}-\frac{1}{2}\boldsymbol{d}$$

于是

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e}-\boldsymbol{f}) \quad ①$$

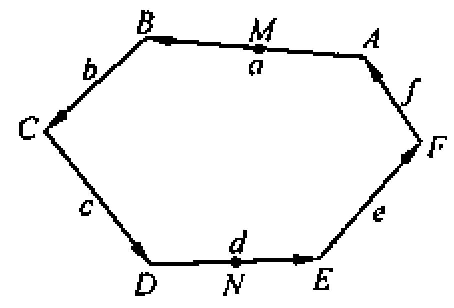


图 44.2

由条件,我们有

$$|\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{3}}{2}(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{d}|)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}| \quad ②$$

记 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{f},\boldsymbol{z}=\boldsymbol{e}-\boldsymbol{b}$,由 ① 与 ② 可得

$$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|\geqslant\sqrt{3}|\boldsymbol{x}| \quad ③$$

同理可知

$$|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|\geqslant\sqrt{3}|\boldsymbol{y}| \quad ④$$

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geqslant\sqrt{3}|\boldsymbol{z}| \quad ⑤$$

注意到

$$③\Leftrightarrow|\boldsymbol{y}|^2-2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}+|\boldsymbol{z}|^2\geqslant3|\boldsymbol{x}|^2$$
$$④\Leftrightarrow|\boldsymbol{z}|^2-2\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x}+|\boldsymbol{x}|^2\geqslant3|\boldsymbol{y}|^2$$
$$⑤\Leftrightarrow|\boldsymbol{x}|^2-2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+|\boldsymbol{y}|^2\geqslant3|\boldsymbol{z}|^2$$

上述三式相加,得

$$-|\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2-|\boldsymbol{z}|^2-2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}-2\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\geqslant0$$

即 $-|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}|^2\geqslant0$. 因此 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$,并且上述所有不等式全部取等号. 于是

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$$

$$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{x}|,\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{d}\,/\!/\,\boldsymbol{x}$$

$$|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{y}|,\boldsymbol{c}\,/\!/\,\boldsymbol{f}\,/\!/\,\boldsymbol{y}$$

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{z}|,\boldsymbol{e}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{z}$$

现在设 $\triangle PQR$ 中,$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{x},\overrightarrow{QR}=\boldsymbol{y},\overrightarrow{RP}=\boldsymbol{z}$,并不妨设 $\angle QPR\geqslant60^\circ$. L 为 QR 的中点,则

$$PL=\frac{1}{2}|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{y}|=\frac{\sqrt{3}}{2}QR$$

利用证法 1 中引理可知 $\triangle PQR$ 为正三角形. 于是

$$\angle ABC=\angle BCD=\cdots=\angle FAB=120^\circ$$

4 设 $ABCD$ 是一个圆内接四边形,点 P,Q 和 R 分别是 D 到直线 BC,CA 和 AB 的射影. 证明:$PQ=QR$ 的充要条件是 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的角平分线的交点在 AC 上.

芬兰命题

证明 如图 44.3 所示,由西姆松(Simson)定理,可知 P,Q,

R 三点共线. 而 $\angle DPC = \angle DQC = 90°$, 故 D, P, C, Q 四点共圆, 于是, $\angle DCA = \angle DPQ = \angle DPR$. 类似地, 由于 D, Q, R, A 共圆, 可知 $\angle DAC = \angle DRP$. 因此, $\triangle DCA \backsim \triangle DPR$.

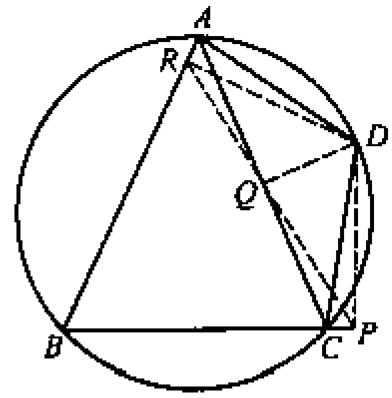


图 44.3

类似地, $\triangle DAB \backsim \triangle DQP$, $\triangle DBC \backsim \triangle DRQ$. 因此

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}$$

从而 $PQ = QR$ 的充要条件是 $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$.

而 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的角平分线分 AC 的比分别为 $\frac{BA}{BC}$ 和 $\frac{DA}{DC}$. 所以, 命题成立.

爱尔兰命题

5 设 n 为正整数, 实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.

(1) 证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$$

(2) 证明等号成立的充要条件是 $x_1, \cdots, x_n$ 成等差数列.

证明 (1) 由于将所有 x_i 减去一个相同的数, 不等式两边不变, 因此, 我们不妨设 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

由条件, 我们有

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| = 2\sum_{i<j}(x_j - x_i) = 2\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)x_i$$

由柯西不等式, 得

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leqslant 4\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \frac{4n(n+1)(n-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

另一方面

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j + n\sum_{j=1}^{n}x_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

所以 $$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$$

(2) 由柯西不等式成立的条件, 可知若等号成立, 则存在实数 k, 使得 $x_i = k(2i - n - 1)$, 这表明 $x_1, \cdots, x_n$ 成等差数列.

反过来, 若 $x_1, \cdots, x_n$ 是一个公差为 d 的等差数列, 则

$$x_i = \frac{d}{2}(2i - n - 1) + \frac{x_1 + x_n}{2}$$

将每个 x_i 减去$\frac{x_1 + x_n}{2}$,就有

$$x_i = \frac{d}{2}(2i - n - 1)$$

且$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$,此时不等式取等号.

> **6** 设 p 是素数.证明:存在一个素数 q,使得对任意整数 n,数 $n^p - p$ 不是q 的倍数.

法国命题

证明 注意到

$$\frac{p^p - 1}{p - 1} = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{p-1} \equiv p + 1 (\bmod p^2)$$

我们可以取$\frac{p^p - 1}{p - 1}$的一个素因子 q,使得 $q \not\equiv 1(\bmod p^2)$.

下证 q 是一个符合要求的素数.

事实上,若存在整数 n,使得 $n^p \equiv p(\bmod q)$.则 $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1(\bmod q)$.而由费马小定理,可知 $n^{q-1} \equiv 1(\bmod q)$.由于 $p^2 \nmid q - 1$,故$(p^2, q - 1) \mid p$,因此,$n^p \equiv 1(\bmod q)$.从而 $p \equiv 1(\bmod q)$,但是,这要求

$$0 \equiv \frac{p^p - 1}{p - 1} = 1 + p + \cdots + p^{p-1} \equiv p(\bmod q)$$

矛盾.

所以,命题成立.



富士山

第45届国际数学奥林匹克

希腊，2004

1 已知$\triangle ABC$为锐角三角形，$AB \neq AC$，以BC为直径的圆分别交边AB，AC于点M，N，记BC的中点为O，$\angle BAC$的平分线和$\angle MON$的平分线相交于点R.

求证：$\triangle BMR$的外接圆和$\triangle CNR$的外接圆有一个交点在边BC上.

罗马尼亚命题

证法1 如图45.1所示，首先证A，M，R，N共圆. 因为$\triangle ABC$为锐角三角形，故M，N分别在线段AB，AC内. 在射线AR上取一点R_1，使A，M，R_1，N共圆. 因为AR_1平分$\angle BAC$，故$R_1M = R_1N$. 而点M，N在以O为圆心的圆上，故$OM = ON$. 由$OM = ON$，$R_1M = R_1N$知点R_1在$\angle MON$的平分线上，而$AB \neq AC$，则$\angle MON$的平分线与$\angle BAC$的平分线不重合、不平行，有惟一交点R，从而$R_1 = R$，即A，M，R，N共圆.

此解法属于彭闽昱

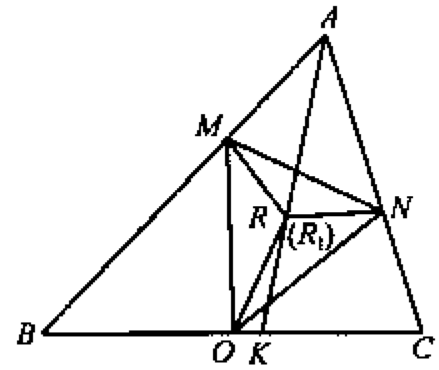


图45.1

其次，设AR的延长线交BC于K，则K在BC边上. 因为B，C，N，M共圆，故$\angle MBC = \angle ANM$. 又因为A，M，R，N共圆，故$\angle ANM = \angle MRA$，从而$\angle MBK = \angle MRA$，所以B，M，R，K共圆.

同理可证C，N，R，K共圆.

证毕.

证法2 如图45.2所示，由于$OM = ON$，$\angle MOR = \angle NOR$，OR公共，因此$\triangle MOR \cong \triangle NOR$，于是$MR = NR$.

此证法属于李潜

分别在$\triangle AMR$和$\triangle ANR$中应用正弦定理，得

$$\frac{\sin \angle BAR}{\sin \angle AMR} = \frac{MR}{AR} = \frac{NR}{AR} = \frac{\sin \angle CAR}{\sin \angle ANR}$$

由于$\angle BAR = \angle CAR$，所以$\sin \angle AMR = \sin \angle ANR$，知$\angle AMR$与$\angle ANR$相等或互补.

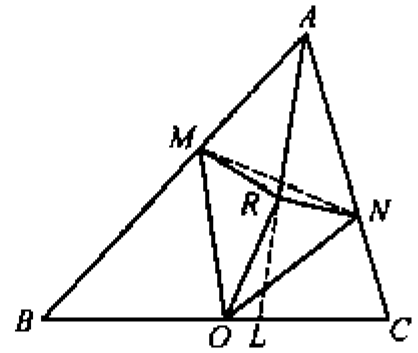


图45.2

若$\angle AMR$与$\angle ANR$相等，则由$MR = NR$知$\triangle ARM \cong \triangle ARN$，则$AM = AN$. 由圆幂定理，得$AM \cdot AB = AN \cdot AC$，从而$AB = AC$，矛盾. 故只有$\angle AMR$与$\angle ANR$互补，即$A$，$M$，$R$，$N$四点共圆.

连结MN，延长AR交边BC于点L，则L在BC边上.

由 A,M,R,N 四点共圆,知 $\angle ARM=\angle ANM$. 由 B,M,N,C 四点共圆,知 $\angle ABC=\angle ANM$,于是 $\angle ARM=\angle ABC$,从而 B,L,R,M 四点共圆. 同理,C,L,R,N 四点共圆,所以 $\triangle BMR$ 和 $\triangle CNR$ 的外接圆的另一个交点为点 L,故结论成立.

2 试求出所有的实系数多项式 $P(x)$,使得对满足 $ab+bc+ca=0$ 的所有实数 a,b,c,都有

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

韩国命题

解 对任给的 $a,b,c\in\mathbf{R}$, $ab+bc+ca=0$,有

此解法属于黄志毅

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c) \quad ①$$

在①中令 $a=b=c=0$,有 $P(0)=0$.

在①中令 $b=c=0$,有 $P(-a)=P(a)$ 对任给实数 a 成立. 因此 $P(x)$ 的所有奇次项系数为 0. 不妨设

$$P(x)=a_nx^{2n}+\cdots+a_1x^2, a_n\neq 0$$

在①中令 $b=2a$, $c=-\frac{2}{3}a$,有

$$P(-a)+P\left(\frac{8}{3}a\right)+P\left(-\frac{5}{3}a\right)=2P\left(\frac{7}{3}a\right)$$

即

$$a_n\left(1+\left(\frac{8}{3}\right)^{2n}+\left(\frac{5}{3}\right)^{2n}-2\left(\frac{7}{3}\right)^{2n}\right)a^{2n}+\cdots+$$

$$a_1\left(1+\left(\frac{8}{3}\right)^{2}+\left(\frac{5}{3}\right)^{2}-2\left(\frac{7}{3}\right)^{2}\right)a^{2}=0$$

对所有 $a\in\mathbf{R}$ 成立,故关于 a 的多项式的所有系数为 0.

当 $n\geqslant 3$ 时,由 $8^6=262\ 144>235\ 298=2\cdot 7^6$ 知

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{2n}\geqslant\left(\frac{8}{7}\right)^{6}>2$$

从而

$$1+\left(\frac{8}{3}\right)^{2n}+\left(\frac{5}{3}\right)^{2n}-2\left(\frac{7}{3}\right)^{2n}>0$$

因此 $n\leqslant 2$,设 $P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

下面验证 $P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$ 满足要求.

设 $a,b,c\in\mathbf{R}$, $ab+bc+ca=0$,则

$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4-2(a+b+c)^4=$
$\sum(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)-2(a^2+b^2+c^2)^2=$
$\sum(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)-2a^4-2b^4-2c^4-$
$4a^2b^2-4a^2c^2-4b^2c^2=\sum(-4a^3b+2a^2b^2-4ab^3)=$
$-4a^2(ab+ca)-4b^2(bc+ab)-4c^2(ca+bc)+$
$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4a^2bc+4b^2ca+4c^2ab+2a^2b^2+$
$2b^2c^2+2c^2a^2=2(ab+bc+ca)^2=0$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(a+b+c)^2=$$
$$\sum(a^2-2ab+b^2)-2\sum a^2-4\sum ab=0$$

因此 $P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$ 满足要求.

3 由6个单位正方形构成的,图形如图45.3所示,以及它的旋转或翻转所得到的图形统称为钩形.

试确定所有 $m\times n$ 的矩形,使其能被钩形所覆盖,要求:

(1) 覆盖矩形时,不能有空隙,钩形之间不重叠;

(2) 钩形不能覆盖到矩形外.

爱沙尼亚命题

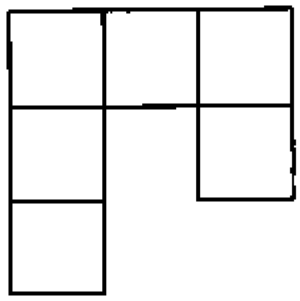


图 45.3

解法 1 所求的 m,n 为满足 $3\mid m,4\mid n$ 或 $3\mid n,4\mid m$ 或 12 整除 m,n 之一而另一个不小于 7 的正整数.

此解法属于黄志毅

以下图形经过旋转或轴对称变换,视为等价.

如图 45.4(a) 所示,给钩形的 6 个格子编上号.图中阴影部分的格子必属于另一个钩形,且这个格子仅与该钩形中一个格子相邻,故只能是 1 或 6 这样的格子.

ⅰ 如果是 6,则两个钩形形成一个 3×4 的方形,如图 45.4(b) 所示.

ⅱ 如果是 1,则有两种情形.

若为前者,则阴影部分的方格不被覆盖,矛盾.因此只能是后者,如图 45.5 所示.

这样,图中的钩形就被两两配对,每对构成图 45.4 或图 45.5.

由于图 45.4、图 45.5 均有 12 个方格,故 $12\mid mn$.

下面分三种情形讨论.

ⅰ $3\mid m,4\mid n$ 或 $3\mid n,4\mid m$.

不妨设 $m=3m_0,n=4n_0$.将图 45.4 视为一个整体,用 m_0n_0 个图 45.4 排成一个 $m_0\times n_0$ 的方阵即可,故这时 $m\times n$ 矩形能被钩形所覆盖(每个 3×4 均可被两个钩形覆盖).

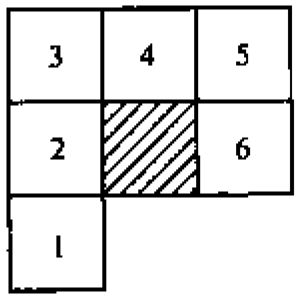
ⅱ $12\mid m$ 或 $12\mid n$,不妨设 $12\mid m$.

当 $3\mid n$ 或 $4\mid n$ 时,可化为 ⅰ.

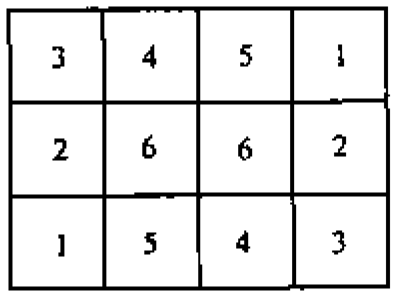
当 $3\nmid n$ 且 $4\nmid n$ 时,由于图中至少有 1 个图 45.4 或图 45.5,故 $n\geqslant3$.从而 $n\geqslant5$(因为 $3\nmid n,4\nmid n$).由于角上方格只能属于一个图 45.4 或图 45.5,而 $n\geqslant5$ 说明相邻的两个角上的方格不能同属于一个图 45.4 或图 45.5,故 $n\geqslant6$.又 $3\nmid n,4\nmid n$,故 $n\geqslant7$.

下面说明 $n\geqslant7(3\nmid n,4\nmid n)$ 时一定能被钩形覆盖.

若 $n\equiv1\pmod 3$,则 $n=4+3t(t\in\mathbf{N}^*)$.由 ⅰ 知 $12\mid m$ 时,



(a)



(b)

图 45.4

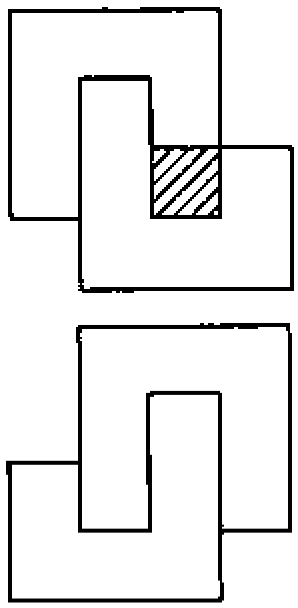


图 45.5

$x \times 3t$，$m \times 4$ 均可被钩形覆盖．因此 $m \times n$ 可被钩形覆盖．

若 $n \equiv 2 \pmod 3$，则 $n = 8 + 3t\ (t \in \mathbf{N}^*)$．由 ⅰ 知 $12 \mid m$ 时，$m \times 8$，$m \times 3t$ 均可被钩形覆盖．故 $m \times n$ 可被钩形覆盖．

ⅲ $12 \mid mn$ 但 $4 \nmid m$，$4 \nmid n$．这时 $2 \mid m$，$2 \mid n$．不妨设 $m = 6m_0$，$n = 2n_0$，$2 \nmid m_0$，$2 \nmid n_0$．

下面证明这时 $m \times n$ 矩形不能被钩形覆盖．

考虑将 $m \times n$ 矩形一列黑一列白地染色，则图中黑白格一样多，对于一个图 45.5，无论如何摆放，总盖住 6 个黑格；对于一个横置的图 45.4，无论如何摆放，总盖住 6 个黑格；而对于一个竖置的图 45.4，要么盖住 8 个黑格 4 个白格，要么盖住 4 个黑格 8 个白格．由于黑白格一样多，故盖住 8 黑 4 白的和盖住 4 黑 8 白的一样多．从而竖置的图 45.4 有偶数个．同理可得（对行相间染色）：横置的图 45.4 有偶数个．

考虑如图 45.6 将 $m \times n$ 方形的格子分为 4 类，4 类的格子一样多，均为 $\frac{mn}{4}$ 个．

1	2	3	4	1	2	…	1	2
3	4	1	2	3	4	…	3	4
1	2	3	4	1	2	…	1	2
						…		
						…		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
3	4	1	2	3	4	…	3	4

图 45.6

对于一个图 45.4：

a	b	c	d
c	d	a	b
a	b	c	d

a	b	c
c	d	a
a	b	c
c	d	a

图 45.7

它盖住的 a，c 一样多，b，d 一样多，从而一个图 45.4 盖住的 1，3 类格子一样多．

对于一个图 45.5：

如图 45.8 所示，可以看出(a)，(b) 两种盖住的 1，3 类格子一

样多,而(c),(d) 两种 1,3 类格子个数正好差图 45.5,但 $m\times n$ 中 1,3 类一样多.因此 1 类比 3 类多 2 的和 3 类比 1 类多 2 的一样多.从而(c),(d) 两种的总数为偶数.若用

1	3	1
2	4	2
3	1	3
4	2	4

分类,类似可得(a),(b) 两种共有偶数个,从而图 45.5 有偶数个.所以共有偶数个图 45.4 和图 45.5.因而 $24\mid m\times n$,与 $4\nmid m$,$4\nmid n$ 矛盾.

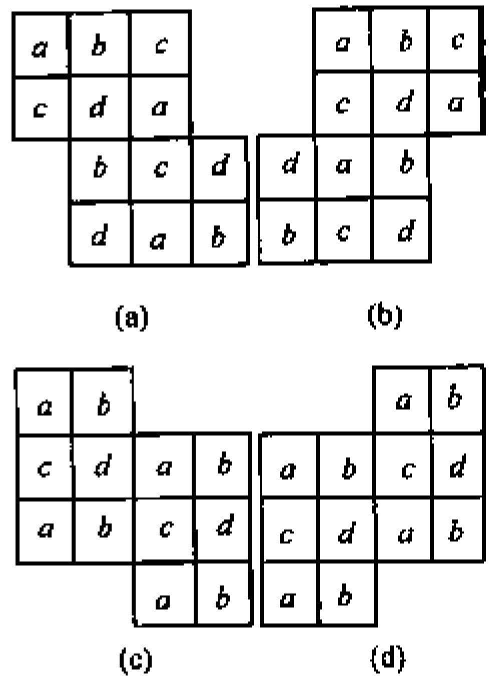


图 45.8

解法 2 所有符合要求的数对 m,n 是满足 $3\mid m,4\mid n$ 或 $3\mid n,4\mid m$ 或 $12\mid m,n\neq 1,2,5$ 或 $12\mid n,m\neq 1,2,5$ 的所有正整数对.

假设一个 $m\times n$ 的方形能被钩形所覆盖.对任何钩形 A,存在惟一的钩形 B,使得它的"末端"的一个正方形覆盖 A 的"内部"的一个正方形.同时,B 的"内部"的正方形必须被 A 的"末端"的一个正方形覆盖.这样,在 $m\times n$ 的一种覆盖中,所有的钩形两两配对,只有两种可能的方法放置 B,使得它与 A 既不重叠也没有空隙.一种是 A 和 B 形成一个 3×4 的矩形,另一种是形成一个八边形,边长依次为 3,2,1,2,3,2,1,2.

因此,一个 $m\times n$ 的矩形能被钩形覆盖当且仅当它能被如上两种 12 个方形的块所覆盖.假定这样覆盖存在,则 $12\mid mn$.现在我们证明 m,n 中至少有一个能被 4 整除.

用反证法.假设 m,n 均不能被 4 整除,则由 $4\mid mn$ 知 m,n 均为偶数.将 $m\times n$ 的矩形分成单位正方形,将行和列分别标上号码 $1,2,\cdots,m$ 及 $1,2,\cdots,n$.给单位正方形 (i,j) 按如下方式赋值:值为 i,j 中能被 4 整除的数的个数(因此值可以为 0,1,2).由于每一行和每一列的单位正方形的数目均为偶数,故所有赋值之和为偶数.每一个 3×4 的矩形覆盖的数的和为 3 或 7,另一种 12 个方形的块覆盖的数的和为 5 或 7.因此 12 个方形的块的总数是偶数,从而 mn 能被 24 整除,因而能被 8 整除,与 m,n 均不能被 4 整除矛盾.

注意到 m,n 均不能为 1,2,5.因此,若一个覆盖可能,则 3 能整除 m,n 之一,4 能整除 m,n 之一,且 $m,n\notin\{1,2,5\}$.下面证明

满足这些条件的 $m, n, m \times n$ 的矩形可被钩形所覆盖. 事实上, 只用 3×4 的矩形即可. 若 $3 \mid m, 4 \mid n$ 或 $3 \mid n, 4 \mid m$, 则 $m \times n$ 可用 3×4 的矩形覆盖. 现设 $12 \mid m, n \notin \{1,2,5\}$ ($12 \mid n, m \notin \{1,2,5\}$ 的情形一样), 不妨设 $3 \nmid n, 4 \nmid n$ (否则归为前一情形). 由于 $3 \nmid n$, $4 \nmid n$, 故 $n \geqslant 7$ 且 $n-4, n-8$ 中至少有一个能被 3 整除. 因此 $m \times n$ 可被 $m \times 3, m \times 4$ 的矩形覆盖, 从而能被 3×4 的矩形覆盖.

4 设 $n \geqslant 3$ 为整数, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 为正实数, 满足

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

证明: 对满足 $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ 的所有整数 i, j, k, 正实数 t_i, t_j, t_k 总能构成三角形的三边长.

韩国命题

证法 1 反设 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 中有三个不构成三角形的三边长, 不妨设为 t_1, t_2, t_3 且 $t_1 + t_2 \leqslant t_3$. 因为

此证法属于朱庆三

$$(t_1 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right) + n =$$

$$\frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{t_1} + \frac{t_2}{t_3} + \frac{t_3}{t_2} + \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ (i,j) \notin \{(1,3),(2,3)\}}}\left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right) + n \geqslant$$

$$\frac{t_1 + t_2}{t_3} + t_3\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) + \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ (i,j) \notin \{(1,3),(2,3)\}}} 2 + n \geqslant$$

$$\frac{t_1 + t_2}{t_3} + \frac{4t_3}{t_1 + t_2} + 2(C_n^2 - 2) + n =$$

$$4\frac{t_3}{t_1 + t_2} + \frac{t_1 + t_2}{t_3} + n^2 - 4 \qquad ①$$

设 $x = \dfrac{t_3}{t_1 + t_2}$, 则

$$x \geqslant 1, 4x + \frac{1}{x} - 5 = \frac{(x-1)(4x-1)}{x} \geqslant 0$$

由 ① 得

$$(t_1 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) \geqslant 5 + n^2 - 4 = n^2 + 1$$

矛盾. 所以反设不成立, 原命题成立.

注 由平均值不等式

$$\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)(t_1 + t_2) \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{t_1 t_2}} \cdot 2\sqrt{t_1 t_2} = 4$$

故

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \geqslant \frac{4}{t_1 + t_2}$$

此证法属于李潜

证法2　假设在 $t_1,t_2,\cdots,t_n(n\geqslant 3)$ 中,存在 $i,j,k(1\leqslant i<j<k\leqslant n,i,j,k\in\mathbf{N})$,使得 t_i,t_j,t_k 不构成三角形的三边长.不妨设 t_1,t_2,t_3 不构成三角形三边长,且 $t_1+t_2\leqslant t_3$.

下面对 n 应用数学归纳法证明在此假设下

$$(t_1+t_2+\cdots+t_n)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n})\geqslant n^2+1$$

当 $n=3$ 时,我们有

$$(t_1+t_2+t_3)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3})\geqslant(t_1+t_2+t_3)(\frac{4}{t_1+t_2}+\frac{1}{t_3})=5+\frac{4t_3}{t_1+t_2}+\frac{t_1+t_2}{t_3}$$

易知函数 $f(x)=4x+\frac{1}{x}+5$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,所以由 $\frac{t_3}{t_1+t_2}\geqslant 1$,得

$$(t_1+t_2+t_3)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3})\geqslant f(\frac{t_3}{t_1+t_2})\geqslant f(1)=10$$

从而当 $n=3$ 时结论成立.

假设当 $n=l$ 时结论成立,即

$$(t_1+t_2+\cdots+t_l)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_l})\geqslant l^2+1$$

则当 $n=l+1$ 时

$$(t_1+t_2+\cdots+t_l)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_l})\geqslant$$

$$(t_1+t_2+\cdots+t_l)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_l})+$$

$$t_{l+1}(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_1})+\frac{1}{t_{l+1}}(t_1+t_2+\cdots+t_l)+1\geqslant$$

$$l^2+1+2\sqrt{t_{l+1}(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_l})\cdot\frac{1}{t_{l+1}}(t_1+t_2+\cdots+t_l)}+1\geqslant$$

$$l^2+1+2l+1=(l+1)^2+1$$

即结论对 $n=l+1$ 也成立,从而对一切正整数 $n\geqslant 3$,均有

$$(t_1+t_2+\cdots+t_n)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n})\geqslant n^2+1$$

这与已知矛盾,故结论成立.

波兰命题

5 在凸四边形 $ABCD$ 中,对角线 BD 既不是 $\angle ABC$ 的平分线,也不是 $\angle CDA$ 的平分线,点 P 在四边形 $ABCD$ 内部,满足

$$\angle PBC=\angle DBA,\angle PDC=\angle BDA$$

证明:$ABCD$ 为圆内接四边形的充分必要条件是 $AP=CP$.

此证法属于林运成

证法 1 (1) 必要性.

设 $ABCD$ 内接于圆Γ. 延长 BP, DP 交$ABCD$ 的外接圆圆Γ于点 X, Y.

由$\angle PBC = \angle DBA$, DB 不平分$\angle ABC$ 及 P 在 $ABCD$ 内知 $\overset{\frown}{CX} = \overset{\frown}{AD}$, 且 $D \neq X$. D, X 在直线AC 同侧. 因此

$$DX \parallel AC$$

同理

$$B \neq Y, BY \parallel AC$$

由 $DX \parallel AC$, $AC \parallel BY$, $D \neq X$, $B \neq Y$, D, X, A, C, B, Y 均在圆 Γ 上知以下三个点对均关于AC 的垂直平分线 l 对称: (D, X), (A, C), (B, Y).

而 $P = DY \cap BX$, 故 P 在l 上, 即 $AP = CP$.

必要性得证.

(2) 充分性.

引理 设 l, A, B, C 分别为定直线及三个定点, A 与B, C 分别位于 l 的两侧. 如果点 $X \in l$, 并且直线 XA 逆时针转到直线l 所需最小角度 $\alpha(X)$ 等于直线 XC 逆时针转到直线XB 所需最小角度 $\beta(X)$, 则称 X 为好点.

好点至多有两个.

引理的证明 以 l 为x 轴, 垂直于 l 的直线为y 轴建立坐标系. 设

$$A(a,b), B(c,d), C(e,f), X(x,0)$$

则 A, B, C, X 对应的复数为

$$A = a + bi, B = c + di, C = e + fi, X = x$$

从而

$$A - X = a - x + bi$$

$$(a - x + bi)(\cos\alpha(X) + i\cdot\sin\alpha(X)) =$$
$$(a - x)\cos\alpha(X) - b\cdot\sin\alpha(X) +$$
$$((a - x)\sin\alpha(X) + b\cdot\cos\alpha(X))i$$

因为直线 XA 逆时针转角度$\alpha(X)$ 后与 l 重合, 故

$$(a - x)\sin\alpha(X) + b\cdot\cos\alpha(X) = 0 \quad ①$$

又

$$\overrightarrow{XC} = e - x + fi, \overrightarrow{XB} = c - x + di$$

故$\overrightarrow{XC}$ 逆时针转$\beta(X)$ 角度后变为

$$(e - x + fi)(\cos\beta(X) + i\cdot\sin\beta(X)) =$$
$$(e - x)\cos\beta(X) - f\cdot\sin\beta(X) +$$
$$((e - x)\sin\beta(X) + f\cdot\cos\beta(X))i$$

它应与$\overrightarrow{XB}$ 平行, 即

$$(c - x)((e - x)\sin\beta(X) + f\cdot\cos\beta(X)) -$$
$$d((e - x)\cos\beta(X) - f\cdot\sin\beta(X)) = 0$$

即

$$((c-x)(e-x)+df)\sin\beta(X)+$$
$$((c-x)f-d(e-x))\cos\beta(X)=0 \qquad ②$$

由于 $\sin\theta,\cos\theta$ 不全为0,故 X 为好点 $\Leftrightarrow \alpha(X)=\beta(X) \overset{①②}{\Leftrightarrow}$ 关于 u,v 的线性方程组

$$\begin{cases}(a-x)u+bv=0\\((c-x)(e-x)+df)u+((c-x)f-d(e-x))v=0\end{cases}$$

有非零解 $\Leftrightarrow$

$b((c-x)(e-x)+df)+(a-x)((c-x)f-d(e-x))=0 \Leftrightarrow$

$(b+d-f)x^2+(af+cf-bc-be-ad-ed)x+$

$bce+bdf+ade-acf=0$

令 $g(x)=(b+d-f)x^2+(af+cf-bc-be-ad-ed)x+$
$bce+bdf+ade-acf$

若 $b+d-f=0$,则由 $b\neq0$ 知 $d\neq f$.从而 BC 与 l 不平行,设 BC 与 l 相交于点 $T(t,0)$,则 $\beta(T)=0,\alpha(T)>0$.因此 T 不是好点,从而 $g(t)\neq0$.所以 $g(x)=0$ 至多有两个根.因而至多有两个好点.

引理得证.

下面回到原题.设 A,B,C,D 顺时针排列,$AP=CP$.在射线 BD 上取点 D^*,使 A,D^*,C,B 四点共圆.由于 BD 不平分 $\angle ABC$,$\angle ADC$ 及 $AP=CP$ 知 P 是直线 BP 与 AC 的垂直平分线的惟一交点.

设射线 D^*R 使 $\angle CD^*R=\angle AD^*B$,并设 $D^*R\cap BP=P^*$.

由(1)知 $P^*A=P^*C$,即 P^* 也是 l 与 AC 垂直平分线的交点.从而 $P^*=P$.由此及 $\angle CD^*R=\angle AD^*B$ 知

$$\angle AD^*B=\angle CD^*P$$

用 BD,A,C,P 分别代替引理中的 l,A,B,C,则 B,D,D^* 均为好点.又 $B\neq D,B\neq D^*$,故 $D=D^*$.由此知 A,B,C,D 四点共圆,充分性得证.

综合(1)(2)结论成立.证毕.

证法2 不妨设 P 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 内,如图45.9所示.

此证法属于付云皓

设 $ABCD$ 为圆内接四边形,直线 BP,DP 分别交 AC 于 K 和 L.因为

$$\angle PBC=\angle DBA,\angle PDC=\angle BDA$$
$$\angle ACB=\angle ADB,\angle ABD=\angle ACD$$

故 $\triangle DAB,\triangle DLC,\triangle CKB$ 两两相似.

从而 $\angle DLC=\angle CKB$,因而 $\angle PLK=\angle PKL$,所以 $PK=PL$.

因为 $\angle BDA=\angle PDC$，故 $\angle ADL=\angle BDC$.

又 $\angle DAL=\angle DBC$，故 $\triangle ADL\backsim\triangle BDC$.

因此 $\frac{AL}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{KC}{BC}$（后一等号用到 $\triangle DAB\backsim\triangle CKB$）. 由此知 $AL=KC$.

因为 $\angle DLC=\angle CKB$，故 $\angle ALP=\angle CKP$. 又因为 $PK=PL$，$AL=KC$，故 $\triangle ALP\cong\triangle CKP$. 所以 $AP=CP$.

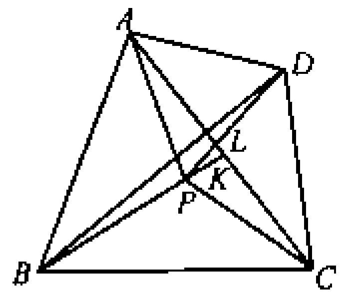


图 45.9

反过来，设 $AP=CP$. 设 $\triangle BCP$ 的外接圆分别交直线 CD，DP 于点 X 和 Y，如图 45.10 所示.

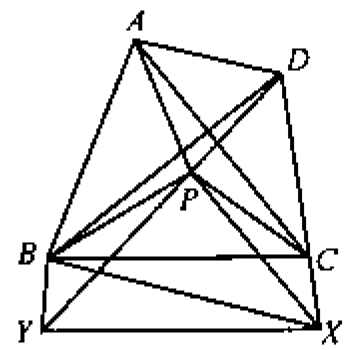


图 45.10

因为

$$\angle ADB=\angle PDX,\angle ABD=\angle PBC=\angle PXC$$

故 $\triangle ADB\backsim\triangle PDX$，从而

$$\frac{AD}{PD}=\frac{BD}{XD}$$

又 $\angle ADP=\angle ADB+\angle BDP=\angle PDX+\angle BDP=\angle BDX$

故 $\triangle ADP\backsim\triangle BDX$. 因此

$$\frac{BX}{AP}=\frac{BD}{AD}=\frac{XD}{PD} \quad ③$$

因为 P,C,X,Y 共圆，故

$$\angle DPC=\angle DXY,\angle DCP=\angle DYX$$

从而 $\triangle DPC\backsim\triangle DXY$. 这样

$$\frac{YX}{CP}=\frac{XD}{PD} \quad ④$$

由 $AP=CP$，③ 和 ④ 得 $BX=YX$. 因此

$$\angle DCB=\angle XYB=\angle XBY=\angle XPY=\angle PDX+\angle PXD=$$
$$\angle ADB+\angle ABD=180^\circ-\angle BAD$$

所以四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

6 如果一个正整数的十进制表示中，任何两个相邻数字的奇偶性不同，则称这个正整数为交替数.

试求出所有的正整数 n，使得 n 至少有一个倍数为交替数.

伊朗命题

解法 1

此解法属于杨诗武

引理 1 对正整数 k，存在 $0\leqslant a_1,a_2,\cdots,a_{2k}\leqslant 9$，使得 $a_1,a_3,\cdots,a_{2k-1}$ 是奇数，$a_2,a_4,\cdots,a_{2k}$ 是偶数，且

$$2^{2k+1}\mid \overline{a_1a_2\cdots a_{2k}} \quad (\text{表示十进制数})$$

引理 1 的证明 对 k 用数学归纳法.

$k=1$ 时，由 $8\mid 16$ 知命题成立.

假设 $k=n-1$ 时结论成立. $k=n$ 时,设

$$\overline{a_1a_2\cdots a_{2n-2}}=2^{2n-1}t \quad (归纳假设)$$

只要证存在 $1\leqslant a,b\leqslant 9$, a 为奇数, b 为偶数,且

$$2^{2n+1}\mid \overline{ab}\cdot 10^{2n-2}+2^{2n-1}t$$

即

$$8\mid \overline{ab}\cdot 5^{2n-2}+2t$$

因为

$$5^{2n-2}\equiv 1(\bmod 8)$$

即

$$8\mid \overline{ab}+2t$$

由 $8\mid 12+4$, $8\mid 14+2$, $8\mid 16+0$, $8\mid 50+6$,可知引理1成立.

引理2 对正整数 k,存在一个 $2k$ 位的交替数 $\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}}$,其末位为奇数,且

$$5^{2k}\mid \overline{a_1a_2\cdots a_{2k}}$$

其中, a_1 可以为0但 $a_2\neq 0$.

引理2的证明 对 k 用数学归纳法.

当 $k=1$ 时,由 $25\mid 25$ 即知命题成立.

假设 $k-1$ 时命题成立,即存在交替数 $\overline{a_1a_2\cdots a_{2k-2}}$ 满足

$$5^{2k-2}\mid \overline{a_1a_2\cdots a_{2k-2}}$$

设 $\overline{a_1a_2\cdots a_{2k-2}}=t\cdot 5^{2k-2}$,此时只须证存在 $0\leqslant a,b\leqslant 9$, a 为偶数, b 为奇数,设 $\overline{a_1a_2\cdots a_{2k-2}}=t\cdot 5^{2k-2}$,且

$$5^{2k}\mid \overline{ab}\cdot 10^{2k-2}+t\cdot 5^{2k-2}$$

即

$$25\mid \overline{ab}\cdot 2^{2k-2}+t$$

由 $(2^{2k-2},25)=1$ 知存在 $0<\overline{ab}\leqslant 25$,使 $25\mid \overline{ab}\cdot 2^{2k-2}+t$. 若此时 b 为奇数,则 $\overline{ab}$, $\overline{ab}+50$ 中至少有一个满足首位为偶数. 若 b 为偶数,则 $\overline{ab}+25$, $\overline{ab}+75$ 中至少有一个成立.

引理2得证.

下面考虑本题.

设 $n=2^{\alpha}5^{\beta}t$, $(t,10)=1$, $\alpha,\beta\in\mathbf{N}$.

若 $\alpha\geqslant 2$, $\beta\geqslant 1$,则对 n 的任一个倍数 l, l 的末位数为0,且十位数是偶数. 因此 n 不满足要求.

i 当 $\alpha=\beta=0$ 时,考虑数 $21,2121,212121,\cdots,\underbrace{2121\cdots21}_{k个21},\cdots$,其中必有两个模 n 同余,不妨设 $t_1>t_2$ 且

$$\underbrace{2121\cdots21}_{t_1个21}\equiv\underbrace{2121\cdots21}_{t_2个21}(\bmod n)$$

则

$$\underbrace{2121\cdots21}_{t_1-t_2个21}\underbrace{00\cdots0}_{2t_2个0}\equiv 0(\bmod n)$$

因为 $(n,10)=1$,因此

$$\underbrace{2121\cdots21}_{t_1-t_2个21}\equiv 0(\bmod n)$$

此时 n 满足要求.

ⅱ $\beta=0,\alpha\geqslant 1$. 由引理 1 知存在交替数 $\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}}$ 满足 $2^{\alpha}\mid \overline{a_1a_2\cdots a_{2k}}$. 考查

$$\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}},\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}a_1a_2\cdots a_{2k}},\cdots,$$
$$\underbrace{\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}a_1a_2\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots a_{2k}}}_{t\text{段}},\cdots$$

其中,必有两个模 t 同余,不妨设 $t_1>t_2$,且

$$\overline{a_1a_2\underbrace{\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots}_{t_1\text{段}}a_{2k}}\equiv\overline{a_1a_2\underbrace{\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots}_{t_2\text{段}}a_{2k}}\pmod t$$

因为 $(t,10)=1$,故

$$\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots a_{2k}}\equiv 0\pmod t$$

因为 $(t,2)=1$,所以

$$2^{\alpha}t\mid\overline{a_1a_2\underbrace{\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots}_{t_1-t_2\text{段}}a_{2k}}$$

且此数为交替数.

ⅲ $\alpha=0,\beta\geqslant 1$. 由引理 2 可知存在交替数 $\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}}$ 满足 $5^{\beta}\mid\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}}$ 且 a_{2k} 是奇数. 同 ⅱ 可得存在 $t_1>t_2$ 满足

$$t\mid\overline{a_1a_2\underbrace{\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots}_{t_1-t_2\text{段}}a_{2k}}$$

因 $(5,t)=1$,故

$$5^{\beta}t\mid\overline{a_1a_2\underbrace{\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots}_{t_1-t_2\text{段}}a_{2k}}$$

且此数为交替数,末位数 a_{2k} 为奇数.

ⅳ $\alpha=1,\beta\geqslant 1$. 由 ⅲ 知存在交替数 $\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots a_{2k}}$ 满足 a_{2k} 是奇数且

$$5^{\beta}t\mid\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots a_{2k}}$$

从而

$$2\cdot 5^{\beta}t\mid\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}\cdots a_1a_2\cdots a_{2k}0}$$

且此数为交替数.

综上可知满足条件的 n 为 $20\nmid n,n\in\mathbf{N}^*$.

解法 2 所求的所有 n 为:满足 $20\nmid n$ 的所有正整数 n.

此解法属于李先颖

(1) 若 $20\mid n$,则对 n 的任何倍数 $(a_ka_{k-1}\cdots a_1)_{10},a_k\neq 0$,有 $20\mid(a_ka_{k-1}\cdots a_1)_{10}$. 因此 $a_2=0,2\mid(a_ka_{k-1}\cdots a_2)_{10}$. 从而 a_2 为偶数,a_2 和 a_1 同为偶数,所以 $(a_ka_{k-1}\cdots a_1)_{10}$ 不是交替数.

(2) 现在我们来证明对任何正整数 n,$20\nmid n$,则 n 一定有一个倍数是交替数.

先建立 3 个引理,再分 4 种情况来证明上述结论.

引理 1 对正整数 n,若 $(n,10)=1$,则对任何 $l\in\mathbf{N}^*$,存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得数

$$\underbrace{1\underbrace{00\cdots0}_{l个0}1\underbrace{00\cdots0}_{l个0}1\cdots1\underbrace{00\cdots0}_{l个0}1}_{一共k个1}$$

是 n 的倍数.

引理 1 的证明 考虑数

$$x_1=1,x_2=1\underbrace{00\cdots0}_{l个0}1,\cdots,x_m=\underbrace{1\underbrace{00\cdots0}_{l个0}1\cdots1\underbrace{00\cdots0}_{l个0}1}_{m个1},\cdots$$

在这无穷多个数中,一定有 2 个数模 n 同余.不妨设

$$x_s\equiv x_t(\mathrm{mod}\ n),s>t\geqslant 1$$

则 $$n\mid x_s-x_t$$

又 $$x_s-x_t=x_{s-t}10^{t(l+1)},(n,10)=1$$

故 $n\mid x_{s-t}$,$s-t>0$ 为正整数,引理 1 获证.

引理 2 对任给的 $m\in\mathbf{N}^+$,总存在 m 位的交替数 s_m(s_m 的首位可以是 0),s_m 的个位是 5,且 $5^m\mid s_m$.

引理 2 的证明 归纳构造.定义 $s_1=5$,假设 $s_m=(a_ma_{m-1}\cdots a_1)_{10}$,$a_m$ 可能为 0,是交替数,$a_1=5$ 且 $5^m\mid s_m$.设 $s_m=5^m$,记

$$A=\begin{cases}\{0,2,4,6,8\},若\ a_m\ 为奇数\\\{1,3,5,7,9\},若\ a_m\ 为偶数\end{cases}$$

因为 A 中的数模 5 互不同余,且 $(2^m,5)=1$,故 $\{2^mx\mid x\in A\}$ 中这 5 个数模 5 互不同余.取 $x\in A$,使

$$2^mx\equiv -l(\mathrm{mod}\ 5)$$

则 $5\mid 2^mx+l$.令 $s_{m+1}=(xa_ma_{m-1}\cdots a_1)_{10}$,则 s_{m+1} 是 $m+1$ 位的交替数,$a_1=5$,首位可以为 0,且

$$s_{m+1}=x10^m+s_m=5^m(2^mx+l)$$

是 5^{m+1} 的倍数.这样,引理 2 获证.

引理 3 对任给整数 $m\in\mathbf{N}^+$,总存在 m 位的交替数 t_m,t_m 的个位是 2,且

$$2^{2k+1}\parallel t_{2k+1},2^{2k+3}\parallel t_{2k+2}$$

引理 3 的证明 归纳构造.定义 $t_1=2$.假设交替数 $t_{2k+1}=(a_{2k+1}a_{2k}\cdots a_1)_{10}$,使 $a_1=2$ 且 $2^{2k+1}\parallel t_{2k+1}$.则 $a_{2k+1}\equiv a_1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$(交替数的性质).

记 $A=\{1,3,5,7\}$.因为 A 中的数模 8 互不同余,且 $(5^{2k+1},8)=1$,所以 $\{5^{2k+1}x\mid x\in A\}$ 中这 4 个数模 8 互不同余,又 $5^{2k+1}x(x\in A)$ 是奇数,故这 4 个数模 8 的余数遍历 1,3,5,7.

设 $t_{2k+1}=2^{2k+1}l$,l 为奇数,取 $x\in A$,使

$$5^{2k+1}x\equiv -l+4(\mathrm{mod}\ 8)$$

则 $2^2\parallel 5^{2k+1}x+l$.令 $t_{2k+2}=(xa_{2k+1}\cdots a_1)_{10}$,则 t_{2k+2} 是 $2k+2$ 位

交替数，$a_1 = 2$ 且

$$t_{2k+2} = x10^{2k+1} + t_{2k+1} = 2^{2k+1}(5^{2k+1}x + l)$$

由 $2^2 \parallel 5^{2k+1}x + l$ 知 $2^{2k+3} \parallel t_{2k+2}$.

又假设交替数

$$t_{2k+2} = (a_{2k+2}\cdots a_1)_{10}, a_1 = 2, 2^{2k+3} \parallel t_{2k+2}$$

令

$$t_{2k+3} = (4a_{2k+2}\cdots a_1)_{10}$$

则 t_{2k+3} 是 $2k+3$ 位的交替数，且

$$t_{2k+3} = 5^{2k+2}2^{2k+4} + t_{2k+2}$$

而 $2^{2k+3} \parallel t_{2k+2}$，故 $2^{2k+3} \parallel t_{2k+3}$.

这样，引理 3 获证.

现在回到原题.

ⅰ 若 $(n,10) = 1$，则由引理 1 知存在 $k \in \mathbf{N}^+$，使得 $\underbrace{10101\cdots101}_{k个1}$ 是 n 的倍数(相当于引理 1 中取 $l = 1$).

ⅱ 若 $5 \nmid n, 2 \mid n$，设 $n = 2^m n_0, 2 \nmid n_0$，则 $(n_0,10) = 1$. 取 $m_0 > m$，m_0 为偶数. 由引理 3 知存在 m_0 位的交替数 $t_{m_0} = (a_{m_0}\cdots a_1)_{10}$，$a_1 = 2$ 且 $2^{m_0+1} \parallel t_{m_0}$，因而 $2^m \mid t_{m_0}$. 由引理 1 知存在 $k \in \mathbf{N}^+$，使

$$\underbrace{1\underbrace{00\cdots0}_{m_0-1个0}1\underbrace{00\cdots0}_{m_0-1个0}1\cdots1\underbrace{00\cdots0}_{m_0-1个0}1}_{k个1}$$

是 n_0 的倍数. 令

$$P = (\underbrace{a_{m_0}a_{m_0-1}\cdots a_1 a_{m_0}\cdots a_1\cdots a_{m_0}\cdots a_1}_{一共k段“a_{m_0}\cdots a_1”})_{10}$$

则 P 是交替数，且

$$P = t_{m_0}\cdot \underbrace{1\underbrace{00\cdots0}_{m_0-1个0}1\cdots100\cdots01}_{k个1}$$

能被 $2^m n_0$ 整除，即 $n \mid P$.

ⅲ 若 $5 \mid n, 2 \nmid n$，设 $n = 5^m n_0, 5 \nmid n_0$，则 $(n_0,10) = 1$. 取 $m_0 > m$，m_0 为偶数，由引理 2 知存在 m_0 位的交替数 $s_{m_0} = (a_{m_0}\cdots a_1)_{10}$，$a_1 = 5$，$a_{m_0}$ 可以为 0，使 $5^{m_0} \mid s_{m_0}$，因而 $5^m \mid s_{m_0}$. 类似于 ⅱ，存在交替数 P，使 $5^m n_0 \mid P$，且 P 的末位为 $a_1 = 5$.

ⅳ 若 $10 \mid n, 20 \nmid n$，设 $n = 10n_0$，n_0 为奇数，则 n_0 必属于情况 ⅰ 或情况 ⅲ. 由 ⅰ，ⅲ 知存在交替数 $(a_k\cdots a_1)_{10}$ 是 n_0 的倍数，且 $a_1 = 1$ 或 5. 现令 $P = (a_k\cdots a_1 0)_{10}$，则交替数 P 是 n 的倍数.

综上所述，所有满足要求的 n 为满足 $20 \nmid n$ 的所有正整数.

第46届国际数学奥林匹克

墨西哥，2005

1 在正 $\triangle ABC$ 的三边上依下列方式选取6个点：在边 BC 上选点 A_1, A_2，在边 CA 上选点 B_1, B_2，在边 AB 上选点 C_1, C_2，使得凸六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 的边长都相等. 证明：直线 A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 共点.

罗马尼亚命题

此证法属于刁晗生

证法1　如图46.1所示，记 $A_1A_2 = d, AB = a$，另作一个边长为 $a - d$ 的正 $\triangle A_0B_0C_0$，分别在边 B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 上取点 A', B', C'，使得 $A'C_0 = A_2C, B'A_0 = B_2A, C'B_0 = C_2B$，则

$$A'B_0 = a - d - A'C_0 = BC - A_1A_2 - A_2C = BA_1$$

同理可得

$$B'C_0 = B_1C, C'A_0 = C_1A$$

结合

$$\angle B_1CA_2 = \angle B'C_0A', \angle B_2AC_1 = \angle B'A_0C', \angle C_2BA_1 = \angle C'B_0A'$$

知

$$\triangle CB_1A_2 \cong \triangle C_0B'A', \triangle AC_1B_2 \cong \triangle A_0C'B', \triangle BA_1C_2 \cong \triangle B_0A'C'$$

所以

$$B'C' = C'A' = A'B' = d$$

故 $\triangle A'B'C'$ 是正三角形，所以

$$\angle A'C'B' = \angle C'B'A' = \angle A'B'C' = 60^\circ$$

$$\angle AB_2C_1 = \angle A_0B'C' = 180^\circ - \angle C'B'A' - \angle A'B'C_0 = 120^\circ - \angle A'B'C_0$$

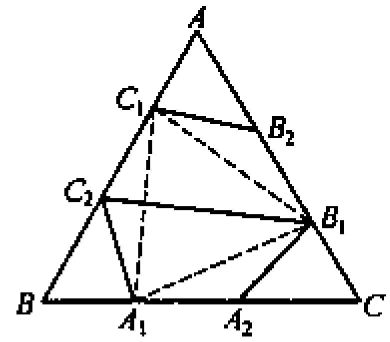
所以

$$\angle C_1B_2B_1 = \angle B_1A_2A_1$$

结合 $B_2C_1 = B_1B_2 = A_2B_1 = A_1A_2 = d$ 知

$$\triangle C_1B_2B_1 \cong \triangle B_1A_2A_1$$

所以 $B_1C_1 = A_1B_1$，又 $C_1C_2 = A_1C_2$，于是 C_2B_1 是 A_1C_1 的垂直平分线，所以 C_2B_1 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1C_1 上的高. 同理，C_1A_2, A_1B_2 分别是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1B_1, B_1C_1 上的高，故 A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 共点.



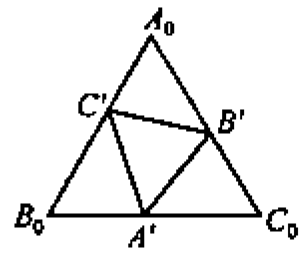


图46.1

证法2　如图46.2所示，在正 $\triangle ABC$ 内取一点 P，使 $\triangle A_1PA_2$ 是等边三角形. 注意到 $A_1P \parallel C_1C_2, A_1P = A_1A_2 = C_1C_2 = A_1C_2$，可知 $A_1PC_1C_2$ 是菱形. 同理 $A_2PB_2B_1$ 也是菱形，从而

$\triangle C_1PB_2$ 是等边三角形.

记 $\angle B_2B_1A_2 = \alpha, \angle B_1A_2A_1 = \beta, \angle C_1C_2A_1 = \gamma$,则

$$\alpha + \beta = 360° - (\angle CB_1A_2 + \angle B_1A_2C) = 360° - (180° - \angle C) = 180° + 60° = 240°$$

又 $\gamma = \angle C_1PA_1, \alpha = \angle B_2PA_2$,于是

$$\gamma + \alpha = 360° - (\angle C_1PB_2 + \angle A_1PA_2) = 240°$$

所以 $\beta = \gamma$. 同理 $\angle C_1B_2B_1 = \beta$. 从而 $\triangle A_1A_2B_1, \triangle B_1B_2C_1, \triangle C_1C_2A_1$ 是全等三角形,于是 $\triangle A_1B_1C_1$ 是等边三角形. 这样易见直线 A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 三边的中垂线,从而三线共点.

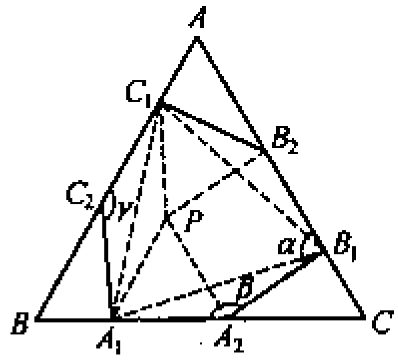


图 46.2

注 (1) 本题条件可以放宽为"在正 $\triangle ABC$ 的三边所在直线上"选点,获得等边凸(凹)六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 后,结论仍然成立. 如图 46.3 所示.

(2) 显然,$\triangle A_2B_2C_2$ 也是等边三角形. 直线 A_2C_1, B_2A_1, C_2B_1 是 $\triangle A_2B_2C_2$ 三边的中垂线. 因此 U 也是 $\triangle A_2B_2C_2$ 的中心,$\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的外接圆是同心圆,$\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 为位似图形,U 为位似中心,位似比为两圆半径之比.

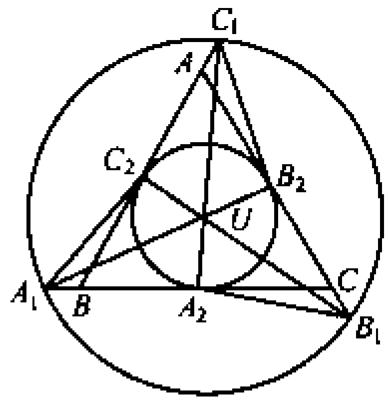


图 46.3

> **2** 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个整数数列,其中既有无穷多项是正整数,又有无穷多项是负整数. 如果对每一个正整数 n,整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同. 证明:每个整数恰好在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中出现一次.

荷兰命题

证法 1 首先,每个整数在此数列中至多出现一次. 若某个整数 k 在此数列中至少出现两次,设 $a_i = a_j = k(i < j)$,则在 $a_1, a_2, \cdots, a_j$ 中存在两个数 a_i, a_j,它们被 j 除的余数相同,矛盾.

此证法属于任庆春

其次,设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中最大的数为 x_k,最小的数为 $y_k(k = 1, 2, \cdots)$,则

$$x_k - y_k \leqslant k - 1$$

若存在某个 k,使得 $x_k - y_k \geqslant k$,不妨设 $a_i = x_k, a_j = y_k$, $a_j - a_i = l \geqslant k$,则 $i, j \leqslant k \leqslant l$. 所以在 $a_1, a_2, \cdots, a_l$ 中存在两个数 a_i, a_j,它们被 l 除的余数相同,矛盾.

下面证明:对每个满足 $y_k \leqslant t \leqslant x_k$ 的整数 t,都存在正整数 s, $1 \leqslant s \leqslant k$,使得 $a_s = t$. 若不然,则 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 只能取 $\{u \in \mathbf{Z} \mid y_k \leqslant u \leqslant x_k$,且 $u \neq t\}$ 中的值,只有 $x_k - y_k$ 个取值,而 $x_k - y_k \leqslant k - 1 < k$,故 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中必有两个相同,这与前面已经证明的

结论矛盾.

对于任一整数 m,因为数列中有无穷多个正整数,而不超过 $|m|$ 的正整数只有有限个,所以一定存在正整数 p,使得 $a_p > |m|$. 同理,也必存在正整数 q,使得 $a_q < -|m|$. 设 $r = \max\{p, q\}$,则 $x_r > |m|$, $y < -|m|$,所以,$y_r < m < x_r$. 由前面的结论,必存在正整数 s,使得 $a_s = m$,所以每个整数一定在数列中出现.

综上所述,每个整数恰好在数列中出现一次.

证法 2 首先,若 $i < j$,则 $a_i \neq a_j$. 这是因为,取 $n \geq j > i$,由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同,故 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同,特别地 $a_i \neq a_j$.

其次,若 $i < j \leq n$,则 $|a_i - a_j| \leq n - 1$. 否则,假设 $m = |a_i - a_j| \geq n$,则 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中有两个数(a_i 和 a_j)被 m 除后所得到的余数相同. 矛盾.

现在,对任意正整数 n,记

$$a_{i(n)} = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$
$$a_{j(n)} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

由前证可知

$$i(n) < j(n) \leq n \Rightarrow a_j(n) - a_i(n) \leq n - 1$$

又由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同,故 $a_{j(n)} - a_{i(n)} \geq n - 1$,所以 $a_{j(n)} - a_{i(n)} = n - 1$. 这表明集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的元素是 n 个连续整数.

对任意整数 x,因为数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中有无穷多项是正整数,也有无穷多项是负整数,且数列的项互不相同,所以必存在 i, j 使得 $a_i < x < a_j$. 取 $n > \max\{i, j\}$,由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 包含了 a_i 和 a_j 之间的所有整数,当然也包含了 x. 这就证明了,每个整数恰好在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中出现一次.

注 可证明,如下构造的数列 $\{a_n\}$ 符合题意,即

$$a_n = \begin{cases} k, n = 2k \\ 1 - k, n = 2k - 1, k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

易见数列 $\{a_n\}$ 为 $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$,不难证明对每一个正整数 n,整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同,且每个整数恰好在数列 $\{a_n\}$ 中出现一次.

3 正实数 x, y, z 满足 $xyz \geq 1$,证明

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

韩国命题

证法 1　我们只须证明

$$\sum \frac{x^5}{x^5+y^2+z^2} \geqslant 1 \geqslant \sum \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2} \qquad ①$$

此证法属于康嘉引

设 $xyz = d^3 \geqslant 1$，令 $x = x_1 d, y = y_1 d, z = z_1 d$，则 $x_1 y_1 z_1 = 1$，且

$$\sum \frac{x^5}{x^5+y^2+z^2} = \sum \frac{x_1^5 d^3}{x_1^5 d^3 + y_1^2 + z_1^2} = \sum \frac{x_1^5}{x_1^5 + \frac{1}{d^3}(y_1^2+z_1^2)} \geqslant \sum \frac{x_1^5}{x_1^5+y_1^2+z_1^2}$$

$$\sum \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2} = \sum \frac{x_1^2 d^2}{x_1^5 d^5 + y_1^2 d^2 + z_1^2 d^2} = \sum \frac{x_1^2}{x_1^5 d^3 + y_1^2 + z_1^2} \leqslant \sum \frac{x_1^2}{x_1^5+y_1^2+z_1^2}$$

所以，我们只须在 $xyz = 1$ 的情况下，证明式 ①.

因为

$$\sum \frac{x^5}{x^5+y^2+z^2} = \sum \frac{x^5}{x^5+xyz(y^2+z^2)} = \sum \frac{x^4}{x^4+y^3z+yz^3} \geqslant \sum \frac{x^4}{x^4+y^4+z^4} = 1$$

所以，式 ① 的左边得证.

而

$$\sum \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2} = \sum \frac{x^2 \cdot xyz}{x^5+xyz(y^2+z^2)} = \sum \frac{x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)}$$

由平均不等式

$$x^4+x^4+y^3z+yz^3 \geqslant 4x^2yz$$
$$x^4+y^3z+y^3z+y^2z^2 \geqslant 4xy^2z$$
$$x^4+yz^3+yz^3+y^2z^2 \geqslant 4xyz^2$$
$$y^3z+yz^3 \geqslant 2y^2z^2$$

把上面 4 个不等式相加，可得

$$x^4+yz(y^2+z^2) \geqslant x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

所以
$$\sum \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2} = \sum \frac{x^2yz}{x^4+y^3z+yz^3} \leqslant \sum \frac{x^2yz}{x^2yz+xy^2z+xyz^2} = 1$$

从而式 ① 的右边得证.

此证法属于 Boreico Iurie

证法 2 因为

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqslant 0$$

所以

$$\sum\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\sum\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\geqslant\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum(x^2-yz)(\text{因为 } xyz\geqslant 1)\geqslant 0$$

此证法属于王建伟

证法 3 显然原不等式等价于

$$\sum\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant 3 \qquad ②$$

其中，$\sum$ 表示关于 x,y,z 的循环和.

利用柯西不等式及 $xyz\geqslant 1$ 得

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geqslant(\sqrt{x^5yz}+\sqrt{y^2\cdot y^2}+\sqrt{z^2\cdot z^2})^2\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2$$

所以式 ② 左边小于等于

$$\sum\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\sum\frac{(y^2+z^2)/2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=3$$

推广 (1) 显然原不等式中等号成立当且仅当 $x=y=z=1$.

(2) 设 n 为正整数，正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$，则

$$\sum\frac{x_1^{2n-1}-x_1^{n-1}}{x_1^{2n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}\geqslant 0 \qquad ③$$

其中，$\sum$ 表示关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的循环和.

因为式 ③ 等价于

$$\sum\frac{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}{x_1^{2n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}\leqslant n \qquad ④$$

利用柯西不等式及 $x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$ 得

$$(x_1^{2n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})(x_2\cdots x_n+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})\geqslant(\sqrt{x_1^{2n-1}x_2\cdots x_n}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})^2\geqslant(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})^2$$

所以式 ④ 左边小于等于

$$\sum\frac{x_2\cdots x_n+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}\leqslant$$

$$\sum \frac{(x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})/(n-1)+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}=n$$

显然式 ③ 中等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

(3) 设正实数 x,y,z 满足 $yz+zx+xy\geqslant 3$, 则

$$\sum \frac{x^4-x^2}{x^4+y^2+z^2}\geqslant 0 \qquad ⑤$$

其中, $\sum$ 表示关于 x,y,z 的循环和.

因为式 ⑤ 等价于

$$\sum \frac{x^2+y^2+z^2}{x^4+y^2+z^2}\leqslant 3 \qquad ⑥$$

利用柯西不等式及 $yz+zx+xy\geqslant 3$ 得

$$(x^4+y^2+z^2)((yz+zx+xy)/3+y^2+z^2)\geqslant$$
$$(x^2\sqrt{(yz+zx+xy)/3}+y^2+z^2)^2\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2$$

所以有式 ⑥ 左边小于等于

$$\sum \frac{(yz+zx+xy)/3+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\leqslant$$
$$\sum \frac{(y^2+z^2)/6+(z^2+x^2)/6+(x^2+y^2)/6+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=3$$

显然式 ⑥ 中等号成立当且仅当 $x=y=z=1$.

(4) 设正实数 x,y,z 满足 $x+y+z\geqslant 3$, 则

$$\sum \frac{x^4-x^2}{x^4+y^2+z^2}\geqslant 0 \qquad ⑦$$

其中, $\sum$ 表示关于 x,y,z 的循环和, 式中等号成立当且仅当 $x=y=z=1$.

证明类似于式 ⑤.

> **4** 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下
>
> $$a_n=2^n+3^n+6^n-1,n=1,2,3,\cdots$$
>
> 求与此数列的每一项都互素的所有正整数.

波兰命题

解法 1 我们先证明如下结论: 对任意不小于 5 的素数 p, 都有

此解法属于罗晔

$$2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\equiv 0(\bmod p) \qquad ①$$

因为 p 是不小于 5 的素数, 所以 $(2,p)=1,(3,p)=1,(6,p)=1$, 由费马小定理

$$2^{p-1}\equiv 1(\bmod p),3^{p-1}\equiv 1(\bmod p),6^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$$

所以 $\quad 3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6^{p-1}\equiv 3+2+1=6(\bmod p)$

即 $\qquad 6\cdot 2^{p-2}+6\cdot 3^{p-2}+6\cdot 6^{p-2}\equiv 6(\bmod p)$

故 $$2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\equiv 0 \pmod p$$

所以 ① 成立，于是

$$a_{p-2}=2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\equiv 0 \pmod p$$

又 $a_1=10, a_2=48$.

对任意大于 1 的正整数 n，它必有一个素因数 p. 若 $p\in\{2,3\}$，则 $(n,a_2)>1$；若 $p\geqslant 5$，则 $(n,a_{p-2})>1$，故大于 1 的正整数都不符合要求.

而 1 与所有正整数都互质，所以符合题设要求的正整数只能为 1.

解法 2 令

$$b_n=a_n+1=2^n+3^n+6^n, n=-1,0,1,2,\cdots$$

则 $b_0=3, b_{-1}=1$. 由特征根方法易知

$$b_{n+3}=11b_{n+2}-36b_{n+1}+36b_n, n=-1,0,1,\cdots \quad ②$$

(设 $f(x)=(x-2)(x-3)(x-6)$，由 $2^nf(2)+3^nf(3)+6^nf(6)=0$ 可得上式)

对任一大于 3 的素数 p，有 $(p,6)=1$. 记 $\overline{m}$ 为整数 m 除以 p 的余数，由于不同的 3 元组 $(\overline{m}_1,\overline{m}_2,\overline{m}_3)$ 只有 p^3 个，由抽屉原理，必存在 i,j，$-1\leqslant i<j$，使得 $(\overline{b}_i,\overline{b}_{i+1},\overline{b}_{i+2})=(\overline{b}_j,\overline{b}_{j+1},\overline{b}_{j+2})$，则

$$36b_{i-1}\equiv b_{i+2}-11b_{i+1}+36b_i\equiv b_{j+2}-11b_{j+1}+36b_j\equiv 36b_{j-1} \pmod p$$

$$p\mid 36(b_{i-1}-b_{j-1})\Rightarrow p\mid(b_{i-1}-b_{j-1})\Rightarrow(\overline{b}_{i-1},\overline{b}_i,\overline{b}_{i+1})=(\overline{b}_{j-1},\overline{b}_j,\overline{b}_{j+1})$$

依此类推，可得

$$(\overline{b}_{-1},\overline{b}_0,\overline{b}_1)=(\overline{b}_{j-i-1},\overline{b}_{j-i},\overline{b}_{j-i+1})$$

特别地 $$b_{j-i-1}\equiv b_{-1}=1 \pmod p$$

从而 $$p\mid b_{j-i-1}-1\Rightarrow p\mid a_{j-i-1}$$

若 $j-i-1=0$，则 $a_0=2$，$p\mid 2$，矛盾，故 $j-i-1\geqslant 1$. 又因为 $a_2=48$，所以与此数列的每一项都互素的正数只有 1.

推广 我们常称题中的 a_n 为幂和式. 幂和式(特别是 2 项幂和式)是数学竞赛的常客.

(1) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下，即

$$a_n=2^n+4^n+7^n+14^n+28^n-1, n=1,2,3,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,7,7^2,7^3,\cdots$.

因为对任一不等于 2 和 7 的素数 p，有 $(p,28)=1$，由费马小定理得

$$28a_{p-2}=14\cdot 2^{p-1}+7\cdot 4^{p-1}+4\cdot 7^{p-1}+2\cdot 14^{p-1}+28^{p-1}-28\equiv$$
$$14\cdot 1+7\cdot 1+4\cdot 1+2\cdot 1+1-28\equiv 0\pmod p$$

$p\mid 28a_{p-2}\Rightarrow p\mid a_{p-2}$. 又因为 $2\nmid a_1$，且易得 $7\nmid a_n$，所以与此数列的每一项都互素的正整数只有 $7^k(k=0,1,2,\cdots)$.

进一步推广可得

(2) 设 p 为素数，$q=2^p-1$ 也为素数(麦森素数)，则 $W=2^{p-1}(2^p-1)$ 为完全数. 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下，即

$$a_n=2^n+2^{2n}+2^{3n}+\cdots+2^{(p-1)n}+q^n+(2q)^n+$$
$$(2^2q)^n+\cdots+(2^{p-1}q)^n-1,n=1,2,3,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,q,q^2,q^3,\cdots(p\geqslant 3)$ 或 $1(p=2)$.

对 $p=2$(原题) 和 $p=3$(推广(1)) 命题已证. 对 $p\geqslant 3$ 的一般情形，设 D 为任一不等于 2 和 q 的素数，则 $(D,W)=1$，由费马小定理得

$$Wa_{p-2}=\sum_{i=1}^{p-1}(2^{p-1-i}q)2^{i(p-1)}+\sum_{i=0}^{p-1}(2^{p-1-i})(2^iq)^{p-1}-W\equiv$$
$$\sum_{i=1}^{p-1}2^{p-1-i}q+\sum_{i=0}^{p-1}2^{p-1-i}-W=$$
$$(2^{p-1}-1)q+(2^p-1)-W=0\pmod D$$

$D\mid Wa_{p-2}\Rightarrow D\mid a_{p-2}$. 又因为 $2\mid a_1$ 且

$$a_n\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{in}-1=\frac{2^{pn}-1}{2^n-1}-1\pmod q$$

若 $p\nmid n$，则 $(p,n)=1$，且

$$(2^n-1,q)=(2^n-1,2^p-1)=1$$

从而

$$2^{pn}-1\equiv 0\pmod q\Rightarrow\frac{2^{pn}-1}{2^n-1}\equiv 0\pmod q\Rightarrow a_n\equiv -1\not\equiv 0\pmod q$$

若 $p\mid n$，则

$$a_n\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{in}-1\equiv\sum_{i=1}^{p-1}1-1=p-2\not\equiv 0\pmod q$$

因此 $q\nmid a_n,n=1,2,\cdots$. 推广命题得证.

(3) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下，即

$$a_n=3^n+3\cdot 5^n+15^n-1,n=1,2,3,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,3,3^2,3^3,\cdots$.

因为对任一不等于 3 和 5 的素数 p，有 $(p,15)=1$，由费马小定理得

$$15a_{p-2}=5\cdot 3^{p-1}+3^2\cdot 5^{p-1}+15^{p-1}-15\equiv$$
$$5\cdot 1+3^2\cdot 1+1-15\equiv 0\pmod p$$

$p\mid 15a_{p-2}\Rightarrow p\mid a_{p-2}$. 又因为 $3\nmid a_n$，$5\mid a_4$，所以与此数列的每一项

都互素的正整数只有 $3^k(k=0,1,2,\cdots)$.

(4) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$$a_n=2^n+3^n+7^n+42^n-1,n=1,2,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有形如 $2^l\cdot 3^m\cdot 7^k(l,m,k$ 为非负整数) 的所有正整数.

(5) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$$a_n=2^n+3^n+7^n+43^n+1\ 806^n-1,n=1,2,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,43,43^2,\cdots$.

证明类似于上.

5 给定凸四边形 $ABCD$, $BC=AD$,且 BC 不平行于 AD.设点 E 和 F 分别在边 BC 和 AD 的内部,满足 $BE=DF$.直线 AC 和 BD 相交于点 P,直线 BD 和 EF 相交于点 Q,直线 EF 和 AC 相交于点 R.证明:当点 E 和 F 变动时,$\triangle PQR$ 的外接圆经过除点 P 外的另一个定点.

波兰命题

证明 由题意,BC 不平行于 AD,则 $\triangle APD$ 的外接圆与 $\triangle BPC$ 的外接圆不相切.否则,过切点作公切线 SS',如图 46.4 所示,则

此证法属于赵彤远

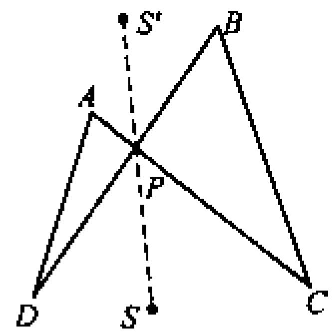


图 46.4

$$\angle DPS=\angle DAP,\angle BPS'=\angle BCP$$

又 $\angle DPS=\angle BPS'$,所以 $\angle BCP=\angle DAP$,于是 $AD /\!/ BC$,与题设矛盾.

故可设它们除点 P 外交于点 O,则 O 是定点.不妨设 O 在 $\triangle DPC$ 内,下面证明:当点 E 和 F 变动时,$\triangle PQR$ 的外接圆经过点 O.

如图 46.5 所示,连结 $OA,OB,OC,OD,OE,OF,OP,OQ,OR$,则由 B,C,O,P 四点共圆和 O,P,A,D 四点共圆得

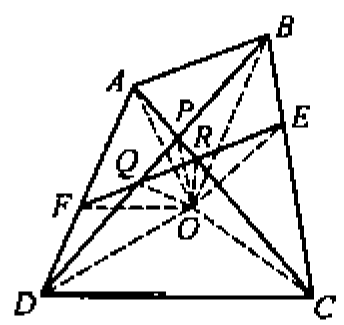


图 46.5

$$\angle OBC=\angle OPC,\angle OPC=\angle ADO$$

所以 $$\angle OBC=\angle ADO$$

同理 $$\angle OCB=\angle DPO=\angle DAO$$

再结合 $AD=BC$,得 $\triangle OBC\cong\triangle ODA$,故

$$OB=OD,\angle OBE=\angle ODF$$

又由条件 $BE=DF$ 可得,$\triangle OBE\cong\triangle ODF$,所以 $OE=OF$, $OB=OD$.而

$$\angle FOE=\angle FOB+\angle BOE=\angle BOF+\angle FOD=\angle BOD$$

于是 $\triangle BOD\backsim\triangle FOE$,所以 $\angle EFO=\angle BDO$,即 $\angle QFO=\angle QDO$,因此 Q,F,D,O 四点共圆,得 $\angle RQO=\angle FDO$.而 O,P,A,D 四点共圆,故 $\angle FDO=\angle ADO=\angle RPO$,因而 $\angle RQO=$

$\angle RPO$,所以 O,R,P,Q 四点共圆.

综上所述,当点 E 和 F 变动时,$\triangle PQR$ 的外接圆经过除 P 外的另一个定点 O.

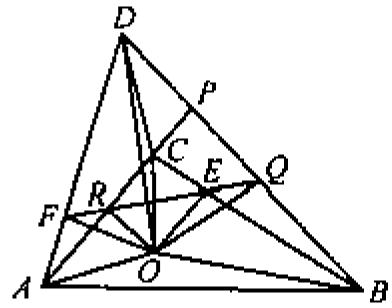


图 46.6

注 (1) 把原题的"边 BC 和 AD 的内部"改为"射线 BC 和 DA 上",则结论仍然成立,$\triangle PQR$ 的外接圆仍过点 O,且原证明不需作任何改动.(图略)

(2) 把原题的"边 BC 和 AD 的内部"改为"射线 CB 和 AD 上",则结论仍然成立,$\triangle PQR$ 的外接圆仍过点 O,原证明仅需作轻微改动($\angle OQB = 180° - \angle OEB = \angle ORC$,从而 $\angle OQP = \angle ORP$).(图略)

(3) 把原题的"凸四边形"改为"凹四边形",则结论仍然成立,$\triangle PQR$ 的外接圆仍过点 O,如图 46.6 所示,原证明仅需作轻微改动($180° - \angle OEQ = \angle OER = \angle OCR = \angle OBQ$).

6 某次数学竞赛共有 6 个试题,其中任意两个试题都被超过 $\frac{2}{5}$ 的参赛者答对了,但没有一个参赛者能答对所有的 6 个试题.证明:至少有两个参赛者都恰好答对了 5 个试题.

罗马尼亚命题

证法1 设有 n 个参赛者,记为 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,将 6 个试题记为 $P_1,P_2,\cdots,P_6$,设

此证法属于邵域程

$S = \{(C_k;P_i,P_j) \mid 1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant i < j \leqslant 6, C_k$ 同时答对了 P_i 和 $P_j\}$,下面我们来考虑 $|S|$.

设 P_i 和 $P_j(1 \leqslant i < j \leqslant 6)$ 同时被 x_{ij} 个参赛者答对,由题意,应有 $x_{ij} > \frac{2}{5}n$,从而 $x_{ij} \geqslant \frac{2n+1}{5}$,于是

$$|S| = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} x_{ij} \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} \frac{2n+1}{5} = C_6^2 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3 \quad ①$$

假设至多有一个参赛者恰好答对了 5 个试题,由于没有一个参赛者能答对所有 6 个试题,所以其他参赛者至多答对了 4 个试题.设 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 分别答对了 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 个试题,不妨设 $5 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$.

若 $a_1 \leqslant 4$,则 $a_k \leqslant 4(1 \leqslant k \leqslant n)$,故

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} C_{a_k}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} C_4^2 = 6n$$

与式①矛盾.所以 $a_1 = 5, 4 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$.

显然,$n \geqslant 2$.若 $a_n \leqslant 3$,则

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} C_{a_k}^2 \leqslant C_5^2 + (n-2)C_4^2 + C_3^2 = 6n + 1$$

与式①矛盾.故 $a_n \geqslant 4$,从而 $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 4$.

不妨设 C_1 答对的5个试题为 $P_1,P_2,\cdots,P_5$,设有 b_j 个参赛者答

对试题 $P_j(1 \leqslant j \leqslant 6)$，则

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_6 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1 \quad ②$$

考虑

$$\sum_{j=2}^{6} x_{1j} \geqslant \sum_{j=2}^{6} \frac{2n+1}{5} = 2n + 1 \quad ③$$

由于有 b_1 个参赛者答对试题 P_1，在这 b_1 个参赛者中有一个共答对 5 题，其余均答对 4 题，故有

$$\sum_{j=2}^{6} x_{1j} \geqslant 4 + 3(b_1 - 1) = 3b_1 + 1 \quad ④$$

结合 ③，④，可得

$$2n + 1 \leqslant 3b_1 + 1$$

故 $b_1 \geqslant \frac{2n}{3}$. 同理可证

$$b_k \geqslant \frac{2n}{3}, k = 1,2,3,4,5 \quad ⑤$$

完全类似地，考虑

$$\sum_{j=1}^{5} x_{j6} \geqslant \sum_{j=1}^{5} \frac{2n+1}{5} = 2n + 1 \quad ⑥$$

由于恰好有 b_6 个参赛者答对试题 P_6，这 b_6 个参赛者平均只答对了 4 个试题，故有

$$\sum_{j=1}^{5} x_{j6} = 3b_6 \quad ⑦$$

结合 ⑥，⑦ 可得，$3b_6 \geqslant 2n + 1$，所以

$$b_6 \geqslant \frac{2n+1}{3} \quad ⑧$$

若 $n \not\equiv 0 \pmod 3$，则 $\frac{2n}{3}$ 不是整数，故由 ⑤ 知

$$b_k > \frac{2n}{3}, 1 \leqslant k \leqslant 5$$

从而

$$b_k \geqslant \frac{2n+1}{3}, 1 \leqslant k \leqslant 5 \quad ⑨$$

结合 ⑧，⑨ 可得

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_6 \geqslant 6 \cdot \frac{2n+1}{3} = 4n + 2$$

与 ② 矛盾. 所以 $n \equiv 0 \pmod 3$，从而由式 ⑧ 知 $b_6 > \frac{2n}{3}$，而 b_6 和 $\frac{2n}{3}$ 都是整数，所以

$$b_6 \geqslant \frac{2n}{3} + 1 \quad ⑩$$

结合④,⑩得

$$b_1+b_2+\cdots+b_6\geqslant 5\cdot\frac{2n}{3}+\frac{2n}{3}+1=4n+1 \quad ⑪$$

由②知,式⑪取等号,故式⑤与⑩均取等号,故有 $b_6=\frac{2n}{3}+1$.考虑

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_{ij}\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}\frac{2n+1}{5}=2(2n+1)=4n+2 \quad ⑫$$

由于有一个参赛者答对了试题 $P_1,P_2,\cdots,P_5$,有 b_6 个参赛者恰好答对了 $P_1,P_2,\cdots,P_5$ 中的3个题,有 $n-1-b_6$ 个参赛者恰好答对了 $P_1,P_2,\cdots,P_5$ 中的4个题,故

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_{ij}=C_5^2+b_6C_3^2+(n-1-b_6)C_4^2=$$
$$6n+4-3b_6=4n+1$$

这与式⑫矛盾.

注 (1)只有2位参赛者恰好答对5道题是有可能的.例如,共有7名选手参赛,A_1 答对1~5题,A_2 答对1,2,3,4,6题,A_3 答对1,2,3,5题,A_4 答对1,4,5,6题,A_5 答对2,4,5,6题,A_6 答对1,2,3,6题,A_7 答对3~6题.易验知此时任意2道题都被至少3人答对.

(2)如果去掉条件"没有一个参赛者能答对所有的6道试题",把结论改为"至少有两个参赛者都至少答对了5道题",则新结论不成立.例如,共有7名选手参赛,A_1 答对1~6题,A_2 答对1~4题,A_3 答对1,2,5,6题,A_4 答对3~6题,A_5 答对1,3,4,5题,A_6 答对1,2,3,6题,A_7 答对2,4,5,6题.易验知此时任意2道题都被至少3人答对.甚至还有最极端的例子:参赛选手只有2人,$A_1$6题全对,$A_2$6题全错.

证法2 设有 n 个参赛者,令 p_{ij} 表示答对第 i 道试题和第 j 道试题的参赛者的人数($1\leqslant i<j\leqslant 6$),并记 $n_r(0\leqslant r\leqslant 6)$ 为恰好答对 r 道试题的参赛者的人数.则

$$\sum_{r=0}^{6}n_r=n$$

由题设,对所有 $1\leqslant i<j\leqslant 6$,都有 $p_{ij}>\frac{2}{5}n$.从而

$$p_{ij}\geqslant\frac{2n+1}{5}$$

于是

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6}p_{ij}\geqslant C_6^2\cdot\frac{2n+1}{5}=6n+3 \quad ⑬$$

另一方面,对于一个恰好答对 r 道试题的参赛者,他对上面和式的贡献为 C_r^2(当 $r<2$ 时,$C_r^2=0$).所以

$$S = \sum_{r=0}^{6} C_r^2 n_r \tag{14}$$

由式⑬,⑭可得

$$S = \sum_{r=0}^{6} C_r^2 n_r \geqslant 6n + 3 = 6\sum_{r=0}^{6} n_r + 3$$

由题设, $n_6 = 0$, 故上式为

$$4n_5 \geqslant 3 + 6n_0 + 6n_1 + 5n_2 + 3n_3$$

所以, $n_5 \geqslant 1$.

若 $n_5 = 1$, 则 $n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = 0$. 于是, $n_4 = n - 1$.

由式⑭知, 此时, $S = 6n + 4$.

由于 $S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_{ij}$ 中的 15 个加数 p_{ij} 都至少是 $\frac{2n+1}{5}$ (记为 λ), 而 $S = 6n + 4$ 不是 15 的倍数, 故这些 p_{ij} 不可能全相等. 于是, 其中有 14 个为 λ, 1 个为 $\lambda + 1$.

设 (i_0, j_0) 使得 $p_{i_0 j_0} = \lambda + 1$. 答对 5 道题的参赛者称为"优胜者".

不失一般性, 不妨设优胜者没有答对第 6 题, 且 i_0, j_0 不为 1, 于是

$$2 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant 6$$

考虑和式

$$S' = p_{16} + p_{26} + p_{36} + p_{46} + p_{56}$$

$$S'' = p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16}$$

设有 x 个参赛者答对了第 6 题, 则他们中的每一个对 S' 的贡献为 3; 有 y 个参赛者答对了第 1 题(除"优胜者"外), 他们中的每一个对 S'' 的贡献为 3, 而"优胜者"对 S'' 的贡献为 4, 于是

$$S' = 3x, S'' = 3y + 4$$

而 $p_{i_0 j_0}$ 不在 S'' 中出现, 所以

$$S'' = 5\lambda = 2n + 1$$

故 S' 为 5λ 或 $5\lambda + 1$.

从而, $3x = 2n + 1$ 或 $3x = 2n + 2$, 且 $3y + 4 = 2n + 1$.

由 $3y + 4 = 2n + 1$, 知 $3 \mid n$. 而这与 $3x = 2n + 1$ 或 $3x = 2n + 2$ 矛盾. 所以, $n_5 \geqslant 2$.

参考文献

[1] 洛桑斯基 E，鲁索 C.制胜数学奥林匹克[M].候文华，张连芳，译.刘嘉焜，校.北京：科学出版社，2003.

[2] 王向东，苏化明，王方汉.不等式·理论·方法[M].郑州：河南教育出版社，1994.

[3] 中国科协青少年工作部，中国数学会.1978～1986年国际奥林匹克数学竞赛题及解答[M].北京：科学普及出版社，1989.

[4] 单墫，等.数学奥林匹克竞赛题解精编[M].南京：南京大学出版社；上海：学林出版社，2001.

[5] 顾可敬.1979～1980中学国际数学竞赛题解[M].长沙：湖南科学技术出版社，1981.

[6] 顾可敬.1981年国内外数学竞赛题解选集[M].长沙：湖南科学技术出版社，1982.

[7] 石华，卫成.80年代国际中学生数学竞赛试题详解[M].长沙：湖南教育出版社，1990.

[8] 梅向明.国际数学奥林匹克30年[M].北京：中国计量出版社，1989.

[9] 单墫，葛军.国际数学竞赛解题方法[M].北京：中国少年儿童出版社，1990.

[10] 丁石孙.乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋[M].北京：北京大学出版社，1993.

[11] 丁石孙.登山·赝币·红绿灯[M].北京：北京大学出版社，1997.

[12] 黄宣国.数学奥林匹克大集[M].上海：上海教育出版社，1997.

[13] 常庚哲.国际数学奥林匹克三十年[M].北京：中国展望出版社，1989.

[14] 丁石孙.归纳·递推·无字证明·坐标·复数[M].北京：北京大学出版社，1995.

[15] 裘宗沪.数学奥林匹克试题集锦[M].上海：华东师范大学出版社，2005.

[16] 裘宗沪.数学奥林匹克试题集锦[M].上海：华东师范大学出版社，2004.

[17] 数学奥林匹克工作室.最新竞赛试题选编及解析(高中数学卷)[M].北京：首都师范大学出版社，2001.

[18] 第31届IMO选题委员会.第31届国际数学奥林匹克试题、备选题及解答[M].济南：山东教育出版社，1990.

[19] 常庚哲.数学竞赛(2)[M].长沙：湖南教育出版社，1989.

[20] 常庚哲.数学竞赛(20)[M].长沙：湖南教育出版社，1994.

[21] 杨森茂，陈圣德.第一届至第二十二届国际中学生数学竞赛题解[M].福州：福建科学技术出版社，1983.

[22] 江苏师范学院数学系.国际数学奥林匹克[M].南京：江苏科学技术出版社，1980.

[23] 恩格尔 A.解决问题的策略[M].舒五昌，冯志刚，译.上海：上海教育出版社，2005.

[24] 王连笑.解数学竞赛题的常用策略[M].上海：上海教育出版社，2005.

[25] 江仁俊，应成璟，蔡训武.国际数学竞赛试题讲解[M].武汉：湖北人民出版社，1980.

[26] 单墫.第二十五届国际数学竞赛[J].数学通讯，1985(3).

[27] 付玉章.第二十九届IMO试题及解答[J].中学数学，1988(10).

[28] 苏亚贵.正则组合包含连续自然数的个数[J].数学通报,1982(8).
[29] 王根章.一道 IMO 试题的嵌入证法[J].中学数学教学.1999(5).
[30] 舒五昌.第 37 届 IMO 试题解答[J].中等数学,1996(5).
[31] 杨卫平,王卫华.第 42 届 IMO 第 2 题的再探究[J].中学数学研究,2005(5).
[32] 陈永高.第 45 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2004(5).
[33] 周金峰,谷焕春.IMO 42 - 2的进一步推广[J].数学通讯,2004(9).
[34] 魏维.第 42 届国际数学奥林匹克试题解答集锦[J].中学数学,2002(2).
[35] 程华.42 届 IMO 两道几何题另解[J].福建中学数学,2001(6).
[36] 张国清.第 39 届 IMO 试题第一题充分性的证明[J].中等数学,1999(2).
[37] 傅善林.第 42 届 IMO 第五题的推广[J].中等数学,2003(6).
[38] 龚浩生,宋庆.IMO 42 - 2的推广[J].中学数学,2002(1).
[39] 厉倩.一道 IMO 试题的推广[J].中学数学研究,2002(10).
[40] 邹明.第 40 届 IMO 一赛题的简解[J].中等数学,2001(3).
[41] 许以超.第 39 届国际数学奥林匹克试题及解答[J].数学通报,1999(3).
[42] 余茂迪,宫宋家.用解析法巧解一道 IMO 试题[J].中学数学教学,1997(4).
[43] 宋庆.IMO5 - 5 的推广[J].中学数学教学,1997(5).
[44] 余世平.从 IMO 试题谈公式 $C_{2n}^{n}=\sum_{i=0}^{n}(C_n^i)^2$ 之应用[J].数学通讯,1997(12).
[45] 徐彦明.第 42 届 IMO 第 2 题的另一种推广[J].中学教研(数学).2002(10).
[46] 张伟军.第 41 届 IMO 两赛题的证明与评注[J].中学数学月刊,2000(11).
[47] 许静,孔令恩.第 41 届 IMO 第 6 题的解析证法[J].数学通讯,2001(7).
[48] 魏亚清.一道 IMO 赛题的九种证法[J].中学教研(数学),2002(6).
[49] 陈四川.IMO - 38 试题 2 的纯几何解法[J].福建中学数学,1997(6).
[50] 常庚哲,单墫,程龙.第二十二届国际数学竞赛试题及解答[J].数学通报,1981(9).
[51] 李长明.一道 IMO 试题的背景及证法讨论[J].中学数学教学,2000(1).
[52] 王凤春.一道 IMO 试题的简证[J].中学数学研究,1998(10).
[53] 罗增儒.IMO 42 - 2的探索过程[J].中学数学教学参考,2002(7).
[54] 嵇仲韶.第 39 届 IMO 一道预选题的推广[J].中学数学杂志(高中),1999(6).
[55] 王杰.第 40 届 IMO 试题解答[J].中等数学,1999(5).
[56] 舒五昌.第三十七届 IMO 试题及解答(上)[J].数学通报,1997(2).
[57] 舒五昌.第三十七届 IMO 试题及解答(下)[J].数学通报,1997(3).
[58] 黄志全.一道 IMO 试题的纯平几证法研究[J].数学教学通讯,2000(5).
[59] 段智毅,秦永.IMO - 41 第 2 题另证[J].中学数学教学参考,2000(11).
[60] 杨仁宽.一道 IMO 试题的简证[J].数学教学通讯,1998(3).
[61] 相生亚,裘良.第 42 届 IMO 试题第 2 题的推广、证明及其它[J].中学数学研究,2002(2).
[62] 熊斌.第 46 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2005(9).
[63] 谢峰,谢宏华.第 34 届 IMO 第 2 题的解答与推广[J].中等数学,1994(1).
[64] 熊斌,冯志刚.第 39 届国际数学奥林匹克[J].数学通讯,1998(12).

[65] 朱恒杰.一道 IMO 试题的推广[J].中学数学杂志,1996(4).
[66] 肖果能,袁平之.第 39 届 IMO 一道试题的研究(I)[J].湖南数学通讯,1998(5).
[67] 肖果能,袁平之.第 39 届 IMO 一道试题的研究(Ⅱ)[J].湖南数学通讯,1998(6).
[68] 杨克昌.一个数列不等式——IMO23-3 的推广[J].湖南数学通讯,1998(3).
[69] 吴长明,胡根宝.一道第 40 届 IMO 试题的探究[J].中学数学研究,2000(6).
[70] 仲翔.第二十六届国际数学奥林匹克(续)[J].数学通讯,1985(11).
[71] 程善明.一道 IMO 赛题的纯几何证法与推广[J].中学数学教学,1998(4).
[72] 刘元树.一道 IMO 试题解法的再探讨[J].中学数学研究,1998(12).
[73] 刘连顺,仝瑞平.一道 IMO 试题解法新探[J].中学数学研究,1998(8).
[74] 王凤春.一道 IMO 试题的简证[J].中学数学研究,1998(10).
[75] 李长明.一道 IMO 试题的背景及证法讨论[J].中学数学教学,2000(1).
[76] 方廷刚.综合法简证一道 IMO 预选题[J].中学生数学,1999(2).
[77] 吴伟朝.对函数方程 $f(x^l\cdot f^{[m]}(y)+x^n)=x^l\cdot y+f^n(x)$ 的研究[M]//湖南教育出版社编.数学竞赛(22).长沙:湖南教育出版社,1994.
[78] 湘普.第 31 届国际数学奥林匹克试题解答[M]//湖南教育出版社编.数学竞赛(6~9).长沙:湖南教育出版社,1991.
[79] 陈永高.第 45 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2004(5).
[80] 程俊.一道 IMO 试题的推广及简证[J].中等数学,2004(5).
[81] 蒋茂森.$2k$ 阶银矩阵的存在性和构造法[J].中等数学,1998(3).
[82] 单墫.散步问题与银矩阵[J].中等数学,1999(3).

后 记 | Postscript

行为的背后是动机,编一部洋洋80万言的书一定要有很强的动机才行,借后记不妨和盘托出.

首先,这是一本源于"匮乏"的书.1976年编者初中一年级,时值"文化大革命"刚刚结束,物质产品与精神产品极度匮乏,学校里薄薄的数学教科书只有几个极简单的习题,根本满足不了学习的需要.当时全国书荒,偌大的书店无书可寻,学生无题可做,在这种情况下,笔者的班主任郭清泉老师便组织学生自编习题集.如果说忠诚党的教育事业不仅仅是一个口号的话,那么郭老师确实做到了.在其个人生活极为困顿的岁月里,他拿出多年珍藏的数学课外书领着一批初中学生开始选题、刻钢板、推油辊.很快一本本散发着油墨清香的习题集便发到了每个同学的手中,喜悦之情难以名状,正如高尔基所说:"像饥饿的人扑到了面包上."当时电力紧张经常停电,晚上写作业时常点蜡烛,冬夜,烛光如豆,寒气逼人,伏案演算着自己编的数学题,沉醉其中,物我两忘.30年后同样的冬夜,灯光如昼,温暖如夏,坐拥书城,竟茫然不知所措,此时方觉匮乏原来也是一种美(想想西南联大当时在山洞里、在防空洞中,学数学学成了多少大师级人物.日本战后恢复期产生了三位物理学诺贝尔奖获得者,如汤川秀树等,以及高木贞治、小平邦彦、广中平佑的成长都证明了这一点),可惜现在的学生永远也体验不到那种意境了(中国人也许是世界上最讲究意境的,所谓"雪夜闭门读禁书",也是一种意境),所以编此书颇有怀旧之感.有趣的是后来这次经历竟在笔者身上产生了"异

化”,抄习题的乐趣多于做习题,比为买椟还珠不以为过,四处收集含有习题的数学著作,从吉米多维奇到菲赫金哥尔茨,从斯米尔诺夫到维诺格拉朵夫,从笹部贞市郎到哈尔莫斯,乐此不疲.凡30年几近偏执,朋友戏称:“这是一种不需治疗的精神病.”虽然如此,毕竟染此“病症”后容易忽视生活中那些原本的乐趣.这有些像葛朗台用金币碰撞的叮当声取代了花金币的真实快感一样.匮乏带给人的除了美感之外,更多的是恐惧.中国科学院数学研究所数论室主任徐广善先生来哈尔滨工业大学讲课,课余时曾透露过陈景润先生生前的一个小秘密(曹珍富教授转述,编者未加核实).陈先生的一只抽屉中存有多只快生锈的上海牌手表.这个不可思议的现象源于当年陈先生所经历过的可怕的匮乏.大学刚毕业,分到北京四中,后被迫离开,衣食无着,生活窘迫,后虽好转,但那次经历给陈先生留下了深刻记忆,为防止以后再次陷于匮乏,就买了当时陈先生认为在中国最能保值增值的上海牌手表,以备不测.像经历过饥饿的田鼠会疯狂地往洞里搬运食物一样,经历过如饥似渴却无题可做的编者在潜意识中总是觉得题少,只有手中有大部头习题集,心里才觉安稳.所以很多时候表面看是一种热爱,但更深层次却是恐惧,是缺少富足感的体现.

其次,这是一本源于“传承”的书.哈尔滨作为全国解放最早的城市,开展数学竞赛活动也是很早的,早期哈尔滨工业大学的吴从炘教授、黑龙江大学的颜秉海教授、船舶工程学院(现哈尔滨工程大学)的戴遗山教授、哈尔滨师范大学的吕庆祝教授作为先行者为哈尔滨的数学竞赛活动打下了基础,定下了格调.中期哈尔滨市教育学院王翠满教授、王万祥教授、时承权教授,哈尔滨师专的冯宝琦教授、陆子采教授,哈尔滨师范大学的贾广聚教授,黑龙江大学的王路群教授、曹重光教授,哈三中的周建成老师,哈一中的尚杰老师,哈师大附中的沙洪泽校长,哈六中的董乃培老师,为此作出了长期的努力.上世纪80年代中期开始,一批中青年数学工作者开始加入,主要有哈尔滨工业大学的曹珍富教授、哈师大附中的李修福老师及笔者.90年代中期,哈尔滨的数学奥林匹克活动渐入佳境,又有像哈师大附中刘利益等老师加入进来,但在高等学校中由于搞数学竞赛研究既不算科研又不计入工作量,所以再坚持难免会被边缘化,于是研究人员逐渐以中学教师为主,在高校中近乎绝迹.2008年CMO即将在哈尔滨举行,振兴迫在眉睫,本书算是一个序曲,后面会有大型专业杂志《数学奥林匹克与数学文化》创刊,定会好戏连台,让哈尔滨的数学竞赛事业再度辉煌.

第三,这是一本源于"氛围"的书.很难想像速滑运动员产生于非洲,也无法相信深山古刹之外会有高僧.环境与氛围至关重要.在整个社会日益功利化、世俗化、利益化、平面化的大背景下,编者师友们所营造的小的氛围影响着其中每个人的道路选择,以学有专长为荣,不学无术为耻的价值观点互相感染、共同坚守,用韩波博士的话讲,这已是我们这台计算机上的硬件.赖于此,本书的出炉便在情理之中,所以理应致以敬意,借此向王忠玉博士、张本祥博士、郭梦书博士、吕书臣博士、康大臣博士、刘孝廷博士、刘晓燕博士、王延青博士、钟德寿博士、薛小平博士、韩波博士、李龙锁博士、刘绍武博士对笔者多年的关心与鼓励致以诚挚的谢意,特别是尚琥教授在编者即将放弃之际给予的坚定的支持.

第四,这是一个"蝴蝶效应"的产物.如果说人的成长过程具有一点动力系统迭代的特征的话,那么其方程一定是非线性的,即对初始条件具有敏感依赖的,俗称"蝴蝶效应".简单说就是一个微小的"扰动"会改变人生的轨迹,如著名拓扑学家,纽结大师王诗宬 1977 年时还是一个喜欢中国文学史的插队知青,一次他到北京去游玩,坐 332 路车去颐和园,看见"北京大学"四个字,就跳下车进入校门,当时他的脑子中正在想一个简单的数学问题(大多数时候他都是在推敲几句诗),就是六个人的聚会上总有三个人认识或三个人不认识(用数学术语说就是 6 阶 2 色完全图中必有单色 3 阶子图存在),然后碰到一个老师,就问他,他说你去问姜伯驹老师(我国著名数学家姜亮夫之子),姜伯驹老师的办公室就在我办公室对面.而当他找到姜伯驹教授时,姜伯驹说为什么不来试试学数学,于是一句话,一辈子,有了今天北京大学数学所的王诗宬副所长(《世纪大讲堂》,第 2 辑,辽宁人民出版社,2003:128-149).可以设想假如他遇到的是季羡林或俞平伯,今天该会是怎样.同样可以设想,如果编者初中的班主任老师是一位体育老师,足球健将的话,那么今天可能会多一位超级球迷"罗西",少一位执着的业余数学爱好者,也绝不会有本书的出现.

第五,这也是一本源于"尴尬"的书.编者高中就读于一所具有数学竞赛传统的学校,班主任是学校主抓数学竞赛的沙洪泽老师.当时成立数学兴趣小组时,同学们非常踊跃,但名额有限,可能是沙老师早已发现编者并无数学天分所以不被选中,再次申请并请姐姐(在同校高二年级)去求情均未果.遂产生逆反心理,后来坚持以数学谋生,果真由于天资不足,屡战屡败,虽自我鼓励,屡败再屡战,但其结果仍如寒山子诗所说:"用力磨碌砖,那堪将作镜."直至而立之年,幡然悔悟,但

"贼船"既上,回头已晚,彻底告别又心有不甘,于是以业余身份尴尬地游走于业界近15年,才有今天此书问世.

看来如果当初沙老师增加一个名额让编者尝试一下,后再知难而退,结果可能会皆大欢喜.但有趣的是当年竞赛小组的人竟无一人学数学专业,也无一人从事数学工作.看来教育是很值得研究的,"欲擒故纵"也不失为一种好方法.沙老师后来也放弃了数学教学工作,从事领导工作,转而研究教育,颇有所得,还出版了专著《教育——为了人的幸福》(教育科学出版社,2005),对此进行了深入研究.

最后,这也是一本源于"信心"的书.近几年,一些媒体为了吸引眼球,不惜把中国在国际上处于领先地位的数学奥林匹克妖魔化且多方打压,此时编写这本题集是有一定经济风险的.但编者坚信中国人对数学是热爱的.利玛窦、金尼阁指出:"多少世纪以来,上帝表现了不只用一种方法把人们吸引到他身边.垂钓人类的渔人以自己特殊的方法吸引人们的灵魂落入他的网中,也就不足为奇了.任何可能认为伦理学、物理学和数学在教会工作中并不重要的人,都是不知道中国人的口味的,他们缓慢地服用有益的精神药物,除非它有知识的佐料增添味道."(利玛窦,金尼阁,著.《利玛窦中国札记》.何高济,王遵仲,李申,译.何兆武,校.中华书局,1983,P347).中国的广大中学生对数学竞赛活动是热爱的,是能够被数学所吸引的,对此我们有充分的信心.而且,奥林匹克之于中国就像围棋之于日本,足球之于巴西,瑜珈之于印度一样,在世界上有品牌优势.2001年笔者去新西兰探亲,在奥克兰的一份中文报纸上看到一则广告,赫然写着中国内地教练专教奥数,打电话过去询问,对方声音甜美,颇富乐感,原来是毕业于沈阳音乐学院的女学生,在新西兰找工作四处碰壁后,想起在大学念书期间勤工俭学时曾辅导过小学生奥数,所以,便想一试身手,果真有家长把小孩送来,她便也以教练自居,可见数学奥林匹克已经成为一种类似于中国制造的品牌.出版这样的书,担心何来呢!

数学无国界,它是人类最共性的语言.数学超理性多呈冰冷状,所以一个个性化的,充满个体真情实感的后记是需要的,虽然难免有自恋之嫌,但毕竟带来一丝人气.

卞美编的精美插图为全书注入了人文气息,责任编辑李广鑫女士的一丝不苟使全书更添严谨,一并感谢.

刘培杰

2006年6月